Structure de catégorie de modèles sur Cat

d'après Thomason

Au cours de ses exposés, Georges a défini les *équivalence faible de* Cat comme étant les flèches de Cat dont l'image par le foncteur 'espace classifiant' $B : \mathsf{Cat} \longrightarrow \mathsf{Top}$ est une équivalence faible. Si l'on note We' la classe des équivalences faibles de Cat, le foncteur B induit une équivalence de catégories de ${\mathsf{We}'}^{-1}\,\mathsf{Cat}$ vers la catégorie homotopique.

Le but du présent exposé est de raconter comment Thomason a construit (dans [Th]) une structure de catégorie de modèles fermée propre sur Cat de sorte que We' soit la classe des équivalences faibles pour cette structure.

On notera Ord (resp. Ord') la catégorie des ensembles ordonnés (resp. préordonnés), vue comme une sous-catégorie pleine de Cat.

1. Rappels sur les ensembles simpliciaux

La *catégorie simpliciale*, notée $\triangle$, est la sous-catégorie pleine de Ord dont les objets sont les ensembles ordonnés $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et pour $i \in [n]$, on note s_i^n (ou simplement s_i) l'unique application croissante surjective $[n+1] \to [n]$ prenant deux fois la valeur i, et, si $n > 0$, d_i^n (ou simplement d_i) l'unique application strictement croissante $[n-1] \to [n]$ ne prenant pas la valeur i.

La *catégorie des ensembles simpliciaux* est la catégorie $\widehat{\triangle}$ des préfaisceaux d'ensembles sur $\triangle$. On identifiera $\triangle$ à une sous-catégorie pleine de $\widehat{\triangle}$ par le plongement de Yoneda. Pour X ensemble simplicial, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $X_n = \mathsf{Hom}_{\widehat{\triangle}}([n], X)$ est l'ensemble des *n-simplexes de X*.

Pour $i \in [n]$, l'application $X(s_i^n) : X_n \to X_{n+1}$ est appelée *i-ième opérateur dégénérescence*, et notée σ_i^n (ou σ_i); et, si $n > 0$, l'application $X(d_i^n) : X_n \to X_{n-1}$ est appelée *i-ième opérateur face*, et notée δ_i^n (ou δ_i).

La construction suivante, déjà mentionnée par Georges, nous sera indispensable.

Soit A une petite catégorie, $\mathcal{C}$ une catégorie. Tout foncteur $F : A \longrightarrow \mathcal{C}$ définit un foncteur $F^* : \mathcal{C} \longrightarrow \widehat{A}$, donné sur les objets par

$$X \mapsto F^*(X) = \mathsf{Hom}(F(?), X)\,.$$

Si la catégorie $\mathcal{C}$ admet des petites limites inductives, F^* admet un adjoint à gauche, noté $F_!$. C'est l'unique foncteur $\widehat{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ qui prolonge F et commute aux petites limites inductives. De plus $F \mapsto F_!$ est un quasi-inverse du foncteur restriction

$$\{\text{foncteurs } \widehat{A} \longrightarrow \mathcal{C} \text{ commutant aux petites limites inductives}\} \longrightarrow \{\text{foncteurs } A \longrightarrow \mathcal{C}\}\,.$$

1.1. Remarque. Le foncteur F^* commute aux limites inductives indexées par une petite catégorie I si et seulement si pour tout objet X de A, le foncteur $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(F(X), ?)$ commute aux limites inductives indexées par I.

Exemples.

1) Réalisation géométrique.

Soit F le foncteur $\triangle \longrightarrow \mathsf{Top}$ associant à $[n]$ le n-simplexe géométrique standard. Alors le foncteur $|?| = F_!$ est le foncteur *réalisation géométrique* $\widehat{\triangle} \longrightarrow \mathsf{Top}$.

2) Nerf.

Soit F le foncteur $\triangle \longrightarrow \mathsf{Cat}$ associant à $[n]$ l'ensemble ordonné $[n] = \{0, 1, \ldots, n\}$, vu comme une catégorie. Alors $F^* : \mathsf{Cat} \longrightarrow \widehat{\triangle}$ est le foncteur *nerf*, noté N. Il a pour adjoint à gauche le foncteur $c = F_! : \widehat{\triangle} \longrightarrow \mathsf{Cat}$.

Remarques.

1) Si X est un ensemble simplicial, $c(X)$ est la catégorie ayant pour objets les sommets de X et pour flèches les chemins obtenus par concaténation d'arêtes de X, modulo les relations exprimant la commutativité des triangles définis par les 2-simplexes de X.

2) Si C est une catégorie, $N(C)_n$ est l'ensemble des foncteurs de $[n]$ dans C ; c'est donc l'ensemble des diagrammes de $\mathcal{C}$ de la forme $X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_n$.

3) Le foncteur $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Cat}}([n], ?)$ commute aux petites limites inductives filtrantes, donc N aussi (remarque **1.1.**).

3) Le foncteur N est pleinement fidèle; autrement dit on a $cN \simeq 1_{\mathsf{Cat}}$.

4) Rappelons que, par définition, $B = |N|$.

3) Subdivision barycentrique.

Si E est un ensemble ordonné, soit $f(E)$ l'ensemble des parties finies totalement ordonnées non vides de E. On l'ordonne par l'inclusion. Ceci définit un foncteur

$$f : \mathsf{Ord} \longrightarrow \mathsf{Ord} .$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $[n]'$ l'ensemble simplicial $Nf[n]$. Pour tout entier m, $[n]'_m$ s'identifie à l'ensemble des suites $\emptyset \neq A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_m \subset [n]$.

Soit $F = Nf_{|\triangle} : \triangle \longrightarrow \widehat{\triangle}$, $[n] \mapsto [n]'$.

Le foncteur $\mathsf{Sd} = F_! : \widehat{\triangle} \longrightarrow \widehat{\triangle}$ est appelé *subdivision barycentrique.* On note Ex son adjoint à droite.

L'application $f(E) \longrightarrow E$, $F \mapsto \sup(F)$, est un morphisme fonctoriel de f vers 1_{Ord}. Il en résulte un morphisme fonctoriel $e : \mathsf{Sd} \longrightarrow 1_{\widehat{\triangle}}$, et par adjonction un morphisme fonctoriel $\varepsilon : 1_{\widehat{\triangle}} \longrightarrow \mathsf{Ex}$.

1.2. Proposition. *Pour tout ensemble simplicial X, $e_X : \mathsf{Sd}\, X \longrightarrow X$ et $\varepsilon_X : X \longrightarrow \mathsf{Ex}\, X$ sont des équivalences faibles.*

Démonstration.

