# Espaces de Configurations

A. Bruguières

17 septembre 2002

## 1 Terminologie

Dans tout l'exposé, et sauf mention contraire, les 'variétés' sont des variétés analytiques réelles et les 'morphismes', des applications analytiques réelles.
**Notations.** On note $\mathcal{T}$ le tore $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, et, si $X$ est une variété et $I$ un ensemble fini, on note $X^I_* \subset X^I$ l'ouvert des applications injectives $I \hookrightarrow X$.
**Germes.** Si $X \subset E$ et $Y \subset E'$ sont des parties localement fermées (pour la topologie ordinaire) de variétés $E$, $E'$, une application $f : X \to Y$ est dite *analytique* si pour tout $x_0 \in E$, il existe un voisinage ouvert $U$ de $x_0$ dans $E$ et une application analytique $g : U \to E'$ telle que $\forall x \in U, f(x) = g(x)$.
On définit une 'catégorie de germes' dont les objets sont les couples $(X, Z)$, où $X$ est une partie localement fermée d'une variété $E$, et $Z$ une partie localement fermé de $X$. L'objet $(X, Z)$ est appelé *germe de $X$ le long de $Z$*. En particulier si $x \in X$, $(X, \{x\})$ est le *germe de $X$ en $x$*. Les morphismes d'un germe $(X, Z)$ vers un germe $(X', Z')$ sont les éléments de l'ensemble

$$\varinjlim_U \{f : U \to X' \mid f \text{ analytique et } f(Z) \subset Z'\}\,.$$

où $U$ décrit l'ensemble des voisinages ouverts de $Z$ dans $X$.
**Variétés à coins.** Une *variété à coins* est une partie localement fermée $Z$ d'une variété $E$ dont le germe en tout point est isomorphe au germe de $\mathbb{R}^{d-h} \times {\mathbb{R}_+}^h$ à l'origine, pour $d$, $h \in \mathbb{N}$ dépendant du point.
L'entier $h$, vu comme fonction sur une variété à coins $X$, définit une partition :

$$X = \bigsqcup_{h \in \mathbb{N}} \partial^h X\,.$$

Les composantes connexes des $\partial^h X$ forment une stratification, qu'on appelle la *stratification canonique de $X$*. Chaque strate est une variété sans coins, dont l'adhérence est une variété à coins.
L'*intérieur* de $X$ est la variété $\partial^0 X$, et le *bord* de $X$, le fermé $X - \partial^0 X \subset X$.

## 2 L'espace $C^I$

Soit $I$ un ensemble fini de cardinal $n$. Le groupe $G$ des permutations de $\mathbb{C}$ de la forme $z \mapsto az+b$, avec $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{C}$, opère sur $\mathbb{C}_*^I$, et son action est libre si $n \geq 2$. Le quotient $\mathbb{C}_*^I/G$ est alors une variété connexe de dimension $2n-3$, orientée, qu'on note $C^I$.
La construction de $C^I$ est fonctorielle en $I$ en ce sens que toute application injective $J \hookrightarrow I$, avec $\#J \geq 2$, induit un morphisme $C^I \to C^J$.
Exemple. Notons $C^n = C^{\{1,2,\ldots,n\}}$. Alors l'application $\phi : C^2 \to \mathcal{T}$ définie par $\phi(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi}\,\mathsf{Arg}(z_2 - z_1)$ est un isomorphisme de variétés de $C^2$ sur $\mathcal{T}$. Ainsi, $C^2$ est compact.
En général, l'application $\theta : \mathcal{T} \times (\mathbb{C} - \{0,1\})_*^{n-2} \to C^n$ définie par

$$(t, (\zeta_1, \ldots \zeta_{n-2})) \mapsto e^{2i\pi t}(0, 1, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-2})$$

