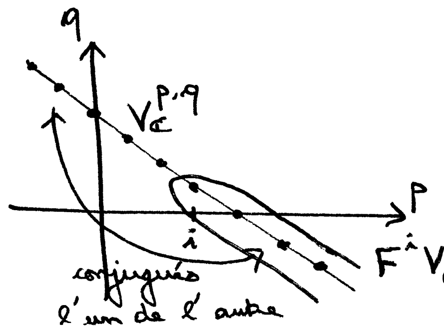
Structures de Hodge et groupes de Mumford-Tate

① Structures de Hodge

Déf : Une structure de Hodge rationnelle ($\mathbb{Q}$-HS en abrégé) pure de poids m est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel V de dimension finie muni d'une décomposition

$$V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=m} V_{\mathbb{C}}^{p,q}$$

telle que $\overline{V_{\mathbb{C}}^{p,q}} = V_{\mathbb{C}}^{q,p}$ (où $\bar{\ }$ désigne la conjugaison $v \otimes z \mapsto v \otimes \bar{z}$).



Filtration de Hodge :

$$F^i V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\substack{p+q=m \\ p \geq i}} V_{\mathbb{C}}^{p,q}$$

$$\cdots \supset F^i V_{\mathbb{C}} \supset F^{i+1} V_{\mathbb{C}} \supset \cdots$$

Rem : On retrouve la décomposition de Hodge à partir de la filtration, puisque $V_{\mathbb{C}}^{p,q} = F^p V_{\mathbb{C}} \cap \overline{F^q V_{\mathbb{C}}}$.

Déf :
- Une $\mathbb{Q}$-HS pure est une somme directe finie $\bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} V_m = V$ où V_m est une $\mathbb{Q}$-HS pure de poids m.
- Si $T \subset \mathbb{Z}^2$ on dit que V est de type T si $(p,q) \notin T \Rightarrow V_{\mathbb{C}}^{p,q} = 0$.
- Si V et W sont des $\mathbb{Q}$-HS, un morphisme de $\mathbb{Q}$-HS de V dans W est une application linéaire $f : V \to W$ telle que $f_{\mathbb{C}}$ envoie $V_{\mathbb{C}}^{p,q}$ dans $W_{\mathbb{C}}^{p,q}$ $\forall (p,q) \in \mathbb{Z}^2$.

Rem : La catégorie des $\mathbb{Q}$-HS ainsi définie est une catégorie abélienne $\mathbb{Q}$-linéaire.

Ex. ~~idiot~~ : $V = \frac{\mathbb{Q}[X]}{(X^2)}$ $V_{\mathbb{C}} = \frac{\mathbb{C}[X]}{(X^2)}$

on obtient une $\mathbb{Q}$-HS de poids 1 en posant par exemple

$V_{\mathbb{C}}^{1,0} = \mathrm{Vect}\,(1+iX)$

$V_{\mathbb{C}}^{0,1} = \mathrm{Vect}\,(1-iX)$

On remarquera que la condition $\overline{V_{\mathbb{C}}^{p,q}} = V_{\mathbb{C}}^{q,p}$ empêche les $V_{\mathbb{C}}^{p,q}$ d'être définis sur $\mathbb{R}$ (sauf si $p=q$).

Ex 2 Soit X une variété projective lisse sur $\mathbb{C}$ et X^{an} l'espace analytique associé. Alors la cohomologie de Betti $H^m(X^{an}, \mathbb{Z})$ est naturellement une $\mathbb{Z}$-HS de poids m. La composante (p,q) de $H^m(X^{an}, \mathbb{C})$ est $H^q(X^{an}, \Omega_X^p)$.

Rem On obtient la notion de $\mathbb{Z}$-HS en remplaçant $\mathbb{Q}$ par $\mathbb{Z}$ dans la définition. (On demande alors à V d'être un groupe abélien de type fini. On perd évidemment la torsion dès que l'on étend les scalaires à $\mathbb{Q}$.)

② Quelques constructions

Soient $\left|\begin{array}{l} V \text{ de poids } m \\ W \text{ de poids } n \end{array}\right.$ des $\mathbb{Q}$-HS.

