Propriétés de finitude pour les morphismes non représentables.

Sylvain Brochard (LMV, bâtiment Fermat)
Université de Versailles – Saint-Quentin
45, avenue des États-Unis, 78035 Versailles Cedex – FRANCE
sylvain.brochard@math.uvsq.fr

Résumé

In this note we define some finiteness properties for morphisms of (not necessarily representable) functors and prove some elementary facts about them. In the first section we define and study quasi-compactedness and quasi-separatedness. In the second section we discuss finite presentation. The third section is devoted to the case of the Picard functors. In particular we prove that the notion of finite type morphism between two Picard functors defined in SGA6 (in terms of bounded families of classes of invertible sheaves) coincides with our notion of quasi-compact morphism.

Grothendieck a donné dans EGA IV (8.14.2) une caractérisation des schémas localement de présentation finie sur un schéma de base S fixé en termes du foncteur qu'ils représentent. Cette caractérisation est, évidemment, bien plus commode (tellement commode qu'elle a tendance à prendre la place de la définition), dès lors que l'on s'intéresse à un schéma X défini par son foncteur des points (ce foncteur étant le plus souvent donné par une certaine « propriété universelle » caractérisant le schéma X). On peut en effet dans ce cas montrer *a priori* que le foncteur X est localement de présentation finie sans même savoir s'il est représentable. L'objet de cette note est de définir, de manière analogue, des notions de morphismes quasi-compacts et de morphismes quasi-séparés de foncteurs. Elles sont abondamment utilisées dans [2] (c'est d'ailleurs pour les besoins de cet article que la présente note a été rédigée).

Nous étudions dans la première section la quasi-compacité et la quasi-séparation. Dans la deuxième section, nous démontrons les propriétés élémentaires des morphismes de présentation finie. La troisième partie explicite le lien entre les notions développées dans les deux premières, et la notion de morphisme de type fini entre deux foncteurs de Picard définie dans SGA6, exp. XIII.

Notations et conventions

Soit S un schéma. On s'intéresse aux foncteurs contravariants de la catégorie $(Sch/S)^{\mathrm{op}}$ opposée à celle des S-schémas dans la catégorie des ensembles, et aux morphismes entre ces foncteurs. Tous les schémas qui interviendront seront dans la catégorie $(Sch/S)^{\mathrm{op}}$. En particulier, lorsqu'on parlera d'un corps k, il sera implicitement muni d'un morphisme $\operatorname{Spec} k \longrightarrow S$.

1 Morphismes quasi-compacts et morphismes quasi-séparés

1.1 Sorites généraux

Définition 1.1.1 *On dit qu'un morphisme de foncteurs $F \longrightarrow G$ est surjectif si pour tout corps K et tout ξ de $G(K)$, il existe une extension L de K telle que ξ_L soit dans l'image de $F(L)$.*

Définition 1.1.2 *(i) Un préfaisceau F est dit quasi-compact s'il existe un S-schéma T quasi-compact et un morphisme surjectif $T \longrightarrow F$.*

(ii) Un morphisme de préfaisceaux $F \to G$ est dit quasi-compact si pour tout schéma quasi-compact T et tout morphisme $T \to G$, le préfaisceau $F_T = F \times_G T$ obtenu par changement de base est quasi-compact.

(iii) Un morphisme de préfaisceaux $F \to G$ est dit quasi-séparé si le morphisme diagonal $F \to F \times_G F$ est quasi-compact.

Proposition 1.1.3 *(i) Pour un espace algébrique F, ou pour un morphisme $F \to G$ représentable par des espaces algébriques, les notions ainsi définies coïncident avec les notions usuelles.*

(ii) Tout isomorphisme est quasi-compact.

(iii) Tout monomorphisme est quasi-séparé.

(iv) La classe des morphismes surjectifs (resp. quasi-compacts, quasi-séparés) est stable par changement de base et par composition.

(v) Si $F \to G$ est un morphisme surjectif et si F est quasi-compact, alors G est quasi-compact.

(vi) Si $F \to G$ est un morphisme quasi-compact et si G est quasi-compact, alors F l'est aussi.

(vii) Soit

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & G \arrow[dl, "g"] \\ & H & \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif de préfaisceaux. Si h est quasi-compact et g quasi-séparé, alors f est quasi-compact.

(viii) Dans un diagramme comme dans (vii), si h est quasi-séparé, alors f aussi.