Soit We la classe des équivalences faibles de $\widehat{\triangle}$; rappelons que pour $w \in \mathsf{Fl}(\widehat{\triangle})$ on a : $w \in \mathsf{We} \iff |w|$ est une équivalence d'homotopie faible $\iff |w|$ est une équivalence d'homotopie. (La dernière équivalence vient du fait que la réalisation géométrique d'un ensemble simplicial est un objet fibrant et cofibrant dans Top).

Montrons la première assertion.

a) $|\,\mathsf{Sd}\,|$ et $|?|$ sont isomorphes, car $|[n]|$ et $|[n]'|$ sont fonctoriellement homéomorphes.

b) Soit F un foncteur $\widehat{\triangle} \longrightarrow \mathsf{Top}$ commutant aux petites limites inductives, et ϕ^0, ϕ^1 deux morphismes fonctoriels $F \longrightarrow |?|$. Alors pour tout ensemble simplicial X, ϕ^0_X et ϕ^1_X sont homotopes. (Considérer, pour $t \in [0,1]$, le morphisme $\phi^t : F \longrightarrow |?|$ défini par : $\phi^t_{[n]} = (1-t)\phi^0_{[n]} + t\phi^1_{[n]}$).

Appliqué à $F = |\,\mathsf{Sd}\,|$, ceci montre que tout morphisme fonctoriel $\mathsf{Sd}\,X \longrightarrow X$ est une équivalence faible.

La seconde assertion est conséquence d'un résultat de Kan.

Si X est un ensemble simplicial, on note $\mathsf{Ex}^\infty X$ la limite du système inductif

$$X \longrightarrow \mathsf{Ex}\,X \longrightarrow \mathsf{Ex}^2\,X \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathsf{Ex}^n\,X \longrightarrow \ldots$$

et ε^∞_X la flèche naturelle $X \longrightarrow \mathsf{Ex}^\infty X$.

1.3. Théorème. (Kan) *Pour tout ensemble simplicial X, $\mathsf{Ex}^\infty X$ est un complexe de Kan, et $\varepsilon^\infty_X : X \longrightarrow \mathsf{Ex}^\infty X$ est une équivalence faible.*

Démonstration. Voir l'article de Kan [2]. □

On conclut en observant que dans le triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varepsilon_X"] \arrow[dr, "\varepsilon^\infty_X"'] & \mathsf{Ex}\,X \arrow[d, "\varepsilon^\infty_{\mathsf{Ex}\,X}"] \\ & \mathsf{Ex}^\infty X \end{tikzcd}$$

deux des côtés sont des équivalences faibles, donc le troisième aussi. □

4) L'ensemble ordonné des faces d'un ensemble simplicial.

Le foncteur d'inclusion $i' : \mathsf{Ord}' \hookrightarrow \mathsf{Cat}$ admet un adjoint à gauche p' : pour une catégorie C, $p'(C)$ est l'ensemble préordonné $(\mathsf{Ob}\,C, \leq)$ où $x \leq y \Longleftrightarrow \mathsf{Hom}_C(x,y) \neq \emptyset$. D'autre part, le foncteur d'inclusion $i_0 : \mathsf{Ord} \hookrightarrow \mathsf{Ord}'$ admet un adjoint à gauche p_0 : si E un ensemble préordonné, $p_0(E)$ est le quotient de E par la relation d'équivalence $x \sim y \Longleftrightarrow x \leq y$ et $y \leq x$.

Ainsi les petites limites inductives existent dans Ord et dans Ord'.

Le foncteur $F = f_{|\triangle} : \triangle \longrightarrow \mathsf{Ord}$ s'étend en un foncteur $F_! : \widehat{\triangle} \longrightarrow \mathsf{Ord}$ dont nous allons donner maintenant une description explicite.

À tout ensemble simplicial X, on associe un ensemble préordonné $\Phi'(X)$. C'est l'ensemble $\coprod X_n$ des simplexes de X, muni du préordre défini comme suit : si x, y sont deux simplexes de X, $x \leq y \Longleftrightarrow \exists \phi \in \mathsf{Fl}\,\triangle \mid X(\phi)y = x$ (x est 'contenu dans y'). Ceci définit un foncteur $\Phi' : \widehat{\triangle} \longrightarrow \mathsf{Ord}'$ dont on vérifie aisément qu'il commute aux petites limites inductives.

Pour un ensemble simplicial X, on appelle *ensemble ordonné des faces de X*, et on note $\Phi(X)$, l'ensemble ordonné $p_0(\Phi'(X))$; c'est donc le quotient de l'ensemble des simplexes de X par la relation d'équivalence : $x \sim y \Longleftrightarrow x \leq y$ et $y \leq x$.

Rappelons qu'un simplexe x est *non dégénéré* si $x = X(\phi)y \Longrightarrow \phi$ injectif.

Exercice. La surjection canonique $\Phi'(X) \longrightarrow \Phi(X)$ induit une bijection de l'ensemble des simplexes non dégénérés sur l'ensemble des faces.

Le foncteur $\Phi = p_0\Phi' : \widehat{\triangle} \longrightarrow \mathsf{Ord}$ commute aux petites limites inductives. Par ailleurs $\Phi[n]$ s'identifie à l'ensemble des parties non vides de $[n]$, qui n'est autre que $f[n]$.

Ainsi, le foncteur $F_!$ s'identifie à Φ.

Remarque. Si Y est un sous-ensemble simplicial de X, $\Phi(Y)$ est un crible de $\Phi(X)$.

Rapports entre faces et subdivision barycentrique

Soit p l'adjoint à gauche au foncteur d'inclusion $i : \mathsf{Ord} \hookrightarrow \mathsf{Cat}$. Pour toute petite catégorie C on a une flèche naturelle $C \longrightarrow p(C)$, qui est un isomorphisme si et seulement si C est un ensemble ordonné.

On a $pc[n]' = pcNf[n] = pf[n] \simeq f[n]$ car $f[n]$ est un ensemble ordonné. Ainsi, les foncteurs Φ et $pc\,\mathsf{Sd}$, qui commutent aux petites limites inductives, coïncident sur $\triangle$. Ils sont donc canoniquement isomorphes, et on les identifiera : $\Phi = pc\,\mathsf{Sd}$.

Si X est un ensemble simplicial, on a donc une flèche naturelle $c\,\mathsf{Sd}\,X \longrightarrow \Phi(X)$, et par adjonction une flèche $\sigma_X : \mathsf{Sd}\,X \longrightarrow N\Phi(X)$ qui, en général, n'est pas un isomorphisme.

1.4. Définition. Un ensemble simplicial X est *régulier* si tout simplexe non dégénéré de X est un monomorphisme de $\widehat{\triangle}$ (on voit un n-simplexe comme un morphisme $[n] \to X$).

