

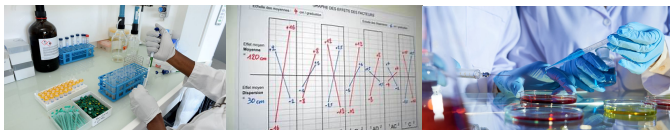
Plans d'expériences

M2 Chimie ICAP Arômes - Parfums - Cosmétiques

Elodie Brunel

Université de Montpellier – Faculté des Sciences

2024-2025



Séance 3 : Plans fractionnaires

Exemple introductif : La galette de sarrazin.

Objectif : mettre au point une "recette" ou un "procédé de fabrication" de pâte de façon à réduire la proportion de galettes qui se déchirent.

Variable réponse Y : % de galettes qui se déchirent (sur la fabrication d'une journée).

7 Facteurs à 2 modalités :

- ▶ **Quantité d'eau** : 45% ou 55%.
- ▶ **Température de la plaque** : 180 degrés ou 220 degrés
- ▶ **Méthode pour étaler** la pâte : à la main ou automatique
- ▶ **épaisseur** pour une galette : 55 g ou 65 g
- ▶ **Farine** : bio ou standard
- ▶ **Méthode de pliage** : à chaud ou à froid
- ▶ **Température de stockage** : 6 degrés ou 15 degrés

Quelles expériences pour trouver les facteurs influents dans la recette ?

- ▶ 1ère méthode (exhaustive) Tester toutes les combinaisons possibles des 7 facteurs :

$$2^7 = 128 \text{ expériences} = 128 \text{ recettes différentes}$$

↔ Beaucoup trop long!!! On ne va pas tester les 128 façons de procéder.

- ▶ 2ème méthode (plan d'expériences) On fixe un nombre raisonnable d'expériences à réaliser. Par exemple, on peut tester "16 recettes" (cela semble réalisable en pratique) mais alors

↔ comment choisir les combinaisons des 7 facteurs pour parvenir ensuite à estimer les effets (et éventuellement leurs interactions) de tous les facteurs avec un modèle d'ANOVA ?

Choix des facteurs à 2 modalités

Les plans **fractionnaires** sont des plans où l'on choisit des facteurs à **2 modalités** :

- ▶ ils sont simples à utiliser.
- ▶ on peut inclure un maximum de facteurs.
- ▶ ils permettent d'avoir une première idée des facteurs influents, quitte ensuite à éliminer les autres facteurs et à affiner l'expérience (avec davantage de modalités).

Plans complets

Supposons que l'on souhaite construire un plan d'expérience avec p facteurs à 2 modalités : on croise deux à deux toutes les modalités des p facteurs donc on doit faire 2^p expériences.

On dit que le plan est un plan complet 2^p .

Exemple : pour $p = 2$ facteurs A et B à 2 modalités chacun : plan complet 2^2 .

Matrice ou tableau des essais :

	A	B	
	+1	+1	← "45 %" "bio"
	+1	-1	← "45 %" "non bio"
	-1	+1	← "55 %" "bio"
	-1	-1	← "55 %" "non bio"

Le choix de "+1" et "-1" est une convention qui désigne les modalités des facteurs A et B. Par exemple : si A : quantité d'eau alors "+1" = "45%" et "-1" = "55%" et B : Farine alors "+1" = "bio" et "-1" = "non bio".

Plans complets 2^p

Tableau des essais :

	A	B	
essai 1	+1	+1	↔ "45 %" "bio"
essai 2	+1	-1	↔ "45 %" "non bio"
essai 3	-1	+1	↔ "55 %" "bio"
essai 4	-1	-1	↔ "55 %" "non bio"

Matrice du modèle d'ANOVA à 2 facteurs avec interaction :

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

I	A	B	AB
1	+1	+1	+1
1	+1	-1	-1
1	-1	+1	-1
1	-1	-1	+1

Plans complets 2^p

Rappel : Nous avons vu dans dans le modèle d'ANOVA à $p = 2$ facteurs à 2 modalités avec interaction que l'on doit estimer 4 paramètres :

$$\mu \quad \hat{\alpha}_1 \quad \hat{\beta}_1 \text{ et } \hat{\gamma}_{11}$$

avec le plan complet à $2^p = 4$ essais, il est donc possible d'estimer tous les effets. (c'est ce qu'on a vu dans le TD 2 avec l'ANOVA des scores à deux facteurs "Produit" et "Juge".)