(ix) Soit

$$\begin{tikzcd} F' \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & F \arrow[d, "f"] \\ G' \arrow[r, "\varphi"] & G \end{tikzcd}$$

un diagramme cartésien de préfaisceaux. On suppose que le morphisme de changement de base φ est surjectif et quasi-compact. Alors pour que f soit quasi-compact (resp. quasi-séparé), il faut et il suffit que f' le soit.

Démonstration Les propriétés (i) et (ii) sont évidentes, et (iii) est une conséquence formelle de (ii) puisque si $F \to G$ est un monomorphisme, alors le morphisme diagonal $F \to F \times_G F$ est un isomorphisme. La stabilité des différentes notions par changement de base et par composition est immédiate et laissée au lecteur. La propriété (v) résulte de la stabilité par composition des morphismes surjectifs.

Montrons (vi). Par définition il existe $T \to G$ surjectif avec T un schéma quasi-compact. Alors le morphisme $F \times_G T \to F$ obtenu par changement de base est surjectif, et $F \times_G T$ est quasi-compact puisque $F \to G$ est quasi-compact. D'après (v) F est quasi-compact.

(vii) Soient T un schéma quasi-compact et $T \to G$ un morphisme. Il s'agit de montrer que $F \times_G T$ est quasi-compact. Or on a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} F \times_G T \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & F \times_H T \arrow[d] \\ G \arrow[r] & G \times_H G \end{tikzcd}$$

dans lequel le morphisme du bas est quasi-compact puisque g est quasi-séparé. Donc le morphisme du haut est quasi-compact et il suffit, en vertu de (vi), de montrer que $F \times_H T$ est quasi-compact. C'est évident puisque h est quasi-compact.

(viii) On a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} F \times_G F \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & F \times_H F \arrow[d] \\ G \arrow[r] & G \times_H G. \end{tikzcd}$$

De plus le morphisme du bas est quasi-séparé car c'est un monomorphisme. Donc le morphisme $F \times_G F \longrightarrow F \times_H F$ est quasi-séparé. Maintenant la propriété (vii) appliquée au diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "\Delta_f"] \arrow[dr, "\Delta_h"'] & & F \times_G F \arrow[dl] \\ & F \times_H F & \end{tikzcd}$$

permet de conclure.

(ix) On suppose f' quasi-compact. Pour montrer que f est quasi-compact, on peut supposer que G est quasi-compact, et il faut montrer que F l'est aussi. Mais comme φ et f' sont quasi-compacts, et φ' est surjectif, cela résulte immédiatement de (vi) et (v). L'assertion sur la quasi-séparation se déduit de la précédente en considérant le diagramme

$$\begin{tikzcd} F' \arrow[r] \arrow[d, "\Delta'"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & F \arrow[d, "\Delta"] \\ F' \times_{G'} F' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & F \times_G F \arrow[d] \\ G' \arrow[r, "\varphi"'] & G \end{tikzcd}$$

dont les carrés sont cartésiens. $\square$

1.2 Lien avec l'ensemble sous-jacent à un foncteur

Définition 1.2.1 *(i) Soit F un foncteur. On peut lui associer un ensemble $|F|$ de la manière suivante. Un point de $|F|$ est défini par un élément ξ de $F(K)$ où K est un corps (sur S). Si s est un point de S et si K et K' sont deux extensions de $\kappa(s)$, on dit que des éléments $\xi \in F(K)$ et $\xi' \in F(K')$ définissent le même point de $|F|$ s'il existe une $\kappa(s)$-extension K'' commune à K et K' telle que $\xi_{K''}$ soit égal à $\xi'_{K''}$. L'ensemble $|F|$ sera appelé l'ensemble sous-jacent à F.*

(ii) En conservant les notations de (i), si X est un sous-ensemble de $|F|$, on peut lui associer un sous-foncteur de F, noté F_X,de la manière suivante. Pour tout S-schéma U et tout élément u de $F(U)$, on dit que u appartient à $F_X(U)$ si et seulement si pour tout morphisme $\operatorname{Spec} K \longrightarrow U$ *où K est un corps, le point de $|F|$ défini par l'élément u_K de $F(K)$ est dans X.*

(iii) Un sous-ensemble X de $|F|$ est dit quasi-compact si le foncteur F_X défini en (ii) est quasi-compact.

Les propriétés suivantes sont immédiates et laissées au lecteur.