1.5. Remarques.

1) Le nerf d'un ensemble ordonné est un ensemble simplicial régulier.

2) Si un ensemble simplicial X est régulier, il en va de même de ses sous-ensembles simpliciaux.

3) Un ensemble simplicial qui est réunion de sous-ensembles simpliciaux réguliers est régulier.

1.6. Proposition. *Si X est un ensemble simplicial régulier, la flèche naturelle σ_X est un isomorphisme $\mathsf{Sd}\,X \xrightarrow{\sim} N\Phi(X)$.*

Démonstration. On procède par étapes.

a) Un ensemble simplicial X est *fini* s'il est limite inductive finie d'objets de $\triangle$, ce qui équivaut à dire que $\Phi(X)$ est un ensemble fini.

Tout ensemble simplicial est réunion filtrante de ses sous-ensembles simpliciaux finis. De plus les foncteurs Sd, Φ et N commutent aux petites limites inductives filtrantes. On peut donc supposer X fini.

b) Soit X un ensemble simplicial, $Y, Z \subset X$ tels que $X = Y \cup Z$. Alors $N\Phi X = N\Phi Y \amalg_{N\Phi T} N\Phi Z$.

Cela résultera du lemme suivant, qui est immédiat.

1.7. Lemme. *Soit A une catégorie, C et C' deux cribles (ou deux cocribles) de A tels que $C \cup C' = A$. Alors $N(A) = N(C) \amalg_{N(C \cap C')} N(C')$.* $\square$

On applique le lemme à $A = \Phi X$; $C = \Phi Y$ et $C' = \Phi Z$ sont deux cribles de A de réunion A et d'intersection ΦT.

c) Avec les mêmes hypothèses qu'en b), si σ_Y, σ_Z et σ_T sont des isomorphismes, il en va de même de σ_X, car $\mathsf{Sd}\, X = \mathsf{Sd}\, Y \amalg_{\mathsf{Sd}\, T} \mathsf{Sd}\, Z$.

d) Pour $X = \emptyset$ ou $X = [n]$, σ_X est un isomorphisme. Soit X fini, régulier, non vide, et α un simplexe non dégénéré de X de dimension maximale n. Alors $X = Y \cup Z$, où Y est l'image de α et Z le plus grand sous-ensemble simplicial de X ne contenant pas α. De plus $Y \simeq [n]$, Z a moins de faces que X, ainsi que $T = Y \cap Z$. On conclut par récurrence sur le nombre de faces, en utilisant c). $\square$

1.8. Corollaire. *Si X est un ensemble simplicial régulier, $\mathsf{Sd}\, X$ est régulier et on a : $c\,\mathsf{Sd}\, X = \Phi X$, $Nc\,\mathsf{Sd}\, X = \mathsf{Sd}\, X$ et $c\,\mathsf{Sd}^2\, X = f\Phi(X)$.*

DÉMONSTRATION. On a $\mathsf{Sd}\, X = N\Phi(X)$ donc $\mathsf{Sd}\, X$ est régulier. D'autre part $cN = 1_{\mathsf{Cat}}$, donc $c\,\mathsf{Sd}\, X = cN\Phi(X) = \Phi(X)$ et $Nc\,\mathsf{Sd}\, X = N\Phi(X) = \mathsf{Sd}\, X$. On a pour tout ensemble ordonné E : $\Phi N(E) = f(E)$. Appliqué à $E = \Phi(X)$ cela donne $f\Phi(X) = \Phi N\Phi(X) = \Phi(\mathsf{Sd}\, X) = c\,\mathsf{Sd}^2\, X$. $\square$

2. Catégories de modèles

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, et $(A \xrightarrow{i} B, X \xrightarrow{p} Y)$ un couple de flèches de $\mathcal{C}$. On dira que (i, p) *a la propriété de relèvement* si tout carré commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

peut être complété en un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r] \arrow[ur] & Y \end{tikzcd}$$

Si Σ est une classe de flèches de $\mathcal{C}$, on considère deux classes de flèches de $\mathcal{C}$:

$$R_G(\Sigma) = \{i \mid \forall p \in \Sigma, (i,p) \text{ a la propriété de relèvement}\}$$
$$R_D(\Sigma) = \{p \mid \forall i \in \Sigma, (i,p) \text{ a la propriété de relèvement}\}$$

2.1. Remarques.

1) $R_G(\Sigma)$ contient les isomorphismes, est stable par composition, par rétractes, par sommes, et par images directes.

De plus étant donnée un système inductif de $\mathcal{C}$ indexé par $\mathbb{N}$:

$$X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_n \xrightarrow{f_n} X_{n+1} \longrightarrow \ldots$$

admettant une limite, si chacune des flèches f_n appartient à $R_G(\Sigma)$, la flèche naturelle $g : X_0 \longrightarrow \varinjlim X_n$ appartient à $R_G(\Sigma)$. Appelant $g = \ldots f_n f_{n-1} \ldots f_0$ la *composée dénombrable (vers la gauche)* des f_n, on dira que $R_G(\Sigma)$ est *stable par composition dénombrable vers la gauche.*

On a évidemment les propriétés duales pour $R_D(\Sigma)$.

2) Soit $\nu : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ un foncteur admettant un adjoint à gauche γ. Pour $i \in \mathsf{Fl}\,\mathcal{C}$ et $p' \in \mathsf{Fl}\,\mathcal{C}'$, $(i, \nu(p'))$ a la propriété de relèvement si et seulement si $(\gamma(i), p')$ a la propriété de relèvement.

Autrement dit, si Σ est une classe de flèches de $\mathcal{C}$, on a

$$R_D(\gamma(\Sigma)) = \nu^{-1} R_D(\Sigma)\,;$$

et si Σ' est une classe de flèches de $\mathcal{C}'$,

$$R_G(\nu(\Sigma')) = \gamma^{-1} R_G(\Sigma')\,.$$

2.2. Définition. Une *catégorie de modèles fermée* est une catégorie $\mathcal{C}$ munie de trois classes de flèches We, Fib, Cofib, telles que, si l'on pose $\mathsf{Tfib} = \mathsf{Fib} \cap \mathsf{We}$ et $\mathsf{Tcofib} = \mathsf{Cofib} \cap \mathsf{We}$, on ait les axiomes suivants :

CM1 $\mathcal{C}$ admet des limites inductives et projectives finies.

CM2 Si deux flèches d'un triangle commutatif de $\mathcal{C}$ sont dans We il en va de même de la troisième.

CM3 (a) Fib, (b) We et (c) Cofib sont stables par rétractes.