- dual $\check{V} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, \mathbb{Q})$ est une $\mathbb{Q}$-HS de poids $-m$.

$$(\check{V})_{\mathbb{C}} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=m} \underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}^{p,q}, \mathbb{C})}_{=:(\check{V})_{\mathbb{C}}^{-p,-q}}$$

- $V \otimes W$ est naturellement une $\mathbb{Q}$-HS de poids $m+n$.

$$(V\otimes W)_{\mathbb{C}}^{p,q} = \bigoplus_{\substack{r+r'=p \\ s+s'=q}} V_{\mathbb{C}}^{r,s} \otimes V_{\mathbb{C}}^{r',s'}$$

- $\mathrm{Hom}(V,W) \simeq \check{V} \otimes W$ $\mathbb{Q}$-HS de poids $n-m$.

- $\mathrm{Sym}^k(V)$ et $\Lambda^k V$ $\mathbb{Q}$-HS de poids km.

Prop : La catégorie ($\mathbb{Q}$-HS) des $\mathbb{Q}$-HS est une catégorie tannakienne neutre. (Le neutre est le foncteur d'oubli ($\mathbb{Q}$-HS) $\to$ $\mathbb{Q}$-e

Déf : Soit V une $\mathbb{Q}$-HS. Une <u>classe de Hodge de type (p,p)</u> est un élément de $V \cap V_{\mathbb{C}}^{p,p}$. Une <u>classe de Hodge</u> est une classe de Hodge de type $(0,0)$.

Ex: Soient V et W des $\mathbb{Q}$-HS. Alors $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}})$ se décompose en

$$\bigoplus_{\substack{(r,s)\in\mathbb{Z}^2 \\ (r',s')\in\mathbb{Z}^2}} \underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}^{r,s}, W_{\mathbb{C}}^{r',s'})}_{} \qquad M := \mathrm{Hom}(V,W)$$

ce terme contribue à $M_{\mathbb{C}}^{r'-r,\, s'-s}$.

On voit facilement qu'un élément $\varphi \in \mathrm{Hom}(V,W)$ est une classe de Hodge si et seulement si c'est un morphisme de $\mathbb{Q}$-HS.

③ Polarisation et semi-simplicité

Déf (opérateur de Weil) : Soit V une $\mathbb{Q}$-HS. On note $C \in GL(V_{\mathbb{R}})$ l'opérateur de Weil défini par $C_{\mathbb{C}}(v) = i^{q-p} v$ si $v \in V_{\mathbb{C}}^{p,q}$.

Rem : Si $v \otimes z \in V_{\mathbb{C}}^{p,q}$, le calcul ci-dessous montre que $\overline{C_{\mathbb{C}}(v\otimes z)} = C_{\mathbb{C}}(\overline{v\otimes z})$ donc $C_{\mathbb{C}}$ provient bien d'un $C \in GL(V_{\mathbb{R}})$.

$$\overline{C_{\mathbb{C}}(v\otimes z)} = \overline{i^{q-p}\, v\otimes z} = \left(\frac{1}{i}\right)^{q-p} \overline{v\otimes z}$$
$$= i^{p-q}\, \overline{v\otimes z} = C_{\mathbb{C}}(\overline{v\otimes z}) \quad \text{car } \overline{v\otimes z} \in V_{\mathbb{C}}^{q,p}.$$

Rem 2 : $C_{\mathbb{C}}^2$ agit sur $V_{\mathbb{C}}^{p,q}$ par $(-1)^{q-p} = (-1)^{p+q} = (-1)^m$, donc si V est pure de poids m on a $C = (-1)^m \mathrm{Id}_{V_{\mathbb{R}}}$.

Déf : Soit V une $\mathbb{Q}$-HS pure de poids m. Une <u>polarisation</u> sur V est un morphisme de $\mathbb{Q}$-HS

$$\varphi : \underbrace{V\otimes V}_{\text{pure de poids } 2m} \longrightarrow \mathbb{Q}(-m) =: \underbrace{(2i\pi)^{-m}\mathbb{Q}}_{\text{de type } (m,m)} \subset \mathbb{C}$$

tel que la forme bilinéaire

$$B_{\varphi} : V_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto (2i\pi)^m \varphi(Cx\otimes y)$$

soit un produit scalaire (i.e. symétrique et déf. >0).