Propriétés 1.2.2 *Soit $f : F \longrightarrow G$ un morphisme de foncteurs. Il induit naturellement une application $|f|$ de $|F|$ dans $|G|$. Alors :*

(i) f est surjectif si et seulement si l'application $|f|$ est surjective.

(ii) Si Y est un sous-ensemble de $|G|$ et si l'on pose $X = |f|^{-1}(Y)$, le sous-foncteur F_X de F s'identifie naturellement au produit fibré $F \times_G G_Y$.

(iii) Si X est un sous-ensemble de $|F|$ et si l'on note Y son image par $|f|$, le morphisme f se factorise de manière unique par le sous-foncteur G_Y de G :

$$F \longrightarrow G_Y \longrightarrow G.$$

(iv) Le morphisme f est quasi-compact si et seulement si pour tout sous-ensemble quasi-compact Y de $|G|$, le sous-ensemble $|f|^{-1}(Y)$ de $|F|$ est quasi-compact.

1.3 Une définition alternative ?

Proposition 1.3.1 *Soit F un S-schéma. Les propositions suivantes sont équivalentes.*

(i) F est quasi-compact.

(ii) Pour tout système inductif filtrant d'immersions ouvertes ($U_i \hookleftarrow U_j$) où les U_k sont des schémas quasi-compacts, le morphisme naturel (automatiquement injectif)

$$\varinjlim \mathrm{Hom}(F, U_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}(F, \varinjlim U_i)$$

est un isomorphisme.

Démonstration C'est un exercice facile laissé au lecteur. $\square$

On pourrait donc être tenté par la définition alternative suivante pour la quasi-compacité d'un préfaisceau. Cependant, l'auteur de ces lignes ignore si elle est équivalente à la définition 1.1.2 lorsque F n'est pas un schéma (même si c'est un espace algébrique), et ne voit *a priori* aucune raison pour qu'il en soit ainsi.

Définition 1.3.2 *(i) On dit qu'un foncteur F est faiblement quasi-compact s'il vérifie la propriété (ii) de 1.3.1.*

(ii) Un morphisme de foncteurs $F \to G$ est dit faiblement quasi-compact si pour tout foncteur faiblement quasi-compact G' et tout morphisme $G' \to G$, le préfaisceau $F_{G'} = F \times_G G'$ obtenu par changement de base est faiblement quasi-compact.

On en déduit aussi une notion de morphisme faiblement quasi-séparé. On peut alors vérifier (exercice laissé au lecteur) que ces notions satisfont encore aux propriétés (ii) à (ix) de 1.1.3 ci-dessus, et que pour les foncteurs comme pour les morphismes de foncteurs, « quasi-compact » au sens de 1.1.2 implique « faiblement quasi-compact ». (Le lecteur attentif aura remarqué que l'on a dû adapter un peu la définition des morphismes faiblement quasi-compacts – comparer avec 1.1.2 (ii), pour garantir la stabilité de cette classe de morphismes par composition.)

2 Présentation finie

Définition 2.1 (*cf.* EGA IV (8.14.2)) *(i) Un foncteur F est dit localement de présentation finie (sous-entendu, sur S) si pour tout système projectif filtrant $(Z_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de S-schémas, tel que les Z_λ soient des schémas affines, l'application*

$$\varinjlim F(Z_\lambda) \longrightarrow F(\varprojlim Z_\lambda)$$

est bijective.

(ii) Un morphisme de foncteurs $F \to G$ est dit localement de présentation finie si pour tout schéma U et tout morphisme $U \to G$, le foncteur $F_U = F \times_G U$ est localement de présentation finie sur U.

(iii) Un morphisme de foncteurs $F \to G$ est dit de présentation finie s'il est localement de présentation finie, quasi-compact et quasi-séparé.

Remarque 2.2 On vérifie facilement qu'un foncteur F est localement de présentation finie si et seulement si le morphisme $F \longrightarrow S$ l'est. Par ailleurs, si G est un foncteur, on définit la catégorie (Sch/G) des schémas sur G comme étant la catégorie des couples (U, g) où U est un S-schéma et g un morphisme de U vers G (*i.e.* un élément de $G(U)$). Si $\varphi : F \longrightarrow G$ est un morphisme de foncteurs sur (Sch/S), on définit un foncteur $h_{F/G}$ sur (Sch/G) par

$$h_{F/G}(U, g) = \{f \in F(U) \mid \varphi(f) = g\}.$$

On vérifie alors facilement que le morphisme φ est localement de présentation finie au sens ci-dessus si et seulement si le foncteur $h_{F/G}$ est localement de présentation finie (en un sens évident, analogue à (i)).

