Théorie de la spécialisation du groupe fondamental

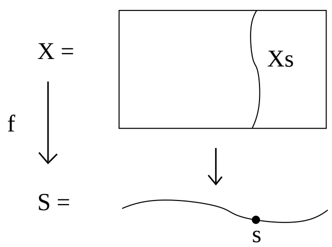
Sylvain Brochard
brochard@math.univ-montp2.fr

Résumé

Ces notes sont celles d'un exposé fait à Bordeaux dans le cadre d'un groupe de travail de l'ANR « Arithmétique des variétés en famille » sur le groupe fondamental algébrique. Nous donnons ici la seconde suite exacte d'homotopie du groupe fondamental, puis nous construisons le morphisme de spécialisation. Enfin, nous démontrons que pour un schéma propre et lisse, le morphisme de spécialisation induit un isomorphisme au niveau des complétés premiers à p (où p est la caractéristique du corps résiduel du point en lequel on spécialise).

1 Introduction

Le but de la théorie de la spécialisation est de comprendre comment le groupe fondamental varie dans une famille de variétés. Autrement dit on considère un morphisme $f : X \to S$ et on souhaite étudier la variation du groupe fondamental $\pi_1(X_s)$ en fonction de $s \in S$ (où X_s désigne la fibre au-dessus de s).



On considère deux points $s_0, s_1 \in S$ avec $s_0 \in \overline{\{s_1\}}$. Le résultat principal est l'existence d'un morphisme dit de « spécialisation »

$$sp : \pi_1(X_{s_1}) \longrightarrow \pi_1(X_{s_0})$$

qui est surjectif sous de bonnes hypothèses (« semi-continuité »). Puis on va étudier Ker sp.

• *Application (*cf. *SGA1, [1] X thm. 2.6 et cor. 3.10)*
On a vu dans un précédent exposé comment calculer le groupe fondamental d'une courbe propre et lisse sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. On peut en déduire le groupe fondamental (du moins la partie première à p) d'une courbre propre et lisse sur un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. On procède de la manière suivante. Soit C_0 une telle courbe sur

un tel corps k. On note $W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt de k. On note s_0 le point fermé de $S = \operatorname{Spec} W(k)$ et s_1 son point générique. On montre qu'il existe une courbe C sur S qui prolonge C_0, *i.e.* telle que $C \times_S \operatorname{Spec} k(s_0) \simeq C_0$. On en déduit un morphisme (surjectif) de spécialisation $sp : \pi_1(C_1) \to \pi_1(C_0)$. Le point s_1 étant de caractéristique résiduelle nulle, on sait à quoi ressemble $\pi_1(C_1)$. Il est en particulier topologiquement de type fini. On en déduit que $\pi_1(C_0)$ l'est aussi. De plus, le théorème 4.1 ci-dessous montre que les parties premières à p des groupes $\pi_1(C_1)$ et $\pi_1(C_0)$ sont isomorphes.

Ce texte est organisé de la manière suivante. Le morphisme de spécialisation est construit au paragraphe 3. L'ingrédient essentiel de cette construction est la seconde suite exacte d'homotopie, que l'on obtient au paragraphe 2. Le paragraphe 4, plus technique, est consacré à l'étude du noyau du morphisme de spécialisation.

2 La seconde suite exacte d'homotopie

2.1 Énoncé

Théorème 2.1.1 *Soient A un anneau local complet noethérien, S son spectre, et s_0 le point fermé de S. Soit $f : X \to S$ propre, avec X_{s_0} géométriquement connexe. Soit $\overline{x_0}$ un point géométrique de $X_{\overline{s_0}}$.*

$$\begin{tikzcd} \overline{x_0} \in X_{\overline{s_0}} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d] \\ \overline{s_0} \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

Alors la suite canonique

$$1 \longrightarrow \pi_1(X_{\overline{s_0}}, \overline{x_0}) \longrightarrow \pi_1(X, \overline{x_0}) \longrightarrow \pi_1(S, \overline{s_0}) \longrightarrow 1$$

est exacte.

Remarque 2.1.2 Si A est un corps, le résultat est connu sous le nom de « suite exacte fondamentale » et valable même sans hypothèse de propreté. Il a été démontré dans un exposé précédent (*cf.* exposé IV de Niels Borne ou SGA 1 [1], IX, 6.1 pour les absents). Pour la commodité du lecteur nous en donnons une démonstration au paragraphe 2.4. Le cas général s'en déduit en utilisant des théorèmes (difficiles) de géométrie formelle que nous rappelons ci-dessous (sans preuve...).

Remarque 2.1.3 Ce résultat rappelle aussi la *première* suite exacte d'homotopie (*cf.* exposé V de Cédric Pépin, ou SGA1 [1], X, thm. 1.4 pour les absents). On notera les différences essentielles suivantes :

- on suppose ici que S est le spectre d'un anneau local complet noethérien dont s_0 est le point fermé (pour la première suite exacte d'homotopie S était seulement supposé localement noethérien) ;
- en revanche on ne fait pas d'hypothèse de platitude, ni d'hypothèse de séparabilité sur les fibres ;
- enfin on obtient l'injectivité du morphisme $\pi_1(X_{\overline{s_0}}, \overline{x_0}) \to \pi_1(X, \overline{x_0})$.

Le reste de cette section est consacré à la preuve du théorème 2.1.1. Nous commençons par quelques préliminaires de géométrie formelle.

2.2 Un peu de géométrie formelle

Nous énonçons ci-dessous une version simplifiée des théorèmes de comparaison et d'existence en géométrie formelle. Pour plus de détails, on pourra consulter EGA 3 ou l'exposé d'Illusie dans [4] (plus facile à lire). Soit $S = \operatorname{Spec} R$ un schéma[1] noethérien. Soit $f : X \to S$ un morphisme propre et soit $I \subset R$ un idéal. On note $R_n = R/I^{n+1}$, $S_n = \operatorname{Spec} R_n$ et $X_n = X \times_S S_n$.