Choix des essais ?

Si on ne peut pas faire tous les essais du plan complet, comment choisir "au mieux" les essais à faire ?

Exemple : Plan à 2 facteurs en 2 essais (au lieu de 4) .

Il n'est pas possible d'estimer tous les coefficients du modèle avec seulement 2 essais. On ne peut alors estimer que l'un des deux effets soit celui du facteur A, soit celui du facteur B.

Méthodologie : construction d'un plan fractionnaire

Tester l'effet de p facteurs à 2 modalités en n essais :

On construit un plan fractionnaire à $n = 2^{p-k}$ essais.

Exemple : Tester l'effet de $p = 3$ facteurs à 2 modalités en $n = 4$ essais (au lieu de $2^3 = 8$ pour le plan complet) :

On construit un plan fractionnaire à $n = 2^{3-1} = 4$ essais et on va "confondre" certains effets.

Méthode :

- ▶ Choix du plan (complet) de base en 4 essais
- ▶ Puis on construit la matrice des effets du modèle avec interaction avec le plan 2^{3-1} .
- ▶ On "confond" le dernier facteur avec l'interaction
- ▶ On construit la matrice des confusions des effets.

Application pour le plan 2^{3-1}

Matrice des effets du modèles à 2 facteurs A et B avec interaction.

NB : La colonne AB s'obtient en multipliant terme à terme les colonnes A et B

			C
I	A	B	AB
1	1	1	1
1	1	-1	-1
1	-1	1	-1
1	-1	-1	1

On dit que le facteur C est confondu avec l'interaction AB et on note $C \sim AB$: les colonnes sont identiques.

- Il en résulte des confusions (en multipliant les colonnes) :

$$C \sim AB \implies CC \sim ABC = I$$

Application pour le plan 2^{3-1}

$$C \sim AB \implies CC \sim ABC \sim I$$

et aussi

$$I \sim ABC \implies AI \sim AABC \implies A \sim BC$$

et de même $B \sim AC$.

Tableau de la **confusion des effets** :

I	A	B	AB
ABC	BC	AC	C
1	1	1	1
1	1	-1	-1
1	-1	1	-1
1	-1	-1	1

Conclusion : avec un plan $2^{3-1} = 4$ essais, il n'est pas possible d'estimer tous les effets principaux et toutes les interactions.

Application pour un plan 2^{4-1}

Plan $2^{4-1} = 8$ essais pour $p=4$ facteurs .

On cherche donc :

- ▶ Plan complet à $2^3 = 8$ essais, on écrit la matrice des effets avec les interactions :

I	A	B	C	AB	AC	BC	D ABC
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	-1	1	1	-1	-1
1	1	-1	1	-1	1	-1	-1
1	1	-1	-1	-1	1	1	-1
1	-1	1	1	-1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
1	-1	-1	-1	1	1	1	-1

- ▶ On confond le facteur D avec l'interaction ABC (la plus élevée car sans doute la moins significative)

Application pour un plan 2^{4-1}

- ▶ On en déduit le tableau de toutes les confusions :

$$D \sim ABC \implies$$

$DD \sim ABCD \implies I = ABCD$... déterminer toutes les confusions
...en multipliant chaque colonne par D ...

Application pour un plan 2^{4-1}

- ▶ On en déduit le tableau de toutes les confusions :

$$D \sim ABC \implies$$

$DD \sim ABCD \implies I = ABCD \dots$ déterminer toutes les confusions
...en multipliant chaque colonne par D ...

I	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
ABCD	?	?	?	?	?	?	D
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	-1	1	1	-1	-1
1	1	-1	1	-1	1	-1	-1
1	1	-1	-1	-1	1	1	-1
1	-1	1	1	-1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
1	-1	-1	-1	1	1	1	-1

Application pour un plan 2^{4-1}

- ▶ On en déduit le tableau de toutes les confusions :

$$D \sim ABC \implies$$

$DD \sim ABCD \implies I = ABCD \dots$ déterminer toutes les confusions
...en multipliant chaque colonne par D ...