<u>Rem</u> : Comme φ est un morphisme de $\mathbb{Q}$-HS, $\varphi_{\mathbb{C}}$ est nul sauf sur la composante de type (m,m), i.e. sur $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V_{\mathbb{C}}^{i,m-i} \otimes V_{\mathbb{C}}^{m-i,i}$. Or $C_{\mathbb{C}}$ agit trivialement sur cette composante. En particulier, pour $x, y \in V_{\mathbb{R}}$,

$$\begin{aligned}
\varphi(x \otimes Cy) &= (-1)^m \varphi(C^2 x \otimes Cy) \\
&= (-1)^m \varphi(Cx \otimes y) \\
&= (-1)^m B_{\varphi}(x,y) \cdot \frac{1}{(2i\pi)^m} \\
&= (-1)^m \varphi(Cy \otimes x)
\end{aligned}$$

et comme C est un automorphisme de $V_{\mathbb{R}}$ on en déduit que la forme

$$\begin{aligned} V_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto (2i\pi)^m \varphi(x \otimes y) \end{aligned}$$

est $\begin{cases} \text{alternée si } m \text{ impair} \\ \text{symétrique si } m \text{ pair.} \end{cases}$

<u>Déf</u> :
- Une $\mathbb{Q}$-HS de poids m est dite polarisable si elle admet une polarisation.
- Une $\mathbb{Q}$-HS est dite <u>polarisable</u> si toutes ses composantes pures le sont.

<u>Rem</u> :
- Si V est une $\mathbb{Q}$-HS polarisable et $W \subset V$ une sous-$\mathbb{Q}$-HS, alors W est polarisable (OPS V pure de poids m, alors on a une polarisation φ pour V, et $\varphi|_W$ est une polarisation de W).
- De même si V_1 et V_2 sont polarisables alors $V_1 \oplus V_2$ et $V_1 \otimes V_2$ le sont aussi.

<u>Prop</u> : La sous-catégorie $(\mathbb{Q}\text{-HS})^{pol} \subset (\mathbb{Q}\text{-HS})$ des $\mathbb{Q}$-HS polarisables est une sous-catégorie tannakienne.

<u>Prop</u> : La catégorie tannakienne $(\mathbb{Q}\text{-HS})^{pol}$ est semi-simple.

<u>Dém</u> Soit V une $\mathbb{Q}$-HS polarisable et $W \hookrightarrow V$ une sous-$\mathbb{Q}$-HS. OPS V pure de poids m. Soit $\varphi : V \otimes V \longrightarrow \mathbb{Q}(-m)$ une polarisation. On pose

$$W^{\perp} = \{ x \in V \mid \forall w \in W \ \ \varphi(x \otimes w) = 0 \}.$$

(On aimerait prendre l'orthogonal pour le produit scalaire B_{φ} mais B_{φ} n'est défini que sur $\mathbb{R}$.)

On vérifie alors facilement que $W^{\perp} \subset V$ est une sous $\mathbb{Q}$-HS (on prend pour $(W^\perp)^{p,q}_{\mathbb{C}}$ l'intersection $V^{p,q}_{\mathbb{C}} \cap (W^\perp)_{\mathbb{C}}$ dans $V_{\mathbb{C}}$), et que $V = W \oplus W^\perp$ comme $\mathbb{Q}$-HS. (En particulier il faut montrer que $V^{p,q}_{\mathbb{C}} = W^{p,q}_{\mathbb{C}} \oplus (W^\perp)^{p,q}_{\mathbb{C}}$.)