est un isomorphisme de variétés. Ainsi, $C^n$ n'est pas compact pour $n \geq 3$. En particulier, $C^3 \simeq \mathcal{T} \times (\mathbb{C} - \{0,1\})$.
Pour $k, l \in I$, $k \neq l$, on définit une fonction analytique $\phi_{k,l} : C^I \to \mathcal{T}$ par $\phi_{k,l}((z_i)_{i\in I}) = \phi(z_k, z_l)$. Les fonctions $\phi_{k,l}$ et leurs différentielles sont appelées à jouer un rôle important.
L'un des buts de l'exposé est de construire une compactification $\overline{C}^I$ de $C^I$ qui soit fonctorielle en $I$ ; ce caractère fonctoriel aura pour conséquence avantageuse que les fonctions $\phi_{k,l}$ se prolongeront analytiquement à $\overline{C}^I$. En revanche, nous devrons quitter le cadre des variétés ordinaires : $\overline{C}^I$ sera une variété à coins.
Dans un premier temps, nous allons construire une compactification plus naïve de $C^I$, que nous noterons $\widetilde{C}^I$.
Pour $c \in \mathbb{C}^I$, notons

$$\underline{c} = \frac{1}{\#I}\sum_{i\in I} c_i \quad et \quad \|c\| = \frac{1}{\#I}\sum_{i\in I} |c_i - \underline{c}|^2 ,$$

de sorte que $\|c\| = 0 \iff c : I \to \mathbb{C}$ est constante. Notons

$$\mathbb{C}_0^I = \{c \in \mathbb{C}^I \mid \|c\| \neq 0\} \text{ et } \widetilde{C}^I = \{c \in \mathbb{C}^I \mid \underline{c} = 0 \text{ et } \|c\| = 1\}.$$

L'ensemble $\widetilde{C}^I$ est une sous-variété compacte de $\mathbb{C}^I$, [1] qu'on voit comme l'ensemble des *configurations normalisées* (de moyenne 0 et d'écart-type 1). Tout $c \in \mathbb{C}_0^I$ s'écrit de manière unique $c = g \cdot \tilde{c}$, avec $g \in G$ et $\tilde{c} \in \widetilde{C}^I$, ce qui nous permet d'identifier $\mathbb{C}_0^I/G$ à $\widetilde{C}^I$, et $C^I$ à $\widetilde{C}^I \cap \mathbb{C}_*^I$. Ainsi $\widetilde{C}^I$ est une compactification de $C^I$, non fonctorielle en $I$ car les fonctions $\phi_{k,l}$ ne s'y prolongent pas continûment.

[1] En fait, $\widetilde{C}^I$ est une sphère de dimension $2n-3$.

Afin de construire une compactification fonctorielle, considérons le plongement

$$C^I \to \prod_{J \subset I, \#J \geq 2} \widetilde{C}^J$$

défini par $c \mapsto (\xi_J)_{J \subset I, \#J \geq 2}$, où $\xi_J = \widetilde{c_{|J}}$.
On note $\overline{C}^I$ l'adhérence de l'image de ce morphisme ; c'est une compactification de $C^I$, fonctorielle en $I$ par construction. En particulier, pour $j, k \in I$, $j \neq k$, la projection $\prod_J \widetilde{C}^J \to \widetilde{C}^{\{j,k\}} \simeq C^2$, composée avec $\phi : C^2 \simeq \mathcal{T}$, est un prolongement analytique de $\phi_{j,k} : C^I \to \mathcal{T}$.

### 2.1 Structure de $\overline{C}^I$

Nous allons démontrer que $\overline{C}^I$ est une variété à coins, et pour cela, nous allons tout d'abord définir une stratification de cet espace, qui sera en définitive la stratification canonique.
De manière informelle, voici l'idée. Lorsqu'une configuration $c \in C^I$ s'approche du bord, certains points se confondent. À l'échelle macroscopique, on voit certains paquets s'effondrer. Mais, si l'on observe chacun de ces paquets au microscope avec un grossissement adéquat, on verra de nouveau une configuration de points où certains sous-paquets s'effondrent à leur tour. On peut répéter cette opération de grossissement jusqu'à isoler un seul point dans l'oculaire. La structure combinatoire sous-jacente à cette exploration est un arbre ayant pour feuilles les éléments de $I$, et ces arbres vont précisément indexer les strates.
Définition. On appelle *$I$-arbre* un arbre dont les feuilles sont indexées par les éléments de $I$, c'est-à-dire, plus formellement, toute partie $T$ de $\mathcal{P}(I)$ vérifiant :
(i) $T$ contient $I$ et les singletons, mais pas $\emptyset$ ;
(ii) deux éléments de $T$ sont comparables ou disjoints.