Proposition 2.3 *(i) Pour un espace algébrique F, ou pour un morphisme $F \longrightarrow G$ représentable par des espaces algébriques, les notions ainsi définies coïncident avec les notions usuelles.*

(ii) La classe des morphismes localement de présentation finie (resp. de présentation finie) est stable par changement de base et par composition.

(iii) Si $f : F \longrightarrow G$ est un morphisme localement de présentation finie, alors son morphisme diagonal Δ l'est aussi. Si f est de plus quasi-séparé, alors Δ est de présentation finie.

(iv) Soit

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & G \arrow[dl, "g"] \\ & H & \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif de préfaisceaux. Si g et h sont localement de présentation finie, alors f l'est aussi. Si de plus h est de présentation finie, et g quasi-séparé, alors f est de présentation finie.

Démonstration La propriété (i) est évidente.

La stabilité de la locale présentation finie par changement de base est immédiate. Pour la stabilité par composition, soient $\varphi : F \longrightarrow G$ et $\psi : G \longrightarrow H$ deux morphismes localement de présentation finie. Montrons que $\psi \circ \varphi$ l'est aussi. Vu la définition (ii), on peut clairement supposer $H = S$ et il faut montrer que le foncteur F est localement de présentation finie. Il faut donc montrer que pour tout système projectif filtrant comme dans la définition ci-dessus, l'application $\lim_{\longrightarrow} F(Z_\lambda) \longrightarrow F(Z)$ est bijective (où Z est la limite projective des Z_λ). Soit $f \in F(Z)$. On note $g = \varphi(f)$. Comme G est localement de présentation finie, g provient d'un $g_{\lambda_0} \in G(Z_{\lambda_0})$ pour un certain λ_0. Quitte à se restreindre au système projectif des Z_λ qui se factorisent par Z_{λ_0}, on peut supposer que $(Z_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est un système projectif de schémas sur G. Comme F est localement de présentation finie sur G on en déduit qu'il existe un λ tel que f provienne de $F(Z_\lambda)$, ce qui prouve déjà la surjectivité. L'injectivité n'est pas plus difficile.

Montrons (iii). Soit $(Z_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ un système projectif de schémas (affines) sur G, de limite projective Z. La surjectivité de l'application $\lim_{\longrightarrow} F(Z_\lambda) \longrightarrow F(Z)$ est une conséquence évidente de l'existence d'une rétraction pour Δ. L'injectivité résulte immédiatement du fait que f lui-même est localement de présentation finie.

(iv) Soient U un schéma et $U \longrightarrow G$ un morphisme. Il s'agit de montrer que $F \times_G U$ est localement de présentation finie. Or on a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} F \times_G U \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & F \times_H U \arrow[d] \\ G \arrow[r] & G \times_H G \end{tikzcd}$$

dans lequel le morphisme du bas est localement de présentation finie d'après (iii). Donc le morphisme du haut l'est aussi et il suffit de montrer que $F \times_H U$ est localement de présentation finie. C'est évident puisque h est localement de présentation finie. $\square$

3 Cas du foncteur de Picard

On rappelle (*cf.* [1] par exemple) que le foncteur de Picard relatif d'un schéma X sur S, noté $\mathrm{Pic}_{X/S}$, est par définition le faisceau *fppf* associé au préfaisceau $U \mapsto \mathrm{Pic}(X \times_S U)$. Afin de démontrer un certain nombre de théorèmes de finitude pour le foncteur de Picard d'un schéma, Kleiman a défini dans SGA6, exp. XIII, une notion de morphisme de type fini entre deux foncteurs de Picard (non nécessairement représentables) en termes de familles limitées de classes de faisceaux inversibles. Cette notion se révèle précieuse dès qu'un foncteur de Picard dont on ne sait pas s'il est représentable apparaît au cours d'un raisonnement : par exemple lorsque, souhaitant faire usage de techniques projectives, on prend une présentation de Chow $X' \twoheadrightarrow X$ d'un schéma X. Rien n'assure que $\mathrm{Pic}_{X'/S}$ est un schéma, même si l'on sait que $\mathrm{Pic}_{X/S}$ en est un. Nous rappelons ci-dessous les définitions. Puis nous montrons que la notion de morphisme de type fini développée par Kleiman coincide avec la notion de morphisme quasi-compact de foncteurs développée ci-dessus.