4) Le tore de Deligne

- On note $\mathbb{S} = \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ (restriction à la Weil).
Fonctoriellement, $\mathbb{S}$ est décrit par $\mathbb{S}(A) = (A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})^\times$ pour toute $\mathbb{R}$-algèbre A.
On a $\mathbb{S}_{\mathbb{C}} := \mathbb{S} \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{R}} \mathrm{Spec}\,\mathbb{C} \simeq \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}^2$
donc $\mathbb{S}$ est un tore de rang 2 sur $\mathbb{R}$.
- $T = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit sur le groupe des caractères $X(\mathbb{S}_{\mathbb{C}}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-gpes}}(\mathbb{S}_{\mathbb{C}}, \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}) \simeq \mathbb{Z}^2$ par $(p,q) \mapsto (q,p)$. Donc dans l'« équivalence »

$$(\text{tores réels}) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{c}\text{gpes abéliens libres de rg fini} \\ + \text{ac}^\circ \text{ de } \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})\end{array}\right)$$

le tore de Deligne correspond à $\mathbb{Z}^2$ munit de l'action de T qui échange les composantes p et q de $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$.

$$\mathbb{S} = \mathrm{Spec}\left(\mathbb{C}[z, \bar{z}, z^{-1}, \bar{z}^{-1}]^T\right) \qquad z = A + iB$$
$$= \mathrm{Spec}\left(\mathbb{R}[A, B, (A^2+B^2)^{-1}]\right) \qquad \bar{z} = A - iB$$

On note :

a) z et $\bar{z}$: $\mathbb{S}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ les caractères

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}_{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \\ \wr\| & & \wr\| \\ \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[z,z^{-1},\bar{z},\bar{z}^{-1}] & & \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[U,U^{-1}] \end{array}$$

définis par $z(U) = z$ et $\bar{z}(U) = \bar{z}$. Ils engendrent $X(\mathbb{S}_{\mathbb{C}}) \simeq \mathbb{Z}^2$.

b) $N (= z\bar{z}) : \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}$ le caractère défini

« norme »

$$\begin{array}{c} \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}} \\ \wr\| \\ \mathrm{Spec}\,\mathbb{R}[U,U^{-1}] \end{array}$$

par $N(U) = A^2 + B^2$.
$N(\mathbb{R}) : \mathbb{S}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{R}^\times$ est donné par $\lambda \mapsto |\lambda|^2$.

On a $N_{\mathbb{C}} = z\bar{z}$ et on note $\mathrm{Ker}\, N = \mathbb{U} = \mathrm{Spec}\left(\dfrac{\mathbb{R}[A,B]}{(A^2+B^2-1)}\right)$.
$\mathbb{U}$ est un tore réel de rang 1 dont le groupe des $\mathbb{R}$-points s'identifie naturellement au groupe des nombres complexes de module 1.

c) $\mu : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ le cocaractère défini par $\mu(z) = U$ et $\mu(\bar{z}) = 1$ avec les notations ci-dessus.
Il est caractérisé par $\begin{cases} z \circ \mu = id_{\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}} \\ \bar{z} \circ \mu \text{ trivial} \end{cases}$,
et donné fonctoriellement par $\mu(A) : A^\times \longrightarrow A^\times \times A^\times$
$a \longmapsto (a, 1)$
pour toute $\mathbb{C}$-algèbre A.

d) $w : \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{S}$
"poids"
$U \longleftarrow\!\!| \ A$
$0 \longleftarrow\!\!| \ B$
$w(\mathbb{R})$ est l'inclusion naturelle $\mathbb{R}^\times \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$.
Par ailleurs si A est une $\mathbb{C}$-algèbre, $w_{\mathbb{C}}(A) : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}(A) \to \mathbb{S}_{\mathbb{C}}(A) \simeq \mathbb{G}^2_{m,\mathbb{C}}(A)$ est le morphisme diagonal $a \longmapsto (a, a)$.