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_0"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X_1 \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_1"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \dots X_n \dots \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_n"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \\
S_0 \arrow[r, hook] & S_1 \arrow[r, hook] & \dots S_n \dots \arrow[r, hook] & S
\end{tikzcd}$$

On note i_n l'immersion fermée $i_n : X_n \hookrightarrow X$ et $\mathfrak{Coh}\,(X)$ la catégorie des modules cohérents sur X. Pour $\mathcal{F}$ module cohérent sur X, on a un morphisme canonique $\mathcal{F} \to i_{n*}i_n^*\mathcal{F}$ (l'adjoint de l'identité de $i_n^*\mathcal{F}$). On en déduit un morphisme au niveau des sections globales

$$H^0(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^0(X, i_{n*}i_n^*\mathcal{F}) = H^0(X_n, i_n^*\mathcal{F}).$$

Comme les familles $(H^q(X, .))_{q\geq 0}$ et $(H^q(X_n, i_n^*(.)))_{q\geq 0}$ sont deux δ-foncteurs de $\mathfrak{Coh}\,(X)$ dans $R_n - \mathrm{Mod}$, le premier des deux étant universel, le morphisme au niveau des H^0 induit par propriété universelle un morphisme de δ-foncteurs, d'où pour tout q un morphisme de $H^q(X, \mathcal{F})$ dans $H^q(X_n, i_n^*\mathcal{F})$. En passant à la limite projective on en déduit un morphisme de $H^q(X, \mathcal{F})$ dans $\varprojlim H^q(X_n, i_n^*\mathcal{F})$. On note $\hat{R}$ le complété de R relativement à I.

Théorème 2.2.1 (comparaison) *Pour tout q et pour tout $\mathcal{F} \in \mathfrak{Coh}\,(X)$ le morphisme canonique*

$$H^q(X, \mathcal{F}) \otimes_R \hat{R} \longrightarrow \varprojlim H^q(X_n, i_n^*\mathcal{F})$$

est un isomorphisme.

Théorème 2.2.2 (existence) *On suppose de plus R complet pour la topologie I-adique (*i.e. *$R = \hat{R}$). Alors le foncteur naturel*

$$\mathfrak{Coh}\,(X) \longrightarrow \varprojlim \mathfrak{Coh}\,(X_n) = \mathfrak{Coh}\,(\hat{X})$$

est une équivalence de catégories, où $\mathfrak{Coh}\,(\hat{X})$ est la catégorie des systèmes projectifs $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ de $\mathcal{O}_{X_n}$-modules cohérents, i.e. *$\mathcal{F}_n \in \mathfrak{Coh}\,(X_n)$ avec des isomorphismes $\mathcal{F}_{n+1} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{n+1}}} \mathcal{O}_{X_n} \simeq \mathcal{F}_n$.*

Remarque 2.2.3 On vérifie facilement grâce à cette équivalence que $\mathcal{F}$ est localement libre (resp. localement libre de rang n) si et seulement si tous les $i_n^*\mathcal{F}$ le sont. De même $\mathcal{F}$ est une $\mathcal{O}_X$-algèbre si et seulement si tous les $i_n^*\mathcal{F}$ sont munis d'une structure de $\mathcal{O}_{X_n}$-algèbre (ces structures étant compatibles).

1. Il est parfaitement superflu de supposer S affine. Nous ne faisons cette hypothèse que pour présenter un énoncé le plus simple possible.

2.3 Conséquence pour le groupe fondamental

Corollaire 2.3.1 *Soit A un anneau local noethérien complet, $S = \operatorname{Spec} A$, s_0 le point fermé, X propre sur S, X_{s_0} la fibre spéciale. Alors le foncteur*

$$Rev(X) \longrightarrow Rev(X_{s_0})$$

est une équivalence de catégories. En particulier pour $\overline{x_0} \in X_{s_0}$, le morphisme canonique

$$\pi_1(X_{s_0}, \overline{x_0}) \longrightarrow \pi_1(X, \overline{x_0})$$

est un isomorphisme.

Démonstration.

- *Pleine fidélité*

On se donne deux revêtements finis étales $p : Y \to X$ et $p' : Y' \to X$. On veut montrer que

$$\operatorname{Hom}_X(Y, Y') \longrightarrow \operatorname{Hom}_{X_{s_0}}(Y_0, Y'_0)$$

est un isomorphisme. Or

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Hom}_X(Y, Y') & \simeq & \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(p'_*\mathcal{O}_{Y'}, p_*\mathcal{O}_Y) \\ & \simeq & \varprojlim \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{X_n}}(i_n^* p'_*\mathcal{O}_{Y'}, i_n^* p_*\mathcal{O}_Y) \\ & \simeq & \varprojlim \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{X_n}}(p'_{n*}\mathcal{O}_{Y'_n}, p_{n*}\mathcal{O}_{Y_n}) \\ & \simeq & \varprojlim \operatorname{Hom}_{X_n}(Y_n, Y'_n) \\ & \simeq & \varprojlim \operatorname{Hom}_{X_0}(Y_0, Y'_0) \\ & \simeq & \operatorname{Hom}_{X_0}(Y_0, Y'_0) \end{array}$$

La première et la quatrième égalité résultent du fait que les revêtements étales sont affines ($Y = \operatorname{Spec}(p_*\mathcal{O}_Y)$ et $Y' = \operatorname{Spec}(p'_*\mathcal{O}_{Y'})$), la deuxième résulte du corollaire 2.2.2, la troisième est immédiate (ici aussi, car p et p' sont affines), et la cinquième est une conséquence de la remarque 2.3.2 ci-dessous.

