Du nerf

A. Bruguières

November 8, 2001

1 Définitions

Soit $\mathcal{A}$ une categorie. Un *carquois de* $\mathcal{A}$ est un diagramme dans $\mathcal{A}$ de la forme

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "s"] & \\ X_0 & & X_0 \end{tikzcd}$$

On appelle *n-ième itéré de* X le produit fibré $X_n = X_{n-1} \times_{X_0} X_1$ $(n \geq 2)$. On dit que X est *itérable* si tous ses itérés sont représentables. Les itérés sont naturellement des carquois.
Soit X un carquois itérable de $\mathcal{A}$. Un foncteur $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est dit X*-exact* s'il respecte les itérés de X, autrement si le carquois $F(X)$ est itérable et $F(X)_n = F(X_n)$.
Une *catégorie de* $\mathcal{A}$ est un carquois itérable X muni de morphismes de carquois $\mu : X_2 \to X_1$, $\eta : X_0 \to X_1$ tels que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd} X_3 \arrow[r, "{(\mu,1_{X_1})}"] \arrow[d, "{(1_{X_1},\mu)}"'] & X_2 \arrow[d, "\mu"] \\ X_2 \arrow[r, "\mu"'] & X_1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "{(\eta,1_{X_1})}"] \arrow[d, "{(1_{X_1},\eta)}"'] \arrow[dr, "1_{X_1}"] & X_2 \arrow[d, "\mu"] \\ X_2 \arrow[r, "\mu"'] & X_1 \end{tikzcd}$$

Remarque. Si les produits fibrés sur X_0 existent dans $\mathcal{C}$, alors les carquois de base X_0 forment une catégorie monoïdale $Q(X_0)$ et une catégorie de $\mathcal{A}$ d'objets X_0 n'est autre qu'une algèbre dans $Q(X_0)$.

On dit qu'une catégorie X est un *groupoïde* s'il existe un morphisme $S : X_1 \to X_1$, appelé *antipode*, vérifiant : $sS = t$, $tS = s$, et rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "{(1_{X_1},S)}"] \arrow[d, "t"'] & X_2 \arrow[d, "\mu"] & X_1 \arrow[l, "{(S,1_{X_1})}"'] \arrow[d, "s"] \\ X_0 \arrow[r, "\eta"'] & X_1 & X_0 \arrow[l, "\eta"] \end{tikzcd}$$

L'antipode, s'il existe, est unique.
Si X est une catégorie (resp. un groupoïde) de $\mathcal{A}$ et $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur X-exact, $F(X)$ est une catégorie (resp. un groupoïde) de $\mathcal{B}$.
Par exemple, soit X une catégorie de $\mathcal{A}$ et T un objet de $\mathcal{A}$. Le foncteur $?(T) = \mathsf{Hom}(T, ?) : \mathcal{A} \to \mathsf{Ens}$ est X-exact car il commute aux produits fibrés, donc $X(T)$ est une catégorie. Si X est un groupoïde, il en va de même de $X(T)$.
REMARQUE.Il y a une sorte de réciproque, que nous n'utiliserons pas : si $X(T)$ est un groupoïde pour $T = X_1$, alors X est un groupoïde. En effet soit G le groupoïde $X(X_1)$. On a $G_1 = \mathsf{End}(X_1)$, $G_0 = \mathsf{Hom}(X_1, X_0)$, et $\mathbf{1}_{X_1}$, flèche de source s et de but t, admet un inverse S, de source t et de but s qui est un antipode.