CM4 (a) $\mathsf{Cofib} \subset R_G(\mathsf{Tfib})$ et (b) $\mathsf{Fib} \subset R_D(\mathsf{Tcofib})$.

CM5 Toute flèche f de $\mathcal{C}$ s'écrit (a) $f = pi$, avec $p \in \mathsf{Tfib}$, $i \in \mathsf{Cofib}$, et (b) $f = qj$, avec $q \in \mathsf{Fib}$, $j \in \mathsf{Tcofib}$.

On dit que c'est une catégorie de modèles fermée *propre* si elle vérifie en outre :

Pr We est stable (a) par image directe par les flèches de Cofib, et (b) par images inverses par les flèches de Fib.

2.3. Remarque. Cette définition est équivalente à celle de Quillen (donnée par Georges). En effet, les axiomes **CM3**, **CM4**, **CM5** entraînent $\mathsf{Fib} = R_D(\mathsf{Cofib})$, $\mathsf{Cofib} = R_G(\mathsf{Fib})$, $\mathsf{Tfib} = R_D(\mathsf{Cofib})$, $\mathsf{Tcofib} = R_G(\mathsf{Fib})$. En outre il résulte de **CM2** et **CM5** que les éléments de We sont les flèches qui s'écrivent pi, avec $p \in \mathsf{Tfib}$ et $i \in \mathsf{Tcofib}$.

2.4. Exemples. On connait deux exemples de catégories de modèles fermées propres :
— la catégorie Top des espaces topologiques, avec

$$\mathsf{We}_{\mathsf{Top}} = \{\text{équivalences d'homotopie faibles}\}, \quad \mathsf{Fib}_{\mathsf{Top}} = \{\text{fibrations de Serre}\},$$
$$\mathsf{Tfib}_{\mathsf{Top}} = \mathsf{Fib}_{\mathsf{Top}} \cap \mathsf{We}_{\mathsf{Top}}, \quad \text{et} \quad \mathsf{Cofib}_{\mathsf{Top}} = R_G(\mathsf{Tfib}_{\mathsf{Top}})\,;$$

— la catégorie $\widehat{\triangle}$ des ensembles simpliciaux, avec

$$\mathsf{We} = |?|^{-1}\,\mathsf{We}_{\mathsf{Top}}, \quad \mathsf{Fib} = \{\text{fibrations de Kan}\}, \quad \text{et} \quad \mathsf{Cofib} = \{\text{monomorphismes}\}\,.$$

2.5. Remarque.

Soit $\mathcal{M} = (\mathcal{C}, \mathsf{We}, \mathsf{Fib}, \mathsf{Cofib})$ une catégorie de modèles fermée, $\mathcal{C}'$ une catégorie admettant des limites inductives et projectives finies, et $\nu : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ un foncteur.

Posons $\mathsf{We}' = \nu^{-1}\,\mathsf{We}$, $\mathsf{Fib}' = \nu^{-1}\,\mathsf{Fib}$, et $\mathsf{Cofib}' = R_G(\mathsf{Fib}' \cap \mathsf{We}')$.

On constate alors immédiatement que $\mathcal{M}' = (\mathcal{C}', \mathsf{We}', \mathsf{Fib}', \mathsf{Cofib}')$ vérifie **CM1**, **CM2**, **CM3**, **CM4** (a); de plus si $\mathcal{M}$ est propre, et si ν préserve les carrés cartésiens, $\mathcal{M}'$ vérifie **Pr** (b).

On serait donc tenté d'appliquer la remarque qui précède à la situation $\mathcal{C} = \widehat{\triangle}$, $\mathcal{C}' = \mathsf{Cat}$, et $\nu = N$; mais cela ne définit pas une structure de catégorie de modèle sur Cat.

Toutefois, Thomason s'est aperçu qu'il suffisait de remplacer N par $\nu = \mathsf{Ex}^2 N$: $\mathsf{Cat} \longrightarrow \widehat{\triangle}$ pour que cela marche. Ce foncteur admet un adjoint à gauche $\gamma = c\,\mathsf{Sd}^2$.

Posons donc :

$$\mathsf{We}' = \nu^{-1}(\mathsf{We}), \quad \mathsf{Fib}' = \nu^{-1}\,\mathsf{Fib}, \quad \mathsf{Cofib}' = R_G(\mathsf{Fib}' \cap \mathsf{We}')$$
$$\mathsf{Tfib}' = \mathsf{Fib}' \cap \mathsf{We}' \quad \text{et} \quad \mathsf{Tcofib}' = \mathsf{Cofib}' \cap \mathsf{We}'\,.$$

On a vu (**1.2.**) que le morphisme fonctoriel $\varepsilon_X : X \longrightarrow \mathsf{Ex}\,X$ est une équivalence faible; on a donc, pour $f \in \mathsf{Fl}\,\mathsf{Cat}$: $N(f) \in \mathsf{We} \Longleftrightarrow \nu(f) \in \mathsf{We}$, de sorte que la classe We' coïncide avec la classe des équivalences faibles de Cat.

2.6. Théorème. (Thomason) $(\mathsf{Cat}, \mathsf{We}', \mathsf{Fib}', \mathsf{Cofib}')$ *est une catégorie de modèles fermée propre.*

3. Démonstration du théorème

Les petites limites inductives et projectives existent dans Cat, et le foncteur ν admet un adjoint à gauche; il suffit donc de vérifier **CM4** (b), **CM5** et **Pr** (a).

Cornes et gidouilles

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, et $k \in [n]$. Rappelons que $d_k : [n-1] \longrightarrow [n]$ est l'application strictement croissante d'image $[n] - \{k\}$; on la voit comme un morphisme de $\widehat{\Delta}$. On note $[n, k]$ le sous-ensemble simplicial de $[n]$ réunion des images des d_i pour $i \in [n] - \{k\}$. On convient que $[0, 0] = [0]$. Les inclusions de la forme $[n, k] \hookrightarrow [n]$ s'appellent les *cornes simpliciales*.

De même, notons $\partial[n]$ le sous-ensemble simplicial de $[n]$ réunion des images des d_i pour tout $i \in [n]$. On convient que $\partial[0] = \emptyset$. Par patanalogie, appelons *gidouilles simpliciales* les inclusions $\partial[n] \hookrightarrow [n]$.

Par définition des fibrations de Kan, on a $\mathsf{Fib} = R_D(\{\text{cornes simpliciales}\})$. De plus, $\mathsf{Tfib} = R_D(\{\text{gidouilles simpliciales}\})$.

On appelle *cornes* (resp. *gidouilles*) *catégoriques* les images par γ des cornes (resp. des gidouilles) simpliciales.