- *Essentielle surjectivité*

Soit $p_0 : Y_0 \to X_0$ un revêtement fini étale. D'après la remarque 2.3.2 ci-dessous, il existe pour tout n un revêtement fini étale $Y_n \to X_n$ qui induit $Y_0 \to X_0$. D'après le théorème d'existence, il existe une algèbre cohérente $\mathcal{F}$ sur X qui induit le système projectif $(p_{n*}\mathcal{O}_{Y_n})_{n \geq 0}$. On pose $Y = \operatorname{Spec} \mathcal{F}$. Il faut encore montrer que $p : Y \to X$ est fini et étale. Il est fini et plat car $\mathcal{F}$ est localement libre de rang fini. Soit $U \subset Y$ l'ensemble des points de Y où p est étale. D'après EGA IV [5] 17.8.3, p est net en tout point de Y_0. Donc U contient Y_0. Le fermé $p(Y \setminus U)$ est donc nécessairement vide, puisqu'il ne contient pas s_0, donc $U = Y$ et p est étale. □

Remarque 2.3.2 Si $i : X \to \widetilde{X}$ est une immersion fermée surjective (c'est-à-dire définie par un idéal nilpotent, on suppose d'ailleurs pour cela X et $\widetilde{X}$ noethériens), alors i induit une équivalence de catégories

$$\operatorname{Rev}(\widetilde{X}) \longrightarrow \operatorname{Rev}(X).$$

C'est essentiellement une conséquence de la propriété de relèvement infinitésimal des morphismes étales.

2.4 Preuve de 2.1.1, cas d'un corps de base

Théorème 2.4.1 *Soient S le spectre d'un corps k, $\overline{k}$ une clôture algébrique de k, X un S-schéma, $\overline{X} = X \otimes_k \overline{k}$, $\overline{x}$ un point géométrique de $\overline{X}$ et $\overline{s}$ son image dans S. On suppose que X est quasi-compact, quasi-séparé et géométriquement connexe. Alors la suite canonique*

$$1 \longrightarrow \pi_1(\overline{X}, \overline{x}) \longrightarrow \pi_1(X, \overline{x}) \longrightarrow \pi_1(S, \overline{s}) \longrightarrow 1$$

est exacte, et $\pi_1(S, \overline{s}) \simeq \pi_1(k, \overline{k}) = \mathrm{Gal}\,(\overline{k}/k)$.

Démonstration.

• *On peut supposer k parfait.*

Notons $G = \mathrm{Gal}\,(\overline{k}/k)$ et $k^i = (\overline{k})^G$ la clôture inséparable de k. Le corps k^i est parfait. De plus on a clairement un isomorphisme $\mathrm{Gal}\,(\overline{k}/k^i) \simeq \mathrm{Gal}\,(\overline{k}/k)$. Enfin, comme $\mathrm{Spec}\,k^i \to \mathrm{Spec}\,k$ est radiciel, le morphisme canonique de $\pi_1(X^i, \overline{x})$ vers $\pi_1(X, \overline{x})$ est un isomorphisme grâce à un résultat de descente que nous rappelons plus bas (2.4.3). Quitte à remplacer k par k^i on peut donc supposer k parfait.

• *Cas d'une extension galoisienne finie*

Soit k' une extension finie galoisienne de k. Notons $X' = X \otimes_k k'$. Il résulte des sorites généraux sur les catégories galoisiennes (voir SGA 1 [1] V 6.13) que l'on a une suite exacte :

$$1 \longrightarrow \pi_1(X', \overline{x}) \longrightarrow \pi_1(X, \overline{x}) \longrightarrow \mathrm{Aut}_X^{op}(X') \longrightarrow 1$$

Comme le foncteur de changement de base par $X \to \mathrm{Spec}\,k$ de la catégorie des revêtements étales de $\mathrm{Spec}\,k$ dans la catégorie des revêtements étales de X est pleinement fidèle, on voit que le groupe de droite s'identifie au groupe $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Spec}\,k}^{op}(\mathrm{Spec}\,k')$, c'est-à-dire au groupe de Galois $\mathrm{Gal}\,(k'/k)$.

• *Conclusion*

Comme tous les groupes de cette suite sont profinis (pour tout k'), la suite obtenue en prenant la limite projective de ces suites exactes sur l'ensemble filtrant des extensions finies galoisiennes de k est encore exacte (exercice laissé au lecteur). Or la limite projective des groupes de Galois $\mathrm{Gal}\,(k'/k)$ est simplement le groupe $\mathrm{Gal}\,(\overline{k}/k)$. D'autre part, des arguments de « passage à la limite » montrent que la limite projective des groupes $\pi_1(X', \overline{x})$ s'identifie au groupe $\pi_1(\overline{X}, \overline{x})$ (un revêtement étale de $\overline{X}$ provient d'un revêtement étale d'un X', de manière essentiellement unique). Ceci achève la démonstration. □

Rappelons maintenant le résultat de descente utilisés au cours de la preuve.

Théorème 2.4.2 (descente par morphismes fpqc) *Soit $g : S' \to S$ un morphisme fidèlement plat et quasi-compact. Alors g est un morphisme de descente effective pour la catégorie fibrée des schémas étales, séparés et de type fini sur d'autres*[2].

Démonstration. SGA 1 [1] IX 4.1. □

2. L'énoncé est vrai aussi, et d'ailleurs plus facile, pour la catégorie fibrée des schémas étales et finis sur d'autres, c'est-à-dire pour la catégorie fibrée des revêtements étales. Il en va de même du corollaire 2.4.3.