2 Exemple fondamental

Soit $\mathfrak{C}$ le carquois de Δ^0 défini par $\mathfrak{C}_1 = \Delta_1$, $\mathfrak{C}_0 = \Delta_0$, $s = \delta_1^1$, $t = \delta_1^0$. Il est itérable : $\mathfrak{C}_n = \Delta_n$. Muni du produit $\mu = \delta_2^1 : \Delta_2 \to \Delta_1$ et de l'unité $\eta = \sigma_0^0 : \Delta_0 \to \Delta_2$, c'est une catégorie de Δ^0.
L'inclusion $i : \Delta^o \to \tilde{\Delta}^o$ est $\mathfrak{C}$-exacte, et $\tilde{\mathfrak{C}} = i(\mathfrak{C})$ est un groupoïde de $\tilde{\Delta}^o$, d'antipode $\tau = (0, 1) : \tilde{\Delta}_1 \to \tilde{\Delta}_1$.

3 Nerf d'une catégorie de $\mathcal{A}$

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie, X une catégorie de $\mathcal{A}$. Soit $\mathcal{N}(X)$ le foncteur $\Delta^o \times \mathcal{A}^o \to \mathsf{Ens}$, $(\Delta_n, T) \mapsto \mathsf{Hom}_{\mathsf{Cat}}(\Delta_n, X(T))$. Pour $n \in \mathbb{N}$, le préfaisceau $\mathcal{N}(X)(\Delta_n, ?)$ est représenté par l'objet X_n de $\mathcal{A}$. On en déduit par Yoneda un foncteur $N(X) : \Delta^o \to \mathcal{A}$ tel que $(NX)(T)$ s'identifie à $N(X(T))$, et qu'on appelle le *nerf de X*.

Theorème 1 *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie.*
1) Le foncteur nerf

$$N : \{\textit{catégories de } \mathcal{A}\} \to \underline{\mathsf{Hom}}(\Delta^o, \mathcal{A})$$

est pleinement fidèle.
2) L'image essentielle de N est formée des foncteurs $\mathfrak{C}$-exacts $\Delta^o \to \mathcal{A}$.
3) Le foncteur

$$\{\textit{foncteurs } \mathfrak{C}\textit{-exacts } \Delta^o \to \mathcal{A}\} \to \{\textit{catégories de } \mathcal{A}\},$$

$X \mapsto X(\mathfrak{C})$, est quasi-inverse au foncteur nerf.

DÉMONSTRATION. 1) et 2) Saupoudrer la démonstration dans Ens de quelques pincées de Yoneda. 3) On constate que si X est le nerf d'une catégorie C, celle-ci s'identifie à $X(\mathfrak{C})$. $\square$

Remarque. On peut donc dire que $\mathfrak{C}$ est la 'mère de toutes les catégories'.

4 Quid des groupoïdes?

Le groupoïde $\tilde{\mathfrak{C}}$ est le 'père de tous les groupoïdes'. Plus précisément :

Theorème 2 *Soit $X : \Delta^o \to \mathcal{A}$ un foncteur $\mathfrak{C}$-exact.*
La catégorie $X(\mathfrak{C})$ est un groupoïde si et seulement si X se prolonge à $\tilde{\Delta}^o$.
De plus un tel prolongement est alors unique.

Démonstration. Si X se prolonge en un foncteur $\tilde{X} : \tilde{\Delta}^o \to \mathcal{A}$, celui-ci est $\tilde{\mathfrak{C}}$-exact donc $\tilde{X}(\tilde{\mathfrak{C}}) = X(\mathfrak{C})$ est un groupoïde.
De plus $\tilde{X}(\tau)$ est alors un antipode de $X(\mathfrak{C})$. L'antipode étant unique, l'image de τ est fixée.
On conclut à l'unicité du prolongement par un lemme portant sur la catégorie $\tilde{\Delta}$. Celle-ci admet une structure monoïdale stricte, le produit tensoriel étant la juxtaposition $\sqcup$. Il y a une autre loi de composition sur les flèches, partiellement définie, que nous noterons $*$: soient $f : \tilde{\Delta}_m \to \tilde{\Delta}_p$, $g : \tilde{\Delta}_n \to \tilde{\Delta}_p$ et supposons $f(m) = g(0)$. On définit $f * g : \tilde{\Delta}_{m+n} \to \tilde{\Delta}_p$ comme étant la flèche qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\Delta}_0 \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a"'] & \tilde{\Delta}_n \arrow[d, "a'"'] \arrow[ddr, "g"] & \\
\tilde{\Delta}_m \arrow[r, "b'"] \arrow[drr, "f"'] & \tilde{\Delta}_{n+m} \arrow[dr, dashed] & \\
 & & \tilde{\Delta}_p
\end{tikzcd}
\qquad \text{où} \left\{ \begin{array}{l} a(0) = m, \\ b(0) = 0, \\ a'(k) = k + m, \\ b'(k) = k; \end{array} \right.$$