Posons $\Sigma_c = \{\text{cornes catégoriques}\}$ et $\Sigma_g = \{\text{gidouilles catégoriques}\}$.

On a $\mathsf{Fib}' = \nu^{-1}\mathsf{Fib} = R_D(\Sigma_c)$, $\mathsf{Tfib}' = \nu^{-1}(\mathsf{Tfib}) = R_D(\Sigma_g)$; et par définition $\mathsf{Cofib}' = R_G R_D(\Sigma_g)$. (Par contre on ne sait pas encore que $\mathsf{Tcofib}' = R_G R_D(\Sigma_c)$.)

L'assertion **CM5** (a) signifie donc que toute flèche de $\mathcal{C}$ s'écrit pi avec $p \in R_D(\Sigma_g)$ et $i \in R_G R_D(\Sigma_g)$.

Ceci résulte immédiatement d'un énoncé très général.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie où les petites limites inductives existent.

3.1. Définition. Un objet X de $\mathcal{C}$ est dit *fin* si le foncteur $\mathsf{Hom}(X, ?)$ commute aux limites inductives indexées par $\mathbb{N}$.

3.2. Proposition. *Tout ensemble simplicial fini est un objet fin de $\widehat{\Delta}$, et son image par γ est un objet fin de* Cat.

Démonstration. On procède par étapes.

a) Si X est un ensemble simplicial fini, $\mathsf{Hom}(X, ?)$ commute aux petites limites inductives filtrantes; en particulier X est un objet fin de $\widehat{\Delta}$.

b) Pour tout n, $\mathsf{Sd}[n] = [n]'$ est un ensemble simplicial fini, donc le foncteur Ex commute aux petites limites inductives filtrantes (remarque **1.1.**), et comme N commute lui aussi aux petites limites inductives filtrantes, il en va de même de $\nu = \mathsf{Ex}^2 N$.

c) Soit $F : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ un foncteur admettant un adjoint à droite G qui commute aux limites inductives indexées par $\mathbb{N}$. Alors l'image par F d'un objet fin de $\mathcal{C}'$ est un objet fin de $\mathcal{C}$.

d) Ceci s'applique au foncteur $\gamma : \widehat{\Delta} \longrightarrow \mathsf{Cat}$, dont l'adjoint à droite ν commute aux limites inductives filtrantes; on en déduit que pour tout ensemble simplicial fini X, $\gamma(X)$ est un objet fin de Cat. $\square$

Si Σ est une classe de flèches de $\mathcal{C}$, notons $X(\Sigma)$ la classe des images directes de sommes de flèches de Σ, et $\Sigma^{+\infty}$ la classe des composées dénombrables vers la gauche de flèches appartenant à Σ. On a donc $X(\Sigma)^{+\infty} \subset R_G R_D(\Sigma)$.

3.3. Proposition. *Soit Σ un ensemble de flèches de $\mathcal{C}$ dont les sources sont des objets fins. Alors toute flèche f de $\mathcal{C}$ s'écrit naturellement pi, où $p \in R_D(\Sigma)$, et $i \in X(\Sigma)^{+\infty}$.*

3.4. Remarque. En particulier, on a $i \in R_G R_D(\Sigma)$; de plus si $f \in R_G R_D(\Sigma)$, f est un rétracte de i.

Démonstration.

Soit $f : E \longrightarrow F$ une flèche de $\mathcal{C}$. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des carrés commutatifs de la forme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "s"'] & E \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r] & F \end{tikzcd}$$

avec $s \in S$. Pour $d \in \mathcal{D}$ on notera

$$\begin{tikzcd} A_d \arrow[r] \arrow[d, "s_d"'] & E \arrow[d, "f"] \\ B_d \arrow[r] & F \end{tikzcd}$$

le carré correspondant.

Posons $\sigma = \coprod_{d \in \mathcal{D}} s_d : A_1 = \coprod_d A_d \longrightarrow B_1 = \coprod_d B_d$. Soit $E_1 = E \amalg_{A_1} B_1$, $i_1 : E \longrightarrow A_1$ et $p_1 : E_1 \longrightarrow F$ les flèches qui s'en déduisent. En tant qu'image directe de σ, i_1 appartient à $X(\Sigma)$, et on a $f = p_1 i_1$.

On peut appliquer ce procédé à $p_1 : E_1 \longrightarrow F$ en lieu et place de f, et, par itération, on construit une suite de morphismes appartenant à $X(\Sigma)$:

$$E \xrightarrow{i_1} E_1 \xrightarrow{i_2} E_1 \xrightarrow{i_3} E_2 \longrightarrow \dots ,$$

et des flèches $p_n : E_n \longrightarrow F$, avec $f = p_n i_n$. Soit E_∞ la limite de ce système inductif, $i : E \longrightarrow E_\infty$ et $p : E_\infty \longrightarrow F$ les flèches qui s'en déduisent.

Alors $f = pi$, et i appartient à $X(\Sigma)^{+\infty}$ par construction; reste à vérifier que p est dans $R_D(\Sigma)$.

Donnons-nous un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "s"'] & E_\infty \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "b"'] & F \end{tikzcd}$$

avec $s \in \Sigma$, qu'il s'agit de compléter par une flèche $B \longrightarrow E_\infty$.

L'objet A étant fin, a se relève en un morphisme $a' : A \longrightarrow E_n$ pour un $n \in \mathbb{N}$. Par construction, on peut trouver un morphisme $c : B \longrightarrow A_{n+1}$ tel que $b = p_{n+1}c$ et $cs = i_n a'$; et la composée de c avec $E_n \longrightarrow E_\infty$ convient. $\square$

Appliquée à $\Sigma = \Sigma_g$, la proposition entraîne directement l'assertion **CM5** (a).

Appliquée à $\Sigma = \Sigma_c$, elle entraîne que toute flèche de $\mathcal{C}$ s'écrit pi, avec $p \in \mathsf{Fib}'$ et $i \in X(\Sigma_c)^{+\infty} \subset R_G(\mathsf{Fib}')$; un tel i appartient en particulier à Cofib', car on a $R_G(\mathsf{Fib}') \subset R_G(\mathsf{Tfib}') = \mathsf{Cofib}'$.

Pour démontrer **CM5** (b), il suffirait donc de montrer que $X(\Sigma_c)^{+\infty}$ est contenu dans We'; mais ce n'est pas une simple formalité.

Pour surmonter cette difficulté, on fait la remarque suivante. Supposons qu'il existe une classe $\mathcal{D} \subset \mathsf{We}'$ vérifiant les conditions suivantes :

D1 $\mathcal{D}$ contient les cornes catégoriques;

D2 $\mathcal{D}$ est stable par sommes, images directes, et composition dénombrable vers la gauche;

et voyons ce qu'il en résulte.