Corollaire 2.4.3 (SGA 1 [1] IX 4.11) *Soit $g : S' \to S$ un morphisme fidèlement plat, quasi-compact et radiciel. Alors g induit une équivalence*[3] *de la catégorie des schémas étales, séparés et de type fini sur S vers la catégorie des schémas étales, séparés et de type fini sur S'.*

Démonstration. D'après le théorème 2.4.2, on sait déjà que le foncteur g^* entre les catégories indiquées est pleinement fidèle. De plus pour montrer qu'il est essentiellement surjectif, il suffit de montrer que tout schéma étale, séparé et de type fini sur S' est muni d'une donnée de descente relativement à g. Or, comme g est fidèlement plat et radiciel, c'est universellement une bijection et en particulier les projections $S' \times_S S' \to S'$ et $S' \times_S S' \times_S S' \to S'$ sont bijectives. Il en résulte que les morphismes diagonaux de S' dans $S' \times_S S'$ et dans $S' \times_S S' \times_S S'$ sont des immersions surjectives, donc induisent par 2.3.2 les équivalences de catégories que l'on pense. Il en résulte immédiatement que tout schéma étale, séparé et de type fini sur S' est muni d'une donnée de descente et d'une seule relativement à g. $\square$

2.5 Preuve de 2.1.1, cas général

Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec}\Omega \arrow[r, "\overline{x_0}"] & X_{\overline{s_0}} \arrow[r] \arrow[d] & X_{s_0} \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
& \operatorname{Spec}\overline{\kappa(s_0)} \arrow[r, "\overline{s_0}"] & \operatorname{Spec}\kappa(s_0) \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

induit

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \pi_1(X_{\overline{s_0}}, \overline{x_0}) \arrow[r] & \pi_1(X_{s_0}, \overline{x_0}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \pi_1(\operatorname{Spec}\kappa(s_0), \overline{x_0}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & 1 \\
& & \pi_1(X, \overline{x_0}) \arrow[r] & \pi_1(S, \overline{x_0}) &
\end{tikzcd}$$

où la première ligne est exacte d'après le cas d'un corps, et les flèches verticales sont des isomorphismes d'après le corollaire 2.3.1. Comme $\pi_1(S, \overline{x_0}) \simeq \pi_1(S, \overline{s_0})$ (car le groupe fondamental ne dépend pas du choix du foncteur fibre), on en déduit le résultat.

3 Construction du morphisme de spécialisation

Théorème 3.1 (semi-continuité) *Soit $f : X \to S$ un morphisme propre à fibres géométriquement connexes, avec S localement noethérien. Soient s_0, s_1 des points de S avec $s_0 \in \overline{\{s_1\}}$. Soient $\overline{x_0} \in X_{\overline{s_0}}$ et $\overline{x_1} \in X_{\overline{s_1}}$ des points géométriques des fibres géométriques.*

(i) Alors il existe un morphisme :

$$sp : \pi_1(X_{\overline{s_1}}, \overline{x_1}) \longrightarrow \pi_1(X_{\overline{s_0}}, \overline{x_0}).$$

3. Je crois qu'il y a une faute de frappe dans SGA 1. Dans l'énoncé IX 4.11, il faut lire « La conclusion 4.10 subsiste » au lieu de « La conclusion 4.9 subsiste ». En particulier g induit vraiment une équivalence et n'est pas seulement un morphisme de descente effective.

(ii) Le morphisme sp est défini de manière unique à un automorphisme de $\pi_1(X_{\overline{s_0}}, \overline{x_0})$ près. Lorsque S est le spectre d'un anneau local noethérien complet, l'automorphisme en question est la restriction à $\pi_1(X_{\overline{s_0}}, \overline{x_0})$ (sous-groupe distingué de $\pi_1(X, \overline{x_0})$ vu la seconde suite exacte d'homotopie) d'un automorphisme intérieur de $\pi_1(X, \overline{x_0})$.

*(iii) Si f est séparable (*i.e.* plat et à fibres géométriquement réduites) alors sp est surjectif.*

Démonstration.

• *Cas où S est le spectre d'un anneau local noethérien complet*

Soit $U \subset X$ la composante connexe de $\overline{x_0}$. Alors U contient la fibre X_{s_0} (qui est connexe par hypothèse) donc $f(X \setminus U)$ ne contient pas s_0. Comme c'est un fermé (car f est propre), il est nécessairement vide et $X = U$, si bien que X est connexe. Considérons maintenant un chemin étale c de $\overline{x_1}$ à $\overline{x_0}$. Il induit un chemin de $\overline{s_1}$ à $\overline{s_0}$. Alors dans le diagramme à traits pleins suivant, le carré de droite commute (les isomorphismes verticaux correspondent aux chemins choisis).

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \pi_1(X_{\overline{s_0}}, \overline{x_0}) \arrow[r] & \pi_1(X, \overline{x_0}) \arrow[r] & \pi_1(S, \overline{s_0}) \arrow[r] & 1 \\
& \pi_1(X_{\overline{s_1}}, \overline{x_1}) \arrow[r] \arrow[u, dotted, "sp"] & \pi_1(X, \overline{x_1}) \arrow[r] \arrow[u, "\wr"'] & \pi_1(S, \overline{s_1}) \arrow[u, "\wr"'] &
\end{tikzcd}$$

La première ligne est exacte (c'est la seconde suite exacte d'homotopie). Par ailleurs la composée des deux flèches horizontales du bas est nulle. Par propriété universelle du noyau on en déduit un morphisme sp faisant commuter le diagramme. Le morphisme sp dépend du chemin c choisi. Cependant si on choisit un autre chemin c, le morphisme $\pi_1(X_{\overline{s_1}}, \overline{x_1}) \to \pi_1(X, \overline{x_0})$ est modifié par un automorphisme intérieur de $\pi_1(X, \overline{x_0})$, donc sp aussi. Enfin si f est de plus séparable, la ligne du bas est exacte (première suite exacte d'homotopie) et on en déduit facilement que sp est surjectif.