Définition 3.1 (SGA6, XIII, 1.12) *Soit $X \twoheadrightarrow S$ un morphisme de schémas. Soit Λ une famille de classes de faisceaux inversibles sur les fibres de X/S ; c'est-à-dire, pour tout point $s \in S$ et toute extension K de $\kappa(s)$, on se donne des faisceaux inversibles L_K sur X_K, et on dit qu'un L_K et un $L'_{K'}$ sont dans la même classe s'il existe une $\kappa(s)$-extension K'' commune à K et K' telle que $L_{K''}$ et $L'_{K''}$ soient isomorphes sur $X_{K''}$. Alors on dit que Λ est limitée s'il existe un schéma T de type fini sur S et un faisceau inversible $\mathscr{L}$ sur X_T tels que Λ soit contenue dans la famille des classes des faisceaux $L_{\kappa(t)}$ pour $t \in T$.*

Définition 3.2 (SGA6, XIII, 3.3) *Soient S un schéma et X, Y deux schémas sur S. Un morphisme $\mathrm{Pic}_{Y/S} \twoheadrightarrow \mathrm{Pic}_{X/S}$ est dit de type fini si toute famille limitée de classes de faisceaux inversibles sur les fibres de X/S a comme image inverse une famille limitée de classes de faisceaux inversibles sur les fibres de Y/S.*

Proposition 3.3 *Soient X et Y deux schémas propres sur un schéma S noethérien, et soit f un morphisme de $\mathrm{Pic}_{X/S}$ dans $\mathrm{Pic}_{Y/S}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
(i) f est de type fini (au sens de 3.2).
(ii) f est quasi-compact (au sens de 1.1.2).
(iii) f est de présentation finie (au sens de 2.1).

Démonstration L'équivalence entre (ii) et (iii) est évidente compte tenu des propositions 3.5 et 3.6 ci-dessous. Par ailleurs, il est clair que les familles de classes de faisceaux inversibles sur un foncteur de Picard $\mathrm{Pic}_{X/S}$ correspondent biunivoquement aux sous-ensembles de $|\mathrm{Pic}_{X/S}|$, et qu'une telle famille est limitée si et seulement si le sous-ensemble correspondant de $|\mathrm{Pic}_{X/S}|$ est quasi-compact au sens de 1.2.1 (iii). L'équivalence entre (i) et (ii) est donc une conséquence immédiate de 1.2.2 (iv). □

Remarque 3.4 On en déduit en particulier qu'un morphisme représentable est de type fini si et seulement s'il est de type fini au sens usuel.

Proposition 3.5 (SGA6, XIII, 3.1) *Soient S un schéma et X un S-schéma quasi-compact et quasi-séparé. Alors $\mathrm{Pic}_{X/S}$ est localement de présentation finie.*

Proposition 3.6 *Soit X un schéma propre sur S noethérien. Alors $\mathrm{Pic}_{X/S}$ est quasi-séparé.*

Démonstration Soit T l'union disjointe des composantes irréductibles de S. Le morphisme $T \twoheadrightarrow S$ est surjectif et quasi-compact, donc d'après 1.1.3 (ix) on peut supposer S irréductible. On peut même supposer S intègre. Par récurrence noethérienne, il suffit de montrer qu'il existe un ouvert U de S tel que $\mathrm{Pic}_{X/S} \times_S U$ soit quasi-séparé (utiliser 1.1.3 (ix) avec le morphisme de changement de base $U \amalg (S \setminus U) \twoheadrightarrow S$). C'est une conséquence immédiate du théorème 1.1 de SGA6, exp. XII. □

Corollaire 3.7 *Soient X et Y deux schémas propres sur un schéma S noethérien. Alors tout morphisme $f : \mathrm{Pic}_{X/S} \twoheadrightarrow \mathrm{Pic}_{Y/S}$ est quasi-séparé.*

Démonstration Il suffit d'appliquer 1.1.3 (viii). □

Références

[1] Siegfried Bosch, Werner Lütkebohmert et Michel Raynaud : *Néron models*, volume 21 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[2] Sylvain Brochard : Finiteness theorems for the picard functor of an algebraic stack (2008). Prépublication, version provisoire.