5 Notion de structure de Hodge en termes du tore de Deligne

On note $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et on rappelle qu'il agit sur $X(\mathbb{S}_{\mathbb{C}}) \simeq \mathbb{Z}^2$ par $(p,q) \mapsto (q,p)$.
On sait (voir exposé de Matthieu) que l'on a une équivalence de catégories

$$\mathrm{Rep}_{\mathbb{R}}(\mathbb{S}) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbb{R}\text{-ev de dim}^\circ \text{ finie } V + \mathbb{Z}^2\text{-gradua}^\circ \text{ de } V_{\mathbb{C}} \\ \text{telle que l'ac}^\circ \text{ de } \Gamma \text{ sur } V_{\mathbb{C}} \text{ (par conjugaison)} \\ \text{soit compatible avec l'ac}^\circ \text{ de } \Gamma \text{ sur } \mathbb{Z}^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } \mathrm{Rep}_{\mathbb{R}}(\mathbb{S}) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbb{R}\text{-ev de dim}^\circ \text{ finie } V + \text{décomposition} \\ V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2} V_{\mathbb{C}}^{p,q} \text{ telle que } \overline{V_{\mathbb{C}}^{p,q}} = V_{\mathbb{C}}^{q,p} \end{pmatrix}$$

$$\longleftrightarrow (\mathbb{R}\text{-HS}).$$

- Se donner une $\mathbb{R}$-HS revient donc à se donner un $\mathbb{R}$-ev V (de dim° finie) et un morphisme de $\mathbb{R}$-groupes algébriques $h : \mathbb{S} \to \underline{GL}(V)$.

  De plus, la $\mathbb{R}$-HS est de poids m ssi l'action correspondant à $h\circ w : \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}} \longrightarrow \underline{GL}(V)$ est donnée par $a \mapsto a^{-m}\,\mathrm{id}$.

- Se donner une $\mathbb{Q}$-HS revient à se donner un $\mathbb{Q}$-ev V de dim° finie et une $\mathbb{R}$-HS sur $V_{\mathbb{R}}$, telle que la décomposition en poids $V = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} V_m$ soit définie sur $\mathbb{Q}$. On obtient finalement une équivalence de catégories

$$(\mathbb{Q}\text{-HS}) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{l} V \in \mathrm{Vec}_{\mathbb{Q}} + \text{morphisme } h : \mathbb{S} \longrightarrow \underline{GL}(V_{\mathbb{R}}) \text{ de gpes} \\ \text{tel que } h\circ w : \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}} \to \underline{GL}(V_{\mathbb{R}}) \text{ soit défini sur } \mathbb{Q} \end{array} \right)$$

<u>Rem 1</u> : La convention usuelle est la suivante. L'espace $V_{\mathbb{C}}^{p,q}$ de la décomposition de Hodge est l'espace $V(\chi)$ pour le caractère $\chi = z^{-p}\bar{z}^{-q} \in X(\mathbb{S}_{\mathbb{C}})$.

<u>Rem 2</u> : Soit V une $\mathbb{Q}$-HS. On a un morphisme de groupes $h(\mathbb{R}) : \mathbb{S}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{C}^* \longrightarrow GL(V_{\mathbb{R}})$. L'élément $h(i) \in GL(V_{\mathbb{R}})$ agit sur $V_{\mathbb{C}}^{p,q}$ par multiplication par $i^{-p}(\bar{i})^{-q} = i^{q-p}$. Donc $h(i) = C$ (l'opérateur de Weil) !

⑥ <u>Groupe de Mumford-Tate et groupe de Hodge</u>

<u>Déf</u> : Soit V une $\mathbb{Q}$-HS, correspondant à un morphisme $h : \mathbb{S} \to \underline{GL}(V_{\mathbb{R}})$. Le groupe de <u>Mumford-Tate</u> $MT(V)$ (resp. le groupe de <u>Hodge</u> $Hg(V)$) est le plus petit

$\mathbb{Q}$-sous-groupe algébrique (fermé) $M \subset \underline{GL}(V)$ tel que h se factorise en

$$h : \mathbb{S} \longrightarrow M_{\mathbb{R}} \longrightarrow \underline{GL}(V_{\mathbb{R}})$$

(resp. tel que $h_{|\mathbb{U}}$ se factorise en

$$h_{|\mathbb{U}} : \mathbb{U} = \mathrm{Ker}\, N \longrightarrow M_{\mathbb{R}} \longrightarrow \underline{GL}(V_{\mathbb{R}}) \quad)$$

Rem 1 : Le groupe de Hodge est parfois appelé "groupe de Mumford-Tate spécial".