Les éléments de $T$ sont les sommets de l'arbre ; $I$ est la racine, et les singletons sont les feuilles. On note $T_0 = \{A \in T \mid \#A \geq 2\}$ l'ensemble des sommets intérieurs, $T_* = T_0 - \{I\}$, et pour $A \in T$, on note $\mathsf{St} A$ l'ensemble des éléments maximaux de $\{A' \in T, A' \subsetneq A\}$, qui s'identifie à l'ensemble des arêtes issues du sommet $A$.
À tout point $\xi = (\xi_J)$ de $\overline{C}^I$ est naturellement associé un $I$-arbre $T(\xi)$ défini comme suit.
Pour $J \subset I$, $\#J \geq 2$, et $J' \subset I$, on écrit $J' \prec J$ si $J'$ est une fibre de l'application $\xi_J : J \to \mathbb{C}$. Une partie $A \subset I$ est un sommet de $T(\xi)$ si et seulement s'il existe une suite finie $A = A_r \prec A_{r-1} \prec \ldots \prec A_0 = I$.
Si $T$ est un $I$-arbre, notons $\partial_T \overline{C}^I$ l'ensemble des $\xi \in \overline{C}^I$ tels que $T(\xi) = T$.

**Proposition 1** *Le compactifié $\overline{C}^I$ est une variété à coins d'intérieur $C^I$, dont les strates canoniques sont les $\partial_T \overline{C}^I$ pour $T$ décrivant l'ensemble des*

*$I$-arbres.*
*De plus, la strate $\partial_T \overline{C}^I$ est de codimension $\# T_*$ et s'identifie à* $\prod_{A\in T_0} C^{\mathsf{St}A}$.

Démonstration.
Soit $T$ un $I$-arbre, $S_T = \prod_{A\in T_0} C^{\mathsf{St}A}$, et $\mathcal{U}_T$ la variété à coins $S_T \times {\mathbb{R}_+}^{T_*}$.
Nous allons construire un morphisme partiellement défini $\Phi : \mathcal{U}_T \dashrightarrow \overline{C}^I$.
Nous montrerons ensuite que $\Phi$ définit un isomorphisme du germe de $\mathcal{U}_T$ le long de $S_T \times \{0\}$ sur le germe de $\overline{C}^I$ le long de $\partial_T \overline{C}^I$, d'où la proposition.
Pour $A, B \in T$, on écrira $B \prec A$ si $B \in \mathsf{St}A$. Soit $\gamma \in \mathcal{U}_T$, $\gamma = ((c_A)_{A\in T_0}, (s_B)_{B\in T_*})$.
Pour $A \in T_0$, on définit un élément $x_A = (x_{A,i})_{i\in A}$ de $\mathbb{C}^A$ par la formule :

$$x_{A,i} = c_{A_0,A_1} + s_{A_1} c_{A_1,A_2} + \cdots + s_{A_1} \cdots s_{A_{r-1}} c_{A_{r-1},A_r}$$

où $\{i\} = A_r \prec A_{r-1} \prec \cdots \prec A_0 = A$.
Soit $J \subset I$, $\# J \geq 2$, $A$ le plus petit élément de $T$ contenant $I$, et posons $\xi_J = \widetilde{x_{A|J}}$ si $x_{A|J} \in \mathbb{C}_0^J$.
On définit $\Phi$ par : $\Phi(\gamma) = (\xi_J)_{J\subset I, \# J \geq 2}$.
On vérifie sans peine les faits suivants :
a) $\Phi$ est un morphisme défini dans un voisinage ouvert de $S_T \times \{0\}$ ;
b) si $\gamma \in \mathcal{U}_T$ est intérieur et proche du bord, $\Phi(\gamma) \in C^I$, de sorte que $\Phi$ est à valeurs dans $\overline{C}^I$ ;
c) $\Phi(S_T \times \{0\}) \subset \partial_T \overline{C}^I$.
Reste à construire $\Psi : \overline{C}^I \dashrightarrow \mathcal{U}_T$ inverse à $\Phi$. Soit $\xi = (\xi_J)_{J\subset I, \# J > 2} \in \overline{C}^I$.
Pour $A \in T$, notons $T_A = \{B \in T, B \subset A\}$. On construit un élément $z_A$ de $\mathbb{C}^{T_A}$ récursivement par les formules
$z_{A,B} = \xi_{A,i}$ si $B = \{i\}$, $i \in A$ ;
$z_{A,B} = \frac{1}{\# B} \sum_{C\in \mathsf{St}B} z_{B,C}$ si $B \subset A$, $\# B > 1$.
Pour $\xi$ voisin de $\partial_T \overline{C}^I$, $z_{A|\mathsf{St}A}$ est un élément de ${\mathbb{C}_*}^{\mathsf{St}A}$ ; on note $c_A$ sa classe dans $C^A$. Pour $B \in T_*$, $B \prec A$, on note