On a $\Sigma_c \subset \mathcal{D}$ par **D1**, et donc $X(\Sigma_c)^{+\infty} \subset \mathcal{D}$ par **D2**. En particulier, $X(\Sigma_c)^{+\infty} \subset \mathsf{We}'$ d'où **CM5** (b).

Par ailleurs soit $A \xrightarrow{i} B \in \mathsf{Tcofib}'$. On sait que i s'écrit qj, avec $A_\infty \xrightarrow{q} B$ dans Fib' et $A \xrightarrow{j} A_\infty$ dans $X(\Sigma_c)^{+\infty} \subset \mathsf{We}'$. On a $i,\ j \in \mathsf{We}'$ donc $q \in \mathsf{We}'$ en vertu de **CM2**, et (i, q) a la propriété de relèvement par **CM4** (a). En particulier i est un rétracte de j. Or $\Sigma_c \subset R_G(\mathsf{Fib}')$, donc j appartient à $R_G(\mathsf{Fib}')$, ainsi que i qui est un rétracte de j. Ceci démontre **CM4** (b).

Ainsi l'existence d'une telle classe $\mathcal{D}$ entraîne que $(\mathsf{Cat}, \mathsf{We}', \mathsf{Fib}', \mathsf{Cofib}')$ est une catégorie de modèles fermée. Reste à vérifier l'axiome **Pr** (b). Puisque nous avons invoqué un *Deus ex machina* pour démontrer **CM5** (b) et **CM4** (b) d'un seul coup, pourquoi ne pas en invoquer un second qui nous permettrait de conclure?

Supposons qu'il existe une classe $\mathcal{D}' \subset \mathsf{Fl}\,\mathsf{Cat}$ vérifiant les conditions suivantes :

D1' $\mathcal{D}'$ contient les gidouilles catégoriques;

D2' $\mathcal{D}'$ est stable par sommes, images directes, et composition dénombrable vers la gauche;

D3' We' est stable par image directe par un élément de $\mathcal{D}'$;

et montrons que **Pr** (b) en résulte.

Soit $f \in \mathsf{Cofib}'$; on l'écrit $f = pi$, avec $p \in \mathsf{Tfib}'$ et $i \in X(\Sigma_g)^{+\infty}$. Puisque (f, p) a la propriété de relèvement par **CM4** (a), f est un rétracte de i. Par ailleurs, on a $X(\Sigma_g)^{+\infty} \subset \mathcal{D}'$ d'après **D1'** et **D2'**, donc $i \in \mathcal{D}'$. Soit $w \in \mathsf{We}'$ ayant même source que i, et w' son image directe par i. D'après **D3'**, on a $w' \in \mathsf{We}'$; et puisque f est un rétracte de i, l'image directe de w par f est un rétracte de w' et à ce titre, appartient à We'. Ceci démontre **Pr (b)**, et achève la démonstration du théorème.

Reste maintenant à fabriquer la *machina* d'où vont sortir nos *Dei*. Cette machine, c'est une nouvelle classe de flèches de Cat, les 'morphismes de Dwyer'. C'est cette classe qui incarnera le *Deus* $\mathcal{D}'$, le rôle de $\mathcal{D}$ étant dévolu à $\mathcal{D}' \cap \mathsf{We}'$.

4. Morphismes de Dwyer

Soit B une catégorie. Si A est une sous-catégorie de B, on notera $Z_B(A)$ le plus petit cocrible de B contenant A; c'est la sous-catégorie pleine de B dont les objets sont les buts des morphismes de B ayant pour source un objet de A.

4.1. Définition. Soit B une catégorie et A un crible de B. On dira que A est un *crible de Dwyer de* B s'il existe un crocrible W de B contenant A et tel que l'inclusion $A \subset W$ admette un adjoint à droite.

4.2. Remarque. S'il existe un tel cocrible W, c'est nécessairement $Z_B A$.

4.3. Proposition. *Soit A un crible de B. C'est un crible de Dwyer si et seulement si pour tout objet b de B, la catégorie $A_{|b}$ est vide ou admet un objet final.*

Démonstration.

Soit A un crible de B, $W = Z_B A$, i l'inclusion $A \hookrightarrow W$. Pour b objet de B, on a $A_{|b} \neq \emptyset$ si et seulement si b est un objet de W. Si i admet un adjoint à droite r, $r(b) \to b$ est un objet final de $A_{|b}$ pour b objet de W. Inversement, si pour tout b objet de W, $A_{|b}$ admet un objet final, choisissons un tel objet $(r(b), u_b)$. Ceci définit un foncteur $r : W \longrightarrow A$ qui est un adjoint à droite de i. □

4.4. Définition. Un morphisme $f : A \longrightarrow B$ de Cat est un *morphisme de Dwyer* s'il est injectif, et si son image est un crible de Dwyer de B.

On note Dwy la classe des morphismes de Dwyer.

4.5. Proposition. *La classe* Dwy *est stable par sommes, par rétractes, et par composition dénombrable vers la gauche. Il en va de même de la classe* $\mathsf{Dwy} \cap \mathsf{We}'$.

Démonstration. Montrons par exemple la stablilité de Dwy par composition dénombrable vers la gauche. Soit $A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots \subset A_\infty$, où A_n est un crible de Dwyer de A_{n+1} et A_∞ est la réunion des A_n. Alors A_0 est un crible de A_∞. Reste à montrer que si a est un objet de A_∞, $A_{0\,|a}$ admet un objet final. Mais il existe n tel que a soit un objet de l'un des A_n. Si $n = 0$, c'est bon. Sinon, on conclut par récurrence en notant que $A_{n-1\,|a}$ admet un objet final $a' \longrightarrow a$, et $A_{0\,|a} \xrightarrow{\sim} A_{0\,|a'}$.

Par ailleurs on a $N(A_\infty) = \bigcup N(A_n)$. Si pour tout n, $i_n : A_n \longrightarrow A_{n+1}$ appartient à We', chacun des $N(i_n)$ appartient à Tcofib, ainsi que leur composée $N(A_0) \longrightarrow N(A_\infty)$, donc $A_0 \longrightarrow A_\infty$ appartient à We'.

Le reste est à l'avenant. □

4.6. Proposition. *Soit X un ensemble simplicial régulier, Y un sous-ensemble simplicial de X, et $i : Y \longrightarrow X$ l'inclusion. Alors on a $\gamma(i) \in \mathsf{Dwy}$.*

4.7. Remarques.

1) En fait, à ce stade, nous avons seulement besoin d'appliquer cet énoncé aux cornes et aux gidouilles simpliciales; nous verrons plus tard que dans cet énoncé, on peut supprimer l'hypothèse de régularité (voir **5.1.**).