• *Cas général*

On pose $S' = \operatorname{Spec} \widehat{\mathcal{O}_{S,s_0}}$. On note encore s_0 le point fermé de S' (il a le même corps résiduel que le point fermé s_0 de S). Par ailleurs on peut trouver $s'_1 \in S'$ qui relève s_1, et tel que $s_0 \in \overline{\{s'_1\}}$ (dans S'). Il existe aussi un point $\overline{x'_1}$ dans la fibre géométrique $X_{\overline{s'_1}}$ qui relève $\overline{x_1}$.

$$\begin{tikzcd}
& \overline{x_1} \in & & X_{\overline{s_1}} \arrow[rr] \arrow[dd] & & X \arrow[dd] & X_{\overline{s_0}} \arrow[l] \arrow[dll, bend left] \arrow[dd] \\
\overline{x'_1} \in \arrow[ur, mapsto] & & X_{\overline{s'_1}} \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & X' \arrow[ur] \arrow[dd] & & \\
& & & \overline{s_1} \arrow[rr] & & S & \overline{s_0} \arrow[l] \arrow[dll, bend left] \\
& & \overline{s'_1} \arrow[ur] \arrow[rr] & & S' \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Le morphisme $\varphi : \pi_1(X_{\overline{s'_1}}, \overline{x'_1}) \to \pi_1(X_{\overline{s_1}}, \overline{x_1})$ est un isomorphisme par invariance du groupe fondamental par extension algébriquement close ([1], X, 1.8). D'après le premier cas, on a un morphisme $sp' : \pi_1(X_{\overline{s'_1}}, \overline{x'_1}) \to \pi_1(X_{\overline{s_0}}, \overline{x_0})$. On pose $sp = sp' \circ \varphi^{-1}$. Les assertions (ii) et (iii) se déduisent immédiatement de leurs analogues pour sp'. $\square$

4 Étude du noyau

Théorème 4.1 (SGA 1, [1] X 3.8) *Soit S un schéma localement noethérien et soit $X \to S$ un morphisme propre, lisse et à fibres géométriquement connexes. Soient $s_0, s_1 \in S$ tels que $s_0 \in \overline{\{s_1\}}$, et $sp : \pi_1(X_{\overline{s_1}}) \to \pi_1(X_{\overline{s_0}})$ un morphisme de spécialisation construit ci-dessus. Alors pour tout groupe fini G d'ordre premier à $p = car(\kappa(s_0))$ et pour tout morphisme continu $\varphi : \pi_1(X_{\overline{s_1}}, \overline{x_1}) \to G$ de groupes topologiques, il existe un morphisme $\overline{\varphi} : \pi_1(X_{\overline{s_0}}, \overline{x_0}) \to G$ (automatiquement unique) tel que $\varphi = \overline{\varphi} \circ sp$.*

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X_{\overline{s_1}}, \overline{x_1}) \arrow[r, two heads, "sp"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \pi_1(X_{\overline{s_0}}, \overline{x_0}) \arrow[d, dotted, "\exists !\ \overline{\varphi}"] \\
& G
\end{tikzcd}$$

Corollaire 4.2 *Sous les mêmes hypothèses, le morphisme sp induit un isomorphisme entre les complétés profinis premiers à p (définis ci-dessous en 4.3) :*

$$sp' : \pi_1^{(p')}(X_{\overline{s_1}}) \longrightarrow \pi_1^{(p')}(X_{\overline{s_0}}).$$

Définition 4.3 *Soit G un groupe profini et p un nombre premier. On note $(G_i)_{i \in I}$ l'ensemble des quotients finis de G. Le groupe G s'identifie alors à la limite projective des G_i. On note $I^{(p')}$ le sous-ensemble de I formé des indices i tels que l'ordre de G_i soit premier à p. On pose alors*

$$G^{(p')} = \varprojlim_{i \in I^{(p')}} G_i \,.$$

Démonstration du théorème 4.1

• *On peut supposer que S est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet, de corps résiduel séparablement clos.*

D'après le lemme 4.3.1 ci-dessous, il existe un anneau de valuation discrète A complet et à corps résiduel séparablement clos, ainsi qu'un morphisme $\operatorname{Spec} A \to S$ qui envoie le point fermé s'_0 (resp. le point générique s'_1) de $\operatorname{Spec} A$ sur s_0 (resp. sur s_1). On fixe des relèvements $\overline{x'_0} \in X_{\overline{s'_0}}$ et $\overline{x'_1} \in X_{\overline{s'_1}}$ de $\overline{x_0}$ et $\overline{x_1}$. Alors, à des isomorphismes $\pi_1(X_{\overline{s'_0}}, \overline{x'_0}) \simeq \pi_1(X_{\overline{s_0}}, \overline{x_0})$ et $\pi_1(X_{\overline{s'_1}}, \overline{x'_1}) \simeq \pi_1(X_{\overline{s_1}}, \overline{x_1})$ près, le morphisme de spécialisation sp correspond au morphisme de spécialisation $sp' : \pi_1(X_{\overline{s'_1}}, \overline{x'_1}) \to \pi_1(X_{\overline{s'_0}}, \overline{x'_0})$. Donc il suffit de montrer l'assertion pour sp'.

• *Il suffit de montrer la même propriété universelle pour le morphisme naturel $\pi_1(X_{s_1^{sép}}, \overline{x_1}) \to \pi_1(X, \overline{x_1})$.*

En effet par construction du morphisme de spécialisation on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X_{\overline{s_0}}, \overline{x_0}) \arrow[r] & \pi_1(X, \overline{x_0}) \\
\pi_1(X_{\overline{s_1}}, \overline{x_1}) \arrow[r] \arrow[u, dotted, "sp"] & \pi_1(X, \overline{x_1}) \arrow[u, "\wr"']
\end{tikzcd}$$

où l'isomorphisme vertical de droite correspond au choix d'un chemin étale dans X. Il suffit donc de montrer la propriété universelle pour la flèche du bas. Or elle se factorise en

$$\pi_1(X_{\overline{s_1}}, \overline{x_1}) \xrightarrow{\alpha} \pi_1(X_{s_1^{\text{sép}}}, \overline{x_1}) \longrightarrow \pi_1(X, \overline{x_1})$$

et α est un isomorphisme par 2.4.3.

- *Traduction* via *le dictionnaire galoisien.*

On se donne un morphisme continu φ de $\pi_1(X_{s_1^{\text{sép}}})$ dans un groupe fini G d'ordre premier à p. On veut montrer qu'il se factorise par $\pi_1(X, \overline{x_1})$. Quitte à remplacer G par l'image de φ, on peut supposer φ surjectif. Il faut alors montrer ceci : soit $Y_{s_1^{\text{sép}}} \to X_{s_1^{\text{sép}}}$ un revêtement étale galoisien de groupe G (avec $Y_{s_1^{\text{sép}}}$ connexe). Il faut montrer que ce revêtement provient par changement de base d'un revêtement étale $Y \to X$ (exercice laissé au lecteur).