$$s_B = \frac{\|(z_A)_{|\mathsf{St}B}\|}{\|(z_A)_{|\mathsf{St}A}\|}$$

On pose $\Psi(\xi) = ((c_A)_{A\in T_0}, (s_B)_{B\in T_*})$. On vérifie que $\Psi(\partial_T \overline{C}^I) \subset S_T \times \{0\}$ et que les germes de $\Phi$ et de $\Psi$ sont inverses l'un de l'autre. $\square$

# 3 L'espace $C^{I,J}$

Soit $\mathcal{H}$ le demi-plan de Poincaré. Soient $I$, $J$ deux ensembles finis, $n = \# I$, $m = \# J$. On note $\mathsf{Conf}^{I,J}$ l'ensemble $\mathcal{H}_*^I \times \mathbb{R}_*^J$.
Le groupe $G'$ des permutations de $\mathbb{C}$ de la forme $z \mapsto az + b$, $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}$ opère sur $C^{I,J}$, librement si $2n + m \geq 2$. Sous cette hypothèse, on note $C^{I,J} = \mathsf{Conf}^{I,J}/G'$.

C'est une variété de dimension $2n+m-2$, orientable, à $m!$ composantes connexes en bijection canonique avec les numérotations de l'ensemble $J$.
On se propose de compactifier $C^{I,J}$. Pour cela, posons $K = I \sqcup \overline{I} \sqcup J$, réunion disjointe de deux copies de $I$ et d'une copie de $J$, muni de l'involution $\sigma : k \to \overline{k}$ qui échange les deux copies de $I$ et fixe les éléments de $J$.
L'application $\mathsf{Conf}^{I,J} \to \mathbb{C}_*^K$,

$$((z_i)_{I \in I}, (z_j)_{j \in J}) \mapsto ((z_i)_{i \in I}, (\overline{z_i})_{\overline{i} \in \overline{I}}, (z_j)_{j \in J}),$$

induit un plongement fermé de $C^{I,J}$ dans $C^K$.
On identifie $C^{I,J}$ à son image dans $C^K$, et on note $\overline{C}^{I,J}$ l'adhérence de $C^{I,J}$ dans $\overline{C}^K$.
Afin d'élucider la structure de $\overline{C}^{I,J}$, il est naturel d'étudier ses intersections avec les strates de $\overline{C}^K$, et on constate que la strate $\partial_T \overline{C}^K$ ne peut rencontrer $\overline{C}^{I,J}$ que si le $K$-arbre $T$ satisfait les conditions suivantes :
(a) $A \in T \Longrightarrow \sigma(A) \in T$ ;
(b) $A \in I \Longrightarrow A \subset I$ ou $A \subset \overline{I}$ ou $\sigma(A) = A$.
Définition. On appelle $(I,J)$-arbre tout $(I \sqcup \overline{I} \sqcup J)$-arbre $T$ satisfaisant les conditions (a) et (b) ci-dessus.

Si $P \subset \mathcal{P}(K)$, on notera $P^\sigma$ (resp. $P^I$, resp. $P^{\overline{I}}$) l'ensemble des $A \in P$ *t. q.* $\sigma(A) = A$ (resp. $A \subset I$, resp. $A \subset \overline{I}$).
Avec ces conventions, un $(I,J)$-arbre est un $K$-arbre $T$ vérifiant

$$T = T^I \sqcup T^{\overline{I}} \sqcup T^\sigma .$$

Si $T$ est un $(I,J)$-arbre, on pose $\partial_T \overline{C}^{I,J} = \overline{C}^{I,J} \cap \partial_T \overline{C}^K$.