2) La proposition n'est plus vraie si l'on remplace γ par c. Par exemple, l'image par c de la gidouille $\partial[1] \longrightarrow [1]$ n'est pas un morphisme de Dwyer. En effet $c[1] = [1] = \{0, 1\}$ muni de l'ordre usuel, et $c(\partial[1]) = \{0, 1\}$ muni de l'ordre discret; ce n'est donc pas une sous-catégorie pleine de $c[1]$.

Démonstration.

Rappelons que si X est un ensemble simplicial régulier, $c\,\mathsf{Sd}\,X$ est l'ensemble ordonné $\Phi(X)$ des faces de X, et $\gamma(X) = c\,\mathsf{Sd}^2\,X =$ est l'ensemble ordonné $f(\Phi(X))$ des parties totalement ordonnées finies non vides de $\Phi(X)$ (voir **1.8.**).

Soit $i : Y \hookrightarrow X$ une inclusion d'ensembles simpliciaux réguliers. Alors ΦY est un crible de ΦX, et $\gamma(i)$ est l'inclusion $f\Phi Y \hookrightarrow f\Phi X$. On conclut par le lemme suivant, qui est immédiat.

4.8. Lemme. *Soit B un ensemble ordonné, et A une partie de B munie de l'ordre induit. Alors :*

a) $f(A)$ est un crible de $f(B)$;

b) si A est un crible de B, $f(A)$ est un crible de Dwyer de $f(B)$. □ □

4.9. Proposition. *Considérons dans* Cat *un carré cocartésien*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & A' \arrow[d, "i'"] \\ B \arrow[r, "f'"'] & B' \end{tikzcd}$$

où i *est un morphisme de Dwyer.*

Alors :

(i) i' *est un morphisme de Dwyer;*

(ii) l'application canonique $NB \amalg_{NA} NC \longrightarrow N(B \amalg_A C)$ *appartient à* We*;*

(iii) $i \in \mathsf{We}' \Longrightarrow i' \in \mathsf{We}'$, *et* $f \in \mathsf{We}' \Longrightarrow f' \in \mathsf{We}'$.

Démonstration.

(i) Soit $W = Z_B A$, et $W' = W \amalg_A A'$. On a donc deux carrés cocartésiens superposés :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "j"'] & A' \arrow[d, "j'"] \\ W \arrow[r] \arrow[d] & W' \arrow[d] \\ B \arrow[r] & B' \end{tikzcd}$$

Une image directe d'un crible (resp. un cocrible) est encore un crible (resp. un cocrible). Ainsi i' est un crible, et $W' \longrightarrow B'$ est un cocrible.

D'autre part $j : A \hookrightarrow W$ admet un adjoint à droite $r : W \to A$. On peut choisir r de sorte que $rj = 1_A$, la flèche d'adjonction $1_A \longrightarrow rj$ étant l'identité.

Posons $r' = r \amalg_A 1_{A'} : W' \longrightarrow A'$; alors $r'j' = 1'_A$. La flèche d'adjonction $\alpha : jr \to 1_W$ induit une flèche $\alpha' : j'r' \to 1_{W'}$.

Ceci fait du foncteur r' un adjoint à droite de $j' : A' \hookrightarrow W'$.

Par conséquent i' est un morphisme de Dwyer. De plus, on a $W' = Z_{B'} A'$.

(ii) On procède par étapes.

a) Dans un premier temps, on travaille sur le morphisme de Dwyer i. Puisque $j : A \longrightarrow W$ admet un adjoint à droite, $Nj : NA \longrightarrow NW$ est un élément de We. Soit V la sous-catégorie pleine de B définie par $\mathsf{Ob}\, V = \mathsf{Ob}\, B - \mathsf{Ob}\, A$; V et W sont des cocribles de W dont la réunion est W. Posons $V_0 = V \cap W$. On a alors $B = V \amalg_{V_0} W$. D'après le lemme **1.7,** il en résulte $NB = NV \amalg_{NV_0} NW$.

b) Notons de même V' la sous-catégorie pleine de B' définie par $\mathsf{Ob}\, V' = \mathsf{Ob}\, B' - \mathsf{Ob}\, A'$, et $V'_0 = V' \cap W'$. Alors le morphisme f' induit des isomorphismes de catégories $V \xrightarrow{\sim} V'$ et $V_0 \xrightarrow{\sim} V'_0$.

En effet, soit $Q = B/A$. Si on note ${V_0}^*$ la catégorie obtenue en adjoignant formellement un objet initial $*$ à V_0, on a $Q \simeq V \amalg_{V_0} {V_0}^*$. Ainsi V s'identifie à la sous-catégorie pleine de Q dont les objets sont les $q \neq *$, et V_0 à celle dont les objets sont les $q \neq *$ tels que $\mathsf{Hom}_Q(*, q) \neq \emptyset$.

De même, $Q' = B'/A' \simeq V' \amalg_{V_0'} V_0'^{*}$. Or on a $B'/A' = (B \amalg_A A')/(A \amalg_A A') \simeq B/A$, donc le morphisme $Q \to Q'$ induit par f' est un isomorphisme, d'où l'assertion.

c) La flèche $NB \amalg_{NA} NA' \longrightarrow N(B \amalg_A A')$ se décompose comme suit : $NB \amalg_{NA} NA' \xrightarrow{a} NB \amalg_{NW} NW' \simeq (NV \amalg_{NV_0} NW) \amalg_{NW} NW' = NV \amalg_{NV_0} NW' \simeq NV' \amalg_{NV_0'} NW' \simeq NB'$.

Il suffit donc de démontrer que la flèche a admet un quasi-inverse.

Or, $Nj : NA \longrightarrow NW$ admet pour quasi-inverse Nr, et $Nj' : NA' \longrightarrow NB'$ admet pour quasi-inverse Nr'. Soit $b : NB \amalg_{NW} NW' \longrightarrow NB \amalg_{NA} NA'$ la flèche induite par Nr et Nr'; c'est clairement un inverse à gauche de a. Par ailleurs le morphisme d'adjonction $\alpha : jr \longrightarrow 1_W$ induit une homotopie $[1] \times NW \longrightarrow NW$ de $N(j)N(r)$ à 1_{NW}, et de même, le morphisme d'adjonction $\alpha' : j'r' \longrightarrow 1'_W$ induit une homotopie $[1] \times NW' \longrightarrow NW'$ de $N(j')N(r')$ à $1_{NW'}$. En outre, le carré

$$\begin{tikzcd}
[1] \times NW \arrow[r] \arrow[d] & NW \arrow[d] \\
[1] \times NW' \arrow[r] & NW'
\end{tikzcd}$$

est commutatif par construction de j' et α'. On en déduit une homotopie de ab à l'identité de $NB \amalg_{NW} NW'$. Ainsi b est le quasi-inverse cherché.