Rem 2 : On peut aussi définir le groupe de Mumford-Tate $MT(V)$ via μ (le cocaractère défini en ④). En effet, h se factorise par $M_{\mathbb{R}}$ ssi $h_{\mathbb{C}} \circ \mu : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \longrightarrow \underline{GL}(V_{\mathbb{C}})$ se factorise par $M_{\mathbb{C}}$.

Rem 3 : $MT(V)$ existe bien : c'est l'intersection de tous les $\mathbb{Q}$-sous-groupes algébriques $M \subset \underline{GL}(V)$ tels que $h(\mathbb{S}) \subset M_{\mathbb{R}}$. (idem pour $Hg(V)$).

Rem 4 : On a un morphisme naturel de schémas $\underline{GL}(V_{\mathbb{R}}) \xrightarrow{p} \underline{GL}(V)$. $MT(V)$ est aussi l'adhérence de Zariski dans $\underline{GL}(V)$ de l'image du morphisme composé $\mathbb{S} \xrightarrow{h} \underline{GL}(V_{\mathbb{R}}) \xrightarrow{p} \underline{GL}(V)$, i.e. $MT(V) = \overline{p(h(\mathbb{S}))}$. De même $Hg(V) = \overline{p(h(\mathbb{U}))}$.
En particulier, $MT(V)$ et $Hg(V)$ sont connexes.

⑦ Interprétation tannakienne

Soit V une $\mathbb{Q}$-HS et soit $h_V : \mathbb{S} \longrightarrow \underline{GL}(V_{\mathbb{R}})$ le morphisme correspondant. Soit T une construction tensorielle obtenue à partir de V, i.e. T est une somme directe finie de termes de la forme $T^{a_i,b_i}(V) = V^{\otimes a_i} \otimes (\check{V})^{\otimes b_i}$.

T est naturellement une $\mathbb{Q}$-HS, on note $h_T : \mathbb{S} \to \underline{GL}(T_{\mathbb{R}})$ le morphisme correspondant. Le groupe algébrique $\underline{GL}(V)$ agit naturellement sur T, donc $MT(V)$ aussi.

<u>Prop</u> : ① Soit $W \subset T$ un sous-$\mathbb{Q}$-ev. Alors W est une sous-$\mathbb{Q}$-HS ssi il est stable sous $MT(V)$.

② Un élément $t \in T$ est une classe de Hodge de type (p,p) (i.e. $t \in T_{\mathbb{C}}^{p,p}$) ssi la droite $\mathbb{Q}.t$ est stable sous $MT(V)$.

③ Un élément $t \in T$ est une classe de Hodge ssi t est fixe sous $MT(V)$.

<u>Preuve</u>

① ($\Leftarrow$) Si W est stable sous $MT(V)$, alors $W_{\mathbb{R}}$ est stable sous $MT(V)_{\mathbb{R}}$, donc sous l'action de $\mathbb{S}$, ce qui prouve que W est une sous-$\mathbb{Q}$-HS de T.

($\Rightarrow$) Réciproquement, supposons que W est une sous-$\mathbb{Q}$-HS de T, ou ce qui revient au même, que $W_{\mathbb{R}}$ est stable sous l'action de $\mathbb{S}$. Notons $H \subset \underline{GL}(V)$ le stabilisateur de W, défini fonctoriellement par

$$H = \{ g \in GL(V) \mid g.W = W \}.$$

H est un sous-$\mathbb{Q}$-groupe algébrique de $\underline{GL}(V)$. Comme $W_{\mathbb{R}}$ est stable sous l'action de $\mathbb{S}$, on voit, par définition de H, que le morphisme $\mathbb{S} \to \underline{GL}(V_{\mathbb{R}})$ se factorise par $H_{\mathbb{R}}$. On en déduit que $MT(V) \subset H$ par définition de $MT(V)$. Donc $MT(V)$ stabilise W.