**Proposition 2** *Le compactifié $\overline{C}^{I,J}$ est une variété à coins d'intérieur $C^{I,J}$, dont les strates canoniques sont les composantes connexes des $\partial_T \overline{C}^{I,J}$, pour $T$ décrivant l'ensemble des $(I,J)$-arbres.*
*De plus, $\partial_T \overline{C}^{I,J}$ est de codimension $\#(T_*^\sigma \sqcup T_0^I)$, et s'identifie à*

$$\prod_{A \in T_0^\sigma} C^{\mathsf{St}^I A, \mathsf{St}^\sigma A} \times \prod_{A \in T_0^I} C^{\mathsf{St} A} .$$

Démonstration. On adapte la démonstration de la proposition 1. Soit $S_T = \prod_{A \in T_0} C^{\mathsf{St} A}$, $\mathcal{U}_T = S_T \times {\mathbb{R}_+}^{T_*}$, et $\Phi : \mathcal{U}_T \dashrightarrow \overline{C}^K$ le morphisme construit ci-dessus. Posons $Z_T = \prod_{A \in T_0^\sigma} C^{\mathsf{St}^I A, \mathsf{St}^\sigma A} \times \prod_{A \in T_0^I} C^{\mathsf{St} A}$, et soit $\mathcal{V}_T$ la variété à coins $Z_T \times {\mathbb{R}_+}^{T_*^\sigma \sqcup T_0^I}$.
On identifie $\mathcal{V}_T$ à un fermé de $\mathcal{U}_T$ au moyen des plongements suivants :
(i) $C^{\mathsf{St}^I A, \mathsf{St}^\sigma A} \hookrightarrow C^{\mathsf{St} A}$ pour $A \in T_0^\sigma$ ;
(ii) $C^{\mathsf{St} A} \hookrightarrow C^{\mathsf{St} A} \times C^{\mathsf{St} \overline{A}}$ pour $A \in T_0^I$ $(c \mapsto (c, \overline{c})$, où $\overline{c}_{\overline{B}} = \overline{c_B})$ ;
(iii) $(\mathbb{R}_+)^{T_*^\sigma \sqcup T_0^I} \hookrightarrow (\mathbb{R}_+)^{T_*}$ $(s \mapsto s'$, où $s'_B = s_{\overline{B}}$ si $B \in T_0^{\overline{I}}$, $s'_B = s_B$ sinon$)$.

D'où $\mathcal{V}_T \hookrightarrow \mathcal{U}_T$. On vérifie que $\Phi_{|\mathcal{V}_T}$ est à valeurs dans $\overline{C}^{I,J}$, et induit un isomorphisme de germes de $(\mathcal{V}_T, Z_T \times \{0\})$ sur $(\overline{C}^{I,J}, \partial_T \overline{C}^{I,J})$ (dont l'inverse est induit par $\Psi$). $\square$

Les strates de codimension 1 dans $\overline{C}^{I,J}$ joueront un rôle important. Elles correspondent à deux types d'arbres :

1) cas $T_* = \{A, \overline{A}\}$ avec $A \subset I$, $\#A \geq 2$. Notant $\partial_A \overline{C}^{I,J} = \partial_T \overline{C}^{I,J}$, on a

$$\partial_A \overline{C}^{I,J} \simeq C^{I-A\sqcup\{*\},J} \times C^A\,;$$

2) cas $T_* = \{A \sqcup \overline{A} \sqcup B\}$, avec $A \subset I$, $B \subset J$ (l'une des deux inclusions étant stricte), et $2\#A + \#B \geq 2$. Notant $\partial_{A,B} \overline{C}^{I,J} = \partial_T \overline{C}^{I,J}$, on a

$$\partial_{A,B} \overline{C}^{I,J} \simeq C^{A,B} \times C^{I-A,J-B\sqcup\{*\}}.$$

# 4 Formes différentielles sur $C^I$ et $C^{I,J}$

Soit $I$ un ensemble fini de cardinal $n \geq 2$. On appelle *formes angulaires* les 1-formes différentielles $d\phi_{j,k}$ sur $\overline{C}^I$ pour $j, k \in I$ distincts.

**Proposition 3** *(Lemme d'annulation). Soit $I$ un ensemble fini de cardinal $n \geq 3$. L'intégrale d'un produit de $2n-3$ formes angulaires sur $C^I$ est nulle.*

DÉMONSTRATION. L'intégrale converge absolument, les formes angulaires étant analytiques sur la variété à coins compacte $\overline{C}^I$.

Quitte à numéroter les éléments de $I$, on se ramène à montrer que sur $C^n$, l'intégrale de la forme $d\phi_{j_0,k_0} \wedge \ldots \wedge d\phi_{j_{2n-4},k_{2n-4}}$ est nulle ; et on peut supposer $j_0 = 1$, $k_0 = 2$.