I	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
ABCD	BCD	ACD	ABD	CD	BD	AD	D
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	-1	1	-1	-1	-1
1	1	-1	1	-1	1	-1	-1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	1	1	-1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	-1	-1	-1	1	1	1	-1

$D \sim ABC$ est appelé le "générateur".

Application pour un plan 2^{4-1}

En résumé, on obtient le tableau de confusions suivant :

I	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
ABCD	BCD	ACD	ABD	CD	BD	AD	D

On peut donc estimer :

- ▶ 4 effets principaux : A, B et C et D (en négligeant les interactions d'ordre 3)
- ▶ 3 interactions d'ordre 2 au choix :
 - AB ou CD
 - AC ou BD
 - BC ou AD

Exercice 1

On a 5 facteurs A, B, C, D et E à 2 modalités.

- ▶ Construire un plan fractionnaire $2^{5-2} = 8$ essais.
- ▶ Déterminer les confusions d'ordre 2 et 3 si l'on choisit de confondre $D \sim AB$ et $E \sim AC$.
- ▶ En déduire les effets que l'on pourra estimer avec 8 essais.
- ▶ Comparer avec les résultats fournis par R :

```
plan8essais<-FrF2(nruns=8, nfactors=5)  
summary(plan8essais)
```

Résolution d'un plan fractionnaire

- ▶ Un plan fractionnaire est dit de **résolution III** si les effets principaux sont confondus avec les interactions d'ordre **2 ou plus**.
- ▶ Un plan fractionnaire est dit de **résolution IV** si les effets principaux sont confondus avec les interactions d'ordre **3 ou plus**.
- ▶ Un plan fractionnaire est dit de **résolution V** si les effets principaux sont confondus avec les interactions d'ordre **4 ou plus**.
- ▶ etc ...

Plus la résolution est élevée et plus il faut d'expériences pour parvenir à estimer tous les effets.

Application à la recette des galettes de sarrasin avec Rstudio

Construire un plan d'expérience avec 4 facteurs et pour $n=8$ essais :

- ▶ **Méthode pour étaler** la pâte : à la main ou automatique
- ▶ **épaisseur** pour une galette : 55 g (fine) ou 65 g (épaisse)
- ▶ **Farine** : bio ou non bio
- ▶ **Méthode de pliage** : à chaud ou à froid

1) Vous pouvez tatôner à l'aide de la feuille de calcul Excel disponible [ici](#)

2) Vous pouvez aussi utiliser le cours !

3) Utiliser Rstudio !

Application à la recette des galettes de sarrazin avec Rstudio

La librairie FrF2 du logiciel R permet de déterminer des plans d'expériences fractionnaires. Elle s'utilise de la façon suivante :

```
# D'abord on charge la librairie
library(FrF2)
```

```
# Plan pour la recette des galettes de sarrazin
mon_bon_plan <- FrF2(nruns=8, nfactores=4,
                    factor.names=list(Epaisseur=c("fine","épaisse"),
                                       Farine=c("bio","nonbio"), Pliage=c("froid","chaud"),
                                       methode=c("manuelle","automatique")))
```

```
# On affiche toutes les caractéristiques du plan calculé
summary(mon_bon_plan)
```

Application à la recette des galettes de sarrazin avec Rstudio

La sortie R est la suivante :

```
Experimental design of type FrF2
```

```
8 runs
```

```
Factor settings (scale ends):
```

```
  Epaisseur Farine Pliage      methode
1     fine     bio  froid     manuelle
2  épaisse nonbio  chaud automatique
```

```
Design generating information:
```

```
$legend
```

```
[1] A=Epaisseur B=Farine      C=Pliage      D=methode
```

```
$generators
```

```
[1] D=ABC
```

```
Alias structure:
```

```
$fi2
```

```
[1] AB=CD AC=BD AD=BC
```

Application à la recette des galettes de sarrazin avec Rstudio

et enfin, les expériences qu'il faudra réaliser :

The design itself:

	Epaisseur	Farine	Pliage	methode
1	épaisse	nonbio	chaud	automatique
2	épaisse	bio	chaud	manuelle
3	épaisse	bio	froid	automatique
4	fine	bio	chaud	automatique
5	fine	nonbio	chaud	manuelle
6	fine	bio	froid	manuelle
7	fine	nonbio	froid	automatique
8	épaisse	nonbio	froid	manuelle