② D'après ①, $\mathbb{Q}.t$ est stable sous $MT(V)$ ssi c'est une sous-$\mathbb{Q}$-HS. Si $t \in T \cap T_{\mathbb{C}}^{p,p}$ il est clair que $\mathbb{Q}.t$ est une sous-$\mathbb{Q}$-HS. Réciproquement, si $\mathbb{Q}.t$ est une sous-$\mathbb{Q}$-HS, on voit que t est une classe de Hodge de type (p,p) car une $\mathbb{Q}$-HS de dimension 1 a nécessairement une décomposition de Hodge réduite à un terme de type (p,p) pour un certain p. (Si $W_{\mathbb{C}}^{p,q} \neq 0$ pour $p \neq q$ alors $W_{\mathbb{C}}^{q,p} = \overline{W_{\mathbb{C}}^{p,q}}$ est non nul aussi et la dim° est ≥ 2.)

③. $\mathbb{S}$ agit sur $T_{\mathbb{C}}^{0,0}$ via le caractère trivial $z^0 \bar{z}^0$, donc il agit trivialement sur toute classe de Hodge $t \in T$. On en déduit que le morphisme $\mathbb{S} \to \underline{GL}(V_{\mathbb{R}})$ se factorise par $(G_t)_{\mathbb{R}}$ où $G_t \subset \underline{GL}(V)$ est le stabilisateur de t. Par définition de $MT(V)$, on a donc $MT(V) \subset G_t$, si bien que $MT(V)$ fixe toute classe de Hodge.

- Réciproquement, si $t \in T$ est fixe sous $MT(V)$, en particulier $\mathbb{Q}.t$ est stable donc d'après ② t est une classe de Hodge de type (p,p). OPS V pure de poids $m = 2p$ et si $m \neq 0$, $MT(V)$ contient $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}$ (cf + bas) donc t ne peut être invariant.

<u>Corollaire</u>: Le foncteur

$$\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}}(MT(V)) \longrightarrow (\mathbb{Q}\text{-HS})$$
$$(\rho : MT(V) \to GL(W)) \longmapsto (\rho \circ h : \mathbb{S} \to GL(W))$$

est pleinement fidèle. Son image essentielle est la sous-catégorie tannakienne de $(\mathbb{Q}\text{-HS})$ engendrée par V, i.e. la sous-catégorie $\langle V \rangle^{\otimes}$ dont les objets sont les sous-quotients d'objets T comme ci-dessus.
D'où $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}}(MT(V)) \xrightarrow{\sim} \langle V \rangle^{\otimes} \subset (\mathbb{Q}\text{-HS})$.

<u>Dém</u>: voir [Mo04] (4.5).

⑧ <u>Propriétés élémentaires</u>

<u>Prop 1</u>: $MT(V)$ et $Hg(V)$ sont connexes. (déjà vu).

<u>Prop 2</u>: Si V est polarisable, alors $MT(V)$ et $Hg(V)$ sont réductifs.

Dém. On a vu que $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}}(MT(V)) \simeq \langle V \rangle^{\otimes} \subset (\mathbb{Q}\text{-HS})^{pol}$, et que $(\mathbb{Q}\text{-HS})^{pol}$ est une catégorie tannakienne semi-simple. La catégorie $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}}(MT(V))$ est donc semi-simple, ce qui entraîne que $MT(V)$ est réductif. (Il est connexe.) On en déduit que $Hg(V)$ est réductif car c'est un sous-groupe normal de $MT(V)$ (cf. + bas).

Prop 3 : Soit V une $\mathbb{Q}$-HS pure de poids m.

a) $Hg(V)$ est un sous-groupe normal de $MT(V)$.

b) $Hg(V) \subset SL(V)$

c) Si $m = 0$, $Hg(V) = MT(V)$ (en particulier $MT(V) \subset SL(V)$).

d) Si $m \neq 0$, $MT(V)$ contient $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}} \cdot \mathrm{Id}$.
Il est alors engendré par $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}$ et $Hg(V)$.
De plus le morphisme induit $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}} \times Hg(V) \to MT(V)$ est surjectif à noyau fini.