Soit $X$ la variété algébrique complexe $(\mathbb{C} - \{0,1\})^{n-2}_*$, et $\theta$ l'isomorphisme analytique (réel) $\mathcal{T} \times X \xrightarrow{\sim} C^n$, $(t, (\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-2})) \mapsto e^{2i\pi t}(0, 1, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-2})$ que nous avons déjà rencontré. On a $\theta^*\phi_{1,2} = t$, et, pour $l > 0$, $\theta^*\phi_{j_l,k_l}$ s'écrit $t + \frac{1}{2\pi}\,\mathsf{Arg}\, Z_l$, où $Z_l$ est une fonction rationnelle non identiquement nulle sur $X$. D'où : $\theta^* d\phi = (\frac{1}{2\pi})^{2n-4} dt \wedge d\,\mathsf{Arg}\, Z_1 \wedge \ldots \wedge d\,\mathsf{Arg}\, Z_{2n-4}$.

On conclut par le théorème suivant.

**Théorème 1** *Soit $X$ une variété algébrique complexe irréductible de dimension $n > 0$, et $Z_1, \ldots Z_{2n}$ des fonctions rationnelles non nulles sur $Z$. Soit $\omega$ la $2n$-forme différentielle réelle $d\,\mathsf{Arg}\, Z_1 \wedge \ldots \wedge d\,\mathsf{Arg}\, Z_{2n}$. Alors $\int_X \omega$ converge absolument, et sa valeur est nulle.*

DÉMONSTRATION.

Deux remarques pour commencer.

1) On a $\omega = d\mathsf{Log}|Z_1| \wedge \ldots \wedge d\mathsf{Log}|Z_{2n}|$.

En effet, pour $x \in X$, notons $J_x : T_x X \to T_x X$ la structure complexe. Si $Z$ est une fonction holomorphe non nulle en $x$, $d_x \mathsf{Log} Z = d_x \mathsf{Log}|Z| + i d_x\,\mathsf{Arg}\, Z$

et, $\mathsf{Log} Z$ étant holomorphe en $x$, on en déduit : $d_x \operatorname{\mathsf{Arg}} Z \circ J_x = d_x \mathsf{Log}|Z|$. On conclut en remarquant que $J_x$ est de déterminant (réel) 1.
2) On peut supposer que $X$ est une variété projective lisse, et qu'il existe un ouvert de Zariski dense $U \subset X$ vérifiant :
(i) $X - U$ est un diviseur à croisements normaux ;
(ii) les $Z_i$ sont régulières et partout non nulles sur $U$.
En effet, le problème est birationnel (les fermés de Zariski $F \subsetneq X$ étant négligeables). Soit $U$ un ouvert dense affine lisse de $X$ où les $Z_i$ sont régulières et partout non nulles. Il existe un plongement ouvert de $U$ dans une variété projective $\overline{U}$, et, par résolution des singularités, on peut faire en sorte que $\overline{U}$ soit lisse et $\overline{U} - U$ soit un diviseur à croisements normaux.
L'idée de la démonstration du théorème est simple. On a $\omega = d\alpha$, où $\alpha \in A^{2n-1}(U)$ est la forme différentielle

$$\mathsf{Log}|Z_1|\, d\mathsf{Log}|Z_2| \wedge \ldots \wedge d\mathsf{Log}|Z_{2n}|\,.$$