(iii) Notons w la flèche $NB \amalg_{NA} NA' \longrightarrow N(B \amalg_A A')$, qui appartient à We, et soient $u : NB \longrightarrow NB \amalg_{NA} NA'$, $v : NA' \longrightarrow NB \amalg_{NA} NA'$ les flèches naturelles. On a $Nf' = wu$ et $Ni' = wv$. Supposons $Nf \in \mathsf{We}$. Puisque i est injectif, Ni est injectif donc c'est une cofibration. Ainsi $u \in \mathsf{We}$ en vertu de **Pr (b)** pour $\widehat{\triangle}$, et $Nf' = wu \in \mathsf{We}$ donc $f' \in \mathsf{We}'$. Si $i \in \mathsf{We}'$, Ni est une cofibration triviale, donc v, image directe de Ni, est une cofibration triviale. Ainsi $Ni' = wv \in \mathsf{We}$, d'où $i' \in \mathsf{We}'$. □

Conclusion

Soit $\mathcal{D} = \mathsf{Dwy} \cap \mathsf{We}'$ et $\mathcal{D}' = \mathsf{Dwy}$.

4.10. Proposition. *$\mathcal{D}$ vérifie* **D1**, **D2**, *et $\mathcal{D}'$ vérifie* **D1'**, **D2'**, **D3'**.

DÉMONSTRATION. Les propositions **4.5** et **4.9** entraînent que $\mathcal{D}$ vérifie **D2** et $\mathcal{D}'$, **D2'** et **D3'**.

Les ensembles simpliciaux $[n]$ étant réguliers, les cornes catégoriques et les gidouilles catégoriques sont des morphismes de Dwyer en vertu de **4.6.**

Montrons que les cornes catégoriques appartiennent à $\mathcal{D}$. Soit C une corne simpliciale; il s'agit de montrer : $\gamma(C) \in \mathsf{We}'$, c'est-à-dire $N\gamma(C) \in \mathsf{We}$.

Si X est un ensemble simplicial régulier, $\mathsf{Sd}\, X$ est lui aussi régulier, et on a $N\gamma(X) = Nc\,\mathsf{Sd}^2(X) = \mathsf{Sd}^2(X)$ par **1.8.** On a donc $N\gamma(C) = \mathsf{Sd}^2(C)$. Or $C \in \mathsf{We}$, et puisque $|\mathsf{Sd}|$ est isomorphe à $|?|$, $\mathsf{Sd}(\mathsf{We}) \subset \mathsf{We}$, donc on a bien $N\gamma(C) \in \mathsf{We}$. □

Ceci achève la démonstration du théorème. □

5. Quelques compléments

5.1 Proposition. *On a* $\gamma(\mathsf{Cofib}) \subset \mathsf{Cofib}' \subset \mathsf{Dwy}$.

Démonstration. Pour tout $p \in \mathsf{Tfib}'$, $\nu(p) \in \mathsf{Tfib}$, donc pour tout $i \in \mathsf{Cofib}$, $(i, \nu(p))$ a la propriété de relèvement; cela équivaut à dire que $(\gamma(i), p)$ a la propriété de relèvement. Ainsi $\gamma(\mathsf{Cofib}) \subset R_G(\mathsf{Tfib}') = \mathsf{Cofib}'$.

D'autre part on a vu que tout élément de Cofib' est un rétracte d'un élément de $\mathcal{D}'$ (où $\mathcal{D}'$ vérifie **D1'—D3'**). On applique ceci à $\mathcal{D}' = \mathsf{Dwy}$, qui est aussi stable par rétractes, et on obtient la seconde inclusion. □

5.2. Proposition. *Les objets cofibrants de* Cat *sont des ensembles ordonnés.*

Démonstration.

On utilisera le lemme suivant.

5.3. Lemme. *Considérons dans* Cat *un carré cocartésien*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & A' \arrow[d, "i'"] \\ B \arrow[r, "f'"'] & B' \end{tikzcd}$$

où i est un morphisme de Dwyer. Si A, A', B sont des ensembles ordonnés, il en va de même de B'.

Démonstration. Cela se vérifie à la main. Plus précisément, considérons l'ensemble $E = A' \amalg (B - A)$. On construit sur E une relation $\leq$ en posant $a \leq b$ si et seulement si on est dans l'un des cas suivants :

(i) $a, b \in A'$ et $a \leq b$ dans A';

(ii) $a, b \in B - A$ et $a \leq b$ dans B;

(iii) $a \in A'$, $b \in B - A$, et il existe $\alpha \in A$ tel que $a \leq f(\alpha)$ et $\alpha \leq b$ dans B.

On vérifie que $\leq$ est une relation d'ordre sur E, et que $(E, \leq)$ est la somme amalgamée de A' et de B sur A dans Cat. □

Soit C un objet cofibrant de Cat. La cofibration $i : \emptyset \longrightarrow C$ se factorise sous la forme qj, où $j : \emptyset \to A_\infty$ appartient à $X(\Sigma_g)^{+\infty}$, et $q : A_\infty \longrightarrow C$ appartient à Tfib. De plus i est un rétracte de j. En particulier, C est une sous-catégorie de A_∞, et il suffit de montrer que cette dernière est un ensemble ordonné. Pour s'assurer de ce fait, on passe en revue la construction de A_∞ et on constate qu'à chaque étape, les catégories qui apparaissent sont des ensembles ordonnés ($\emptyset$ est un ensemble ordonné, les gidouilles catégoriques sont des cribles de Dwyer d'ensembles ordonnés; le lemme **5.3.** montre donc que les sommes amalgamées que l'on doit former sont encore des ensembles ordonnés, et enfin une réunion filtrante d'ensembles ordonnés reste un ensemble ordonné). □

5.4. Corollaire. *L'image du foncteur γ est contenue dans* Ord.

Démonstration. Pour tout ensemble simplicial X, $\emptyset \longrightarrow X$ est une cofibration; donc son image par γ est une cofibration de Cat. Puisque $\gamma(\emptyset)$ est la catégorie initiale, $\gamma(X)$ est cofibrant; c'est donc un ensemble ordonné. □

Éléments bibliographiques

[Th] R. W. Thomason, Cat *as a Closed Model Category,* Cahier de topologie et géométrie différentielle Vol. XXI-3 (1980) 305-324.

[K] Kan, *On C. S. S. Complexes,* Amer. J. Math. 79 (1959) 449-476.