- *On peut supposer que $Y_{s_1^{sép}} \to X_{s_1^{sép}}$ provient d'un revêtement étale $Y_{s_1} \to X_{s_1}$ de X_{s_1}.*

Prenons quelques notations. On a $S = \operatorname{Spec} A$, on pose $K = \operatorname{Frac}(A)$ (donc $s_1 = \operatorname{Spec} K$). Comme $K^{\text{sép}}$ est limite inductive de ses sous-extensions finies galoisiennes, on sait par des arguments de passage à la limite (*cf.* exposé de Niels Borne) que $Y_{s_1^{\text{sép}}}$ provient d'un revêtement Y_L de $X_L = X \times_S \operatorname{Spec} L$ pour une certaine extension finie galoisienne L de K. On note A^L la fermeture intégrale de A dans L, $\widetilde{S}^L = \operatorname{Spec} A^L$ et $\widetilde{X}^L = X \times_S \widetilde{S}^L$. Les notations sont résumées dans le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
X_{s_1^{\text{sép}}} \arrow[rr] \arrow[dd] & & X_L \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dr] & & X_{s_1} \arrow[dr] \arrow[dd] & & \\
& & & \widetilde{X}^L \arrow[rr] \arrow[dd] & & X \arrow[dd] & \\
\operatorname{Spec} k(s_1)^{\text{sép}} \arrow[rr] & & \operatorname{Spec} L \arrow[rr] \arrow[dr] & & s_1 \arrow[dr] & & X_{s_0} \arrow[ul] \arrow[ulll, bend left] \arrow[dd] \\
& & & \widetilde{S}^L \arrow[rr] & & S & \\
& & & & & & s_0 \arrow[ul] \arrow[ulll, bend left]
\end{tikzcd}$$

Remarquons que A^L est encore un anneau de valuation discrète complet, et qu'il a même corps résiduel que A. De plus L s'identifie au produit tensoriel $A^L \otimes_A K$ si bien que tous les carrés sont cartésiens dans le diagramme ci-dessus. Par ailleurs, par 2.3.1, les morphismes $\pi_1(X_{s_0}) \to \pi_1(X)$ et $\pi_1(X_{s_0}) \to \pi_1(\widetilde{X}^L)$ sont des isomorphismes. On en déduit que le morphisme naturel $\pi_1(\widetilde{X}^L) \to \pi_1(X)$ est un isomorphisme. En particulier tout revêtement étale de $\widetilde{X}^L$ provient d'un revêtement étale de X. Alors, quitte à remplacer K par L, S par $\widetilde{S}^L$, et X par $\widetilde{X}^L$ on peut supposer qu'il existe un revêtement étale $Y_{s_1} \to X_{s_1}$ qui induit $Y_{s_1^{\text{sép}}} \to X_{s_1^{\text{sép}}}$.

- *Construction d'un candidat $\widetilde{Y}^L \to \widetilde{X}^L$.*

Rappelons que l'on cherche un revêtement étale $Y \to X$ qui induit le revêtement $Y_{s_1^{\text{sép}}} \to X_{s_1^{\text{sép}}}$ que l'on s'est fixé. L'idée est de prendre pour Y le normalisé de

X le long de l'extension de corps $K(X_{s_1}) \hookrightarrow K(Y_{s_1})$. Malheureusement ceci ne marche pas car le revêtement ainsi construit risque d'être ramifié. On va « tuer » la ramification avec une extension de corps (ramifiée !) convenablement choisie. On choisit donc une uniformisante π de A et on pose $L := \frac{K[T]}{(T^n - \pi)}$ où $n = |G|$. On verra plus tard ce qui motive ce choix de L, lorsque l'on montrera avec le lemme d'Abhyankar que notre candidat est non ramifié. Reprenons pour l'instant les notations du paragraphe ci-dessus. On note aussi Y_L le revêtement de X_L induit par $Y_{s_1} \to X_{s_1}$. Remarquons qu'il suffit de chercher un revêtement de $\widetilde{X}^L$ qui induit $Y_L \to X_L$. En effet, ceci implique immédiatement le résultat voulu car, comme nous l'avons vu ci-dessus, tout revêtement étale de $\widetilde{X}^L$ provient d'un revêtement étale de X.

$$\begin{tikzcd}
Y_{s_1^{\text{sép}}} \arrow[r] \arrow[dd] & Y_L \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dr, dotted] & & Y_{s_1} \arrow[dd] & & \\
& & ?? \arrow[dd, dotted] & & & \\
X_{s_1^{\text{sép}}} \arrow[r] \arrow[dd] & X_L \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dr] & & X_{s_1} \arrow[dr] \arrow[dd] & & \\
& & \widetilde{X}^L \arrow[rr] \arrow[dd] & & X \arrow[dd] & \\
\operatorname{Spec} k(s_1)^{\text{sép}} \arrow[r] & \operatorname{Spec} L \arrow[rr] \arrow[dr] & & s_1 \arrow[dr] & & X_{s_0} \arrow[ul] \arrow[ullll, bend left] \arrow[dd] \\
& & \widetilde{S}^L \arrow[rr] & & S & \\
& & & & & s_0 \arrow[ul] \arrow[ullll, bend left]
\end{tikzcd}$$

Remarquons tout d'abord que $\widetilde{X}^L$ est régulier, donc normal. (En effet, $\widetilde{X}^L \to \widetilde{S}^L$ est lisse et $\widetilde{S}^L$ est le spectre d'un anneau de valuation discrète.) De plus $\widetilde{X}^L$ est intègre : en effet, comme il est réduit (car lisse sur un schéma réduit), noethérien et normal, il suffit de montrer qu'il est connexe. Or le morphisme $\widetilde{X}^L \to \widetilde{S}^L$ est ouvert et fermé (car propre et lisse). Soit U une composante connexe de $\widetilde{X}^L$. L'image de U dans $\widetilde{S}^L$ est $\widetilde{S}^L$ tout entier (par connexité de $\widetilde{S}^L$) donc U rencontre toutes les fibres, et comme les fibres sont connexes on a nécessairement $U = \widetilde{X}^L$ ce qui prouve bien que $\widetilde{X}^L$ est intègre. On note maintenant $\widetilde{Y}^L$ le normalisé de $\widetilde{X}^L$ le long de l'extension de corps $K(\widetilde{X}^L) = K(X_L) \hookrightarrow K(Y_L)$. On obtient ainsi un candidat naturel $\widetilde{Y}^L \to \widetilde{X}^L$ pour le revêtement souhaité de $\widetilde{X}^L$.