en d'autres termes,

$$(f * g)(i) = \left\{ \begin{array}{ll} f(i) & \text{si } 0 \leq i \leq m, \\ g(i - m) & \text{si } m \leq i \leq m + n. \end{array} \right.$$

Lemme 1 *Soit F un ensemble de flèches de $\tilde{\Delta}$ stable par composition et par l'opération $*$, et contenant les applications strictement croissantes. Alors F est stable par juxtaposition de $\mathbf{1}_{\Delta_0}$ à droite et à gauche.*
En particulier si F contient τ et $\mathsf{FI}(\Delta)$, $F = \mathsf{FI}(\tilde{\Delta})$.

Démonstration. Soit $f : \tilde{\Delta}_n \to \tilde{\Delta}_p$. Soient $i, i' : \tilde{\Delta}_p \to \tilde{\Delta}_{p+1}$, et $j, j' : \tilde{\Delta}_1 \to \tilde{\Delta}_{p+1}$ définis par $i = \delta_{p+1}^{p+1}$, $i' = \delta_{p+1}^{0}$, $j(0) = f(n)$, $j(1) = p + 1$,

$j'(0) = 0$, $j'(1) = f(0) + 1$. Alors De plus $if(n) = j(0)$, $j'(1) = i'f(0)$. On constate que $if * j = f \sqcup 1_{\tilde{\Delta}_0}$, et $j' * i'f = 1_{\tilde{\Delta}_0} \sqcup f$. $\square$

Soient deux foncteurs prolongeant X, et F l'ensemble des flèches de $\tilde{\Delta}$ où ils coïncident. Alors F contient τ et $\mathsf{Fl}(\Delta)$, et il est stable par composition et $*$. Les deux foncteurs sont donc égaux.
Supposons à présent que $X(\mathfrak{C})$ soit un groupoïde, et montrons que X se prolonge à $\tilde{\Delta}^o$. Traitons d'abord le cas où $\mathcal{A} = \mathsf{Ens}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on peut voir $\tilde{\Delta}_n$ comme le groupoïde (de Ens) d'objets $\{0, 1, \ldots, n\}$, avec exactement une flèche entre deux objets donnés. C'est le groupoïde fondamental de Δ_n : $\tilde{\Delta}_n = \pi_1 \Delta_n = \mathsf{Fl}(\Delta_n)^{-1} \Delta_n$.
Si $G = X(\mathfrak{C})$ est un groupoïde,

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{Cat}}(\tilde{\Delta}_n, G) \to \mathsf{Hom}_{\mathsf{Cat}}(\Delta_n, G)$$

est une bijection fonctorielle, d'où un prolongement canonique de X à $\tilde{\Delta}^o$.
Dans le cas général, ce qui précède montre que le foncteur $\Delta^o \times \mathcal{A}^o \to \mathsf{Ens}$, $(\Delta_n, T) \mapsto X(T)_n$ se prolonge en un foncteur $\tilde{\Delta}^o \times \mathcal{A}^o \to \mathsf{Ens}$. Par Yoneda, on en déduit un foncteur $\tilde{X} : \tilde{\Delta}^o \to \mathcal{A}$ qui prolonge X. $\square$