Si $\alpha$ se prolongeait à $X$, on conclurait par la formule de Stokes : $\int_X \omega = \int_X d\alpha = 0$. En général, $\alpha$ ne se prolonge pas à $X$, mais satisfait une condition plus faible qui permet de conclure.
Soit $M$ une variété $\mathcal{C}^\infty$ orientée de dimension $N$, et $\beta$ une $d$-forme $L^1$ loc sur $M$ (ce qui signifie qu'en coordonnées locales au voisinage de tout point de $M$, les coefficients de $\beta$ sont des fonctions localement $L^1$). On définit alors un élément $I(\beta) \in \mathcal{A}^d(X) := (A_c^{N-d}(X))^*$ par $\langle I(\beta), \xi\rangle = \int_X \beta \wedge \xi$. Soit $D : \mathcal{A}^d(X) \to \mathcal{A}^{d+1}(X)$ la différentielle formelle définie par $\langle D\phi, \xi\rangle = (-1)^{d+1}\langle \phi, d\xi\rangle$. On dit que $\beta$ est *régulière sur* $M$ si $\beta$ et $d\beta$ sont $L^1$ loc, et $DI(\beta) = I(d\beta)$. Cette condition est clairement locale, et l'espace des formes régulières est un sous-$A^*(M)$-module de celui des formes $L^1$ loc sur $M$.
La forme $\alpha$ est régulière sur $X$. En effet, au voisinage de tout point $p \in X$, il existe des coordonnées locales complexes $(z_1, \ldots, z_n)$ telles que chaque composante de $X - U$ soit l'une des hypersurfaces $z_i = 0$. Sur un tel voisinage, $\alpha$ est combinaison linéaire à coefficients dans $A^*(M)$ de formes de l'un des deux types suivants :
(a) $\bigwedge_{j \in J} d\mathsf{Log}|z_j|$ ;
(b) $\mathsf{Log}|z_i| \cdot \bigwedge_{j \in J} d\mathsf{Log}|z_j|$ ;
où $J \subset \{1, \ldots, n\}$, et, dans (b), $1 \leq i \leq n$.
On se ramène donc par séparation des variables à vérifier que les formes $\mathsf{Log}|z|$, $d\mathsf{Log}|z|$ et $\mathsf{Log}|z| \cdot d\mathsf{Log}|z|$ sont régulières sur $\mathbb{C}$, ce qui se vérifie facilement à la main. (Indication : soit $\beta$ l'une de ces formes, et $k$ son degré ; $\beta$ et $d\beta$ étant $L^1$ loc, on se ramène par Stokes à vérifier que pour $\eta \in A_c^{1-k}(\mathbb{C})$, l'intégrale de $\beta \wedge \eta$ sur le cercle de rayon $r$ centré en 0 tend vers 0 lorsque $r \to 0$.)
Ainsi, $\int_U \omega = \int_U d\alpha = \langle I d\alpha, 1\rangle = \langle DI\alpha, 1\rangle = -\langle I\alpha, d\,1\rangle = 0$, ce qui achève la démonstration du théorème et de la proposition. □ □

## 4.1 Formes différentielles sur $C^{I,J}$ et graphes admissibles

Soient $n$, $m \in \mathbb{N}$ avec $2n+m \geq 2$, $I = \{1, \ldots, n\}$, $J = \{n+1, \ldots, n+m\}$, et posons $C^{n,m} = C^{I,J}$. On note $C_0^{n,m}$ la composante connexe de $C^{n,m}$ formée des configurations où les $m$ points réels sont en ordre croissant.
Pour $i \in I$, $j \in J$, $i \neq j$, on définit une fonction $\theta_{i,j} : C^{n,m} \to \mathcal{T}$ par

$$(z_k)_{k \in I \sqcup J} \mapsto \frac{1}{2\pi} \operatorname{\mathsf{Arg}}\Big(\frac{z_j - z_i}{z_j - \overline{z}_i}\Big) .$$

On observe que $\theta_{i,j}$ est la restriction à $C^{I,J}$ de $\phi_{i,j} - \phi_{\overline{i},j}$ et à ce titre, se prolonge analytiquement à $\overline{C}^{I,J}$.
On note $\omega_{i,j}$ la 1-forme différentielle $d\theta_{i,j}$ sur $\overline{C}^{I,J}$, en convenant que $\omega_{i,i} = 0$.
Définition. On appelle *$(n,m)$-graphe admissible* (ou simplement *graphe admissible*) toute application $\gamma : S_\gamma \to I \sqcup J$, où $S_\gamma \subset I \times \mathbb{N}$ est de la forme

$$S_\gamma = \{(i,j) \mid i \in I \text{ et } 1 \leq j \leq k_i\} ,$$

$k_1, \ldots, k_n$ étant des entiers naturels.
Les *sommets* de $\gamma$ sont les éléments de $I \sqcup J$ ; les éléments de $I$ (resp. $J$) sont les sommets de type I (resp. II). Les *arêtes* de $\gamma$ sont les éléments de $S_\gamma$, $e = (i,l) \in S_\gamma$ étant vu comme une arête de source $s(e) = i$ et de but $t(e) = \gamma(i,l)$. La source d'une arête est donc toujours de type I. On ordonne lexicographiquement l'ensemble $S_\gamma$, et on appelle *degré* de $\gamma$ son cardinal.
Si $\gamma$ est un graphe admissible de degré $d$, on pose