- *Notre candidat est fini et induit bien $Y_L \to X_L$.*

Comme la normalisation commute à la localisation (voir [2] 5.12), on voit facilement que Y_L s'identifie au produit fibré $X_L \times_{\widetilde{X}^L} \widetilde{Y}^L$, autrement dit le morphisme $\widetilde{Y}^L \to \widetilde{X}^L$ induit $Y_L \to X_L$. De plus $\widetilde{Y}^L$ est fini sur $\widetilde{X}^L$ (propriété générale de la normalisation dans une extension séparable, *cf.* [2] 5.17). Donc il suffit de montrer qu'il est étale.

- *Utilisation du théorème de pureté de Zariski-Nagata.*

Vu le théorème de pureté de Zariski-Nagata (rappelé sans preuve en 4.4.1), il suffit de montrer que $\widetilde{Y}^L \to \widetilde{X}^L$ est étale au-dessus d'un ouvert de $\widetilde{X}^L$ qui contient tous les points de codimension ≤ 1 (*i.e.* les points dont la dimension de l'anneau local est inférieure à 1). Or, à part le point générique ζ_L de la fibre spéciale $X_{s_0} \subset \widetilde{X}^L$, tous les points de codimension 0 ou 1 sont dans l'ouvert X_L de $\widetilde{X}^L$. Comme on sait par hypothèse que $Y_L \to X_L$ est étale, il n'y a rien à faire pour ces points-là. Il reste à montrer que $\widetilde{Y}^L \to \widetilde{X}^L$ est étale au-dessus d'un voisinage de ζ_L. La platitude est immédiate puisque l'anneau local $\mathcal{O}_{\widetilde{X}^L,\zeta_L}$ est un anneau de valuation discrète. Il reste donc juste à montrer que $\widetilde{Y}^L \to \widetilde{X}^L$ est non ramifié au-dessus de ζ_L.

- *Utilisation du lemme d'Abhyankar*[4].

Il suffit de montrer que le produit fibré $\widetilde{Y}^L \times_{\widetilde{X}^L} \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\widetilde{X}^L,\zeta_L}$ est non ramifié sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\widetilde{X}^L,\zeta_L}$. Or ce produit fibré est simplement le normalisé de $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\widetilde{X}^L,\zeta_L}$ le long de l'extension de corps $K(\widetilde{X}^L) = K(X_L) \to K(Y_L)$ ([2] 5.12 par exemple). Il faut donc montrer que $K(Y_L)$ est non ramifiée sur $\mathcal{O}_{\widetilde{X}^L,\zeta_L}$. Notons ζ le point générique de la fibre spéciale X_{s_0} dans X. Nous allons utiliser le lemme d'Abhyankar 4.5.2 avec l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_{X,\zeta}$ de corps des fractions $K(X)$ et le diagramme d'extensions

$$\begin{tikzcd}
 & K(Y_L) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
K(X_L) \arrow[dr, dash] & & K(Y_{s_1}) \arrow[dl, dash] \\
 & K(X) &
\end{tikzcd}$$

L'uniformisante π de A est aussi une uniformisante de $\mathcal{O}_{X,\zeta}$. L'entier n étant premier à la caractéristique résiduelle p de A, ce dernier, étant hensélien, contient les racines n-ièmes de l'unité. En particulier le corps K contient les racines n-ièmes de l'unité. On en déduit facilement que les extensions $K \to L = \frac{K[T]}{(T^n-\pi)}$ et $K(X) \to K(X_L) = \frac{K(X)[T]}{(T^n-\pi)}$ sont galoisiennes de groupe de Galois $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Par ailleurs, le corps résiduel de $\mathcal{O}_{X,\zeta}$ n'est autre que $K(X_{s_0})$. Il est donc lui aussi de caractéristique p, première à n, si bien que l'extension $K(X_L)$ est modérément ramifiée sur $\mathcal{O}_{X,\zeta}$. Le groupe d'inertie est égal au groupe de Galois tout entier, donc d'ordre n. L'extension $K(X) \to K(Y_{s_1})$, quant à elle, est galoisienne de groupe G, qui est d'ordre n premier à p. Elle est donc modérément ramifiée, et l'ordre du groupe d'inertie divise n. D'après le lemme d'Abhyankar, on en déduit que $K(Y_L)$ est non ramifiée sur les localisés de V', où V' est la fermeture intégrale de $\mathcal{O}_{X,\zeta}$ dans $K(X_L)$. Mais cet anneau V' n'est autre que $\mathcal{O}_{\widetilde{X}^L,\zeta_L}$. Ceci achève la démonstration. $\square$

Lemme 4.3.1 *Soit S un schéma localement noethérien. Soient $s_0, s_1 \in S$ avec $s_0 \in \overline{\{s_1\}}$. Alors il existe un anneau A de valuation discrète, complet, de corps résiduel séparablement (algébriquement ?) clos, et un morphisme* $\operatorname{Spec} A \to S$ *qui envoie le point fermé de* $\operatorname{Spec} A$ *sur s_0 et le point générique sur s_1.*

Démonstration. On peut supposer que S est le spectre d'un anneau de valuation discrète A par EGA 1 [6] 5.5.3. L'hensélisé strict A^{hs} est encore un anneau de valuation discrète ([3] 2.3 proposition 10), donc on peut supposer que le corps résiduel de A est séparablement clos. On prend alors le complété. [Mais comment se ramène-t-on au cas où le corps résiduel est *algébriquement* clos ?] $\square$

4. Le lecteur peu familier du lemme d'Abhyankar et des questions de ramification est invité à lire d'abord la section 4.5 où l'énoncé du lemme et le vocabulaire attenant sont rappelés.