Dém.

a) Notons $H \subset GL(V)$ le normalisateur de $Hg(V)$. (C'est un $\mathbb{Q}$-sous-groupe algébrique.) Comme U est le noyau de N, il est distingué dans $\mathbb{S}$ et on en déduit facilement que $h(\mathbb{S}) \subset H_{\mathbb{R}}$. Par définition de $MT(V)$, ceci implique $MT(V) \subset H$, cqfd.

b) Vu la définition de $Hg(V)$, il suffit de montrer que le morphisme $U \to \underline{GL}(V_{\mathbb{R}})$ se factorise par $\underline{SL}(V_{\mathbb{R}})$.

Il suffit de le vérifier pour les $\mathbb{C}$-points. Or un couple $(z, \tilde{z}) \in \mathbb{S}(\mathbb{C})$ agit sur $V_{\mathbb{C}}^{p,q}$ par $z^{-p}\tilde{z}^{-q}$, donc la matrice de $h(z,\tilde{z})$ dans une base convenable de $V_{\mathbb{C}}$ est

$$p \neq q \quad \begin{pmatrix} z^{-p}\tilde{z}^{-q}\,\mathrm{Id}_{V_{\mathbb{C}}^{p,q}} & & & \\ & z^{-q}\tilde{z}^{-p}\,\mathrm{Id}_{V_{\mathbb{C}}^{q,p}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & z^{-k}\tilde{z}^{-k}\,\mathrm{Id}_{V_{\mathbb{C}}^{k,k}} \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

et son déterminant est $(z\tilde{z})^{-m\frac{\dim V}{2}}$.

Si $z\tilde{z} = 1$ on a donc $h(z,\tilde{z}) \in SL(V_{\mathbb{C}})$.

c) Il suffit de vérifier que $h(\mathbb{S})$ et $h(\mathbb{U})$ ont les mêmes $\mathbb{C}$-points dans $\underline{GL}(V_{\mathbb{R}})$. Or si $m=0$ et si $(z,\tilde{z}) \in \mathbb{S}(\mathbb{C})$, $h(z,\tilde{z})$ agit sur $V_{\mathbb{C}}^{p,-p}$ par $z^{-p}\tilde{z}^{p}$ donc $h(z,\tilde{z}) = h(\lambda, \frac{1}{\lambda}) \in h(\mathbb{U})$ où $\lambda \in \mathbb{C}$ est choisi tel que $\lambda^2 = \frac{z}{\tilde{z}}$.
(rappel : $\mathbb{U}(\mathbb{C}) = \{(z,\tilde{z}) \in \mathbb{C}^{\times 2} \mid z\tilde{z} = 1\}$).

d) Si $z \in \mathbb{R}^{\times}$, alors $h(z) = z^{-m}\,\mathrm{Id}_V$, donc $h(\mathbb{S})$ contient l'image de
$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}} &\longrightarrow \underline{GL}(V_{\mathbb{R}}) \\ a &\longmapsto a^m\,\mathrm{Id} \end{aligned}$$
, qui est dense dans $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}\cdot\mathrm{Id}$ si $m \neq 0$. Donc dans ce cas, $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}\cdot\mathrm{Id} \subset MT(V)$. Le fait que $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}$ et $Hg(V)$ engendrent $MT(V)$ résulte du fait que $\mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}$ et $\mathbb{U}$ engendrent $\mathbb{S}$. On en déduit que le morphisme induit $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}} \times Hg(V) \longrightarrow MT(V)$ (bien déf. car $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}$ est dans le centre) est surjectif. On voit facilement que le noyau s'identifie à μ_n où $n = \dim V$.

Prop 4 : Si V_1 et V_2 sont des $\mathbb{Q}$-HS, alors $MT(V_1 \oplus V_2) \subset MT(V_1) \times MT(V_2)$ comme sous-groupes de $\underline{GL}(V_1 \oplus V_2)$, et les projections $pr_i : MT(V_1 \oplus V_2) \to MT(V_i)$ sont surjectives.

Dém conséquence immédiate des définitions.