$$\omega_\gamma = \bigwedge_{e \in S_\gamma} \omega_{s(e),t(e)} .$$

C'est une forme différentielle fermée de degré $d$ sur $\overline{C}^{n,m}$, qui est nulle si $\gamma$ comporte une boucle ou une arête multiple.
Enfin, si $\gamma$ est de degré $2n+m-2$, on pose :

$$W_\gamma = \int_{C_0^{n,m}} \omega_\gamma .$$

Les scalaires $W_\gamma$ sont les poids qui interviennent dans la formule de Kontsevich. On observe que toute renumérotation des éléments de $I$, ou de $J$, ou de l'ensemble des arêtes issues d'un élément $i \in I$ modifie $W_\gamma$ par un signe. Nous allons voir maintenant que les poids $W_\gamma$ satisfont certaines relations qui résultent de la formule de Stokes.
Soit $\gamma$ un $(n,m)$-graphe admissible de degré $2n+m-3$. Par la formule de Stokes, il vient :

$$\int_{\partial \overline{C}_0^{n,m}} \omega_\gamma = \int_{\overline{C}_0^{n,m}} d\omega_\gamma = 0 .$$

Or le premier terme est la somme des intégrales de $\omega_\gamma$ sur les strates de codimension 1 de $\overline{C}_0^{n,m}$, que l'on sait décrire.
1) Strate $\partial_A \overline{C}^{n,m} \simeq C^A \times \overline{C}^{I-A\sqcup\{*\},J}$. Soit $\iota : C^A \times \overline{C}^{I-A\sqcup\{*\},J} \hookrightarrow \overline{C}^{I,J}$. On a

$$\iota^*\theta_{i,j} = \begin{cases} {p_1}^*\theta_{i,j} & \text{si } i,j \in A\,; \\ {p_2}^*\theta_{i,j} & \text{si } i,j \notin A\,; \\ {p_2}^*\theta_{i,*} & \text{si } i \notin A,\, j \in A\,; \\ {p_2}^*\theta_{*,j} & \text{si } i \in A,\, j \notin A. \end{cases}$$

Ainsi $\iota^*\omega_\gamma$ ne peut être non nulle que si le nombre d'arètes de $A$ à $A$ est égal à $2\#A - 3$. De plus, en vertu du lemme d'annulation, son intégrale sur la strate ne peut être non nulle que si $\#A = 2$.
Dans ce cas, l'intégrale étudiée est égale à $\pm W_{\gamma'}$, où $\gamma'$ est le $(n-1,m)$-graphe admissible obtenu en contractant l'unique arête de $A$ à $A$.
2) Strate $\partial_{A,B}\overline{C}^{n,m} \simeq C^{A,B} \times C^{I-A,J-B\sqcup\{*\}}$. Soit $\iota : C^{A,B} \times C^{I-A,J-B\sqcup\{*\}} \hookrightarrow \overline{C}^{I,J}$. On a

$$\iota^*\theta_{i,j} = \begin{cases} {p_1}^*\theta_{i,j} & \text{si } i \in A \text{ et } j \in A \sqcup B\,; \\ {p_2}^*\theta_{i,j} & \text{si } i \notin A \text{ et } j \notin A \sqcup B\,; \\ {p_2}^*\theta_{i,*} & \text{si } i \notin A,\, j \in A \sqcup B\,; \\ 0 & \text{si } i \in A,\, j \notin A \sqcup B. \end{cases}$$

Ainsi, posant $a = \#A$, $b = \#B$, $\iota^*\omega_\gamma$ ne peut être non nulle que si le nombre d'arêtes de $A$ à $A \sqcup B$ est égal à $2a + b - 2$, et toute arête issue de $A$ va dans $A \sqcup B$.
Dans ce cas, l'intégrale étudiée est égale à $\pm W_\gamma W'_{\gamma'}$, où $\gamma$ est le $(a,b)$-graphe admissible obtenu par restriction de $\gamma$ à $A \sqcup B$, et $\gamma'$ est le $(n-a, m-b+1)$-graphe admissible obtenu en contractant les éléments de $A \sqcup B$ en un unique sommet de type II.