4.4 Théorème de pureté de Zariski-Nagata

Théorème 4.4.1 *Soient X un schéma régulier localement noethérien, et $U \subset X$ le complémentaire d'un fermé de codimension ≥ 2. Alors le foncteur de restriction $Rev(X) \to Rev(U)$ est une équivalence de catégories d'inverse le foncteur normalisation.*

Démonstration. C'est un résultat difficile en général (voir SGA 2 [7] X, §3). Dans le cas $\dim X \leq 2$, une démonstration élémentaire est donnée dans l'article [8] d'Orgogozo et Vidal (corollaire 2.3). $\square$

4.5 Lemme d'Abhyankar et ramification

Nous rappelons ici quelques notations et résultats de SGA 1 V § 2. Soient A un anneau, $Y = \operatorname{Spec} A$, et G un groupe fini agissant sur Y (à droite pour fixer les idées, donc G agit à gauche sur A). Si $y \in Y$, on appelle *groupe de décomposition de y* le stabilisateur $G_d(y)$ de y. Il agit canoniquement (à gauche) sur le corps résiduel $\kappa(y)$. L'ensemble des éléments de $G_d(y)$ qui agissent trivialement sur $\kappa(y)$ est un sous-groupe de G appelé *groupe d'inertie* de y et noté $G_i(y)$.

Lemme 4.5.1 (Cas particulier de SGA 1 [1] V 2.3)
Avec les hypothèses et notations précédentes, on suppose de plus que A est noethérien et fini sur le sous-anneau A^G des invariants sous G (autrement dit le morphisme $Y = \operatorname{Spec} A \to X = \operatorname{Spec} A^G$ est fini). Pour un point $y \in Y$, si $G_i(y)$ est trivial, alors Y est étale sur X en y. En particulier, si tous les groupes d'inertie sont triviaux, le morphisme $Y \to X$ est étale.

On suppose maintenant que A est un anneau de valuation discrète, de corps des fractions K et de corps résiduel k. Soit L une extension finie galoisienne de K. On note G le groupe de Galois de L sur K et A' le normalisé de A dans L. Le groupe G agit naturellement sur A' par A-automorphismes. Quelques faits :

- A' est intégralement clos dans L.
- A' est libre de rang $[L : K]$ sur A.
- Le corps des fractions de A' s'identifie à L, et aussi à $A' \otimes_A K$.
- L'anneau A est égal au sous-anneau A'^G des invariants de A' sous G.
- Si A est complet (donc hensélien), alors A' est un anneau de valuation discrète complet.

Comme précédemment, pour $y \in \operatorname{Spec} A'$ un point fermé, on note $G_d(y)$ le groupe de décomposition et $G_i(y)$ le groupe d'inertie. On dit que L est modérément ramifiée sur A si l'ordre de $G_i(y)$ est premier à p (les groupes $G_i(y)$ pour y point fermé de $\operatorname{Spec} A'$ sont conjugués donc cette définition ne dépend pas du point y choisi). Vu le lemme ci-dessus, on voit par ailleurs que le morphisme $\operatorname{Spec} A' \to \operatorname{Spec} A$ est non ramifié si les groupes $G_i(y)$ sont triviaux. On dit dans ce cas que le corps L est non ramifié sur A.

Lemme 4.5.2 (Abhyankar, [1] SGA 1, X, 3.6) *Soit A un anneau de valuation discrète de corps des fractions K. Soient L, K' deux extensions galoisiennes de K modérément ramifiées sur A. On note i_L et $i_{K'}$ les ordres des groupes d'inertie correspondants. On suppose que i_L divise $i_{K'}$. Soit $L' = L.K'$ le compositum de L et K' sur K et soit A' la fermeture intégrale de A dans K'. Alors L' est non ramifiée sur les localisés de A'.*

Références

[1] *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1).* Documents Mathématiques (Paris) , 3. Société Mathématique de France, Paris, 2003. Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 1960–61. Dirigé par A. Grothendieck, augmenté de deux exposés de Mme M. Raynaud. Édition recomposée et annotée du volume 224 des Lectures Notes in Mathematics publiée en 1971 par Springer-Verlag.

[2] Michael F. Atiyah and Ian G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.

[3] Siegfried Bosch, Werner Lütkebohmert, and Michel Raynaud. *Néron models*, volume 21 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)].* Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[4] Barbara Fantechi, Lothar Göttsche, Luc Illusie, Steven L. Kleiman, Nitin Nitsure, and Angelo Vistoli. *Fundamental algebraic geometry*, volume 123 of *Mathematical Surveys and Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2005. Grothendieck's FGA explained.

[5] Alexander Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (32) :361, 1967.

[6] Alexander Grothendieck. *Éléments de géométrie algébrique. I. Le langage des schémas*, volume 166 of *Grundlehren Math. Wiss.* Springer-Verlag, 1971.

[7] Alexander Grothendieck. *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux (SGA 2).* Documents Mathématiques (Paris) [Mathematical Documents (Paris)], 4. Société Mathématique de France, Paris, 2005. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie, 1962, Augmenté d'un exposé de Michèle Raynaud. [With an exposé by Michèle Raynaud], With a preface and edited by Yves Laszlo, Revised reprint of the 1968 French original.

[8] Fabrice Orgogozo and Isabelle Vidal. Le théorème de spécialisation du groupe fondamental. In *Courbes semi-stables et groupe fondamental en géométrie algébrique (Luminy, 1998)*, volume 187 of *Progr. Math.*, pages 169–184. Birkhäuser, Basel, 2000.