Damien - Espace de Teichmüller, groupe modulaire & espace de modules de courbes (GT MGNGC)

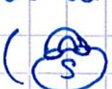
S = une surface compacte orientée de genre g

$P = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq S$

On s'intéresse à des structures sur $S \setminus P$.

$\chi(S\setminus P) = 2 - 2g - n$

Idée de preuve : $\chi(\text{sphère}) = 2$; $\chi(S \setminus \{x\}) = \chi(S) - 1$;

$\chi($  $) = \chi(S) - 2$.

- L'ensemble de Teichmüller : 1ère définition

$T(S,P) = \{ (\hat{X}, Q, \varphi) \mid \hat{X}$ surface de Riemann, $Q \subset \hat{X}$ fini, $\varphi : S \to \hat{X}$ difféo$^+$ tq $\varphi(P) = Q \} / \sim$

$\sim$:
$$\begin{tikzcd} (S,P) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "h"'] & (\hat{X}, Q) \arrow[d, "\alpha"] \\ (S,P) \arrow[r, "\varphi'"'] & (\hat{X}', Q') \end{tikzcd}$$
avec h un difféo qui fixe P et $h|_{S\setminus P}$ isotope à l'identité.

$T(S,P)$ ne dépend que de g & n, on le note $T_{g,n}$.

Remarque : fait sens $\forall g,n$. Dans la suite on se restreindra au cas où $2g+n \geq 3$ i.e. $\chi(S\setminus P) < 0$ ($\Leftrightarrow$ $S\setminus P$ peut être muni d'une métrique hyperbolique).

n'utilise pas le théorème d'uniformisation de Riemann ; $\Rightarrow$ à la main ; $\Rightarrow$ Gauss-Bonnet.

- L'espace de Teichmüller : 2ème définition

$\hat{X}$ une surface de Riemann de genre g

$Q \subset \hat{X}$ fini, $X = \hat{X} \setminus Q$

Théorème d'uniformisation : Si $\chi(X) < 0$ alors le revêtement universel de X est isomorphe à $\mathbb{H} = \{ z \in \mathbb{C} \mid Re(z) > 0 \}$
et donc $X \simeq \mathbb{H}/\Gamma$ où $\Gamma \subset PSL(2,\mathbb{R})$ sous-groupe discret.

On supposera toujours que $\chi < 0$.

Donc X hérite d'une métrique hyperbolique. Donc pour tout marquage $\varphi : (S,P) \longrightarrow (\hat{X}, Q)$, on obtient une métrique hyperbolique sur $S \setminus P$.
On note
$\mathcal{H}(S\setminus P)$ = l'espace des métriques hyperboliques sur $S\setminus P$ (muni de la topologie $\mathcal{C}^\infty$). On obtient une application :

$$T(S,P) \longrightarrow \mathcal{H}(S\setminus P) / \mathrm{Diff}_0(S\setminus P)$$

<u>Prop</u> : C'est une bijection.

<u>Idée</u> :

. injectivité.

$$\begin{tikzcd}
 & (S,P) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dd, "h"] & (\hat{X}, Q) \arrow[dd, dashed] \\
\mathbb{H}/\Gamma \arrow[ur] \arrow[dd, "\tilde{h}"] & & \\
 & (S,P) \arrow[r, "\varphi'"'] & (\hat{X}', Q') \\
\mathbb{H}/\Gamma' \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

$\tilde{h}$ est un biholomorphisme !

. surjectivité.
On voit $\mathbb{H}/\Gamma \xrightarrow{\sim} S/P$, donne p^*m sur $\mathbb{H}$, il existe une isométrie $(\mathbb{H}, \text{standard}) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{H}, p^*m)$ ("théorème de Hadamard")
Cela induit une structure complexe sur S/P.

L'espace de <u>Teichmüller, 3ème définition</u>

Soit Γ un groupe.

On note $T(\Gamma) = \{ \vartheta : \Gamma \hookrightarrow PSL(2,\mathbb{R})$ morphismes injectifs d'image discrète $\}$

Ici $\Gamma = \pi_1(S \setminus P) = \mathrm{Deck}\begin{pmatrix} \mathbb{H} \\ \downarrow \\ S\setminus P \end{pmatrix}$.

$$T(S,P) \longrightarrow T(\Gamma) \quad \text{bijection.}$$

$$\begin{matrix} \mathbb{H} \\ \downarrow \\ S\setminus P \end{matrix} \rightsquigarrow \Gamma \hookrightarrow PSL(2,\mathbb{R})$$

Le fait que les topologies coïncident sera une conséquence des coordonnées de Fenchel-Nielsen.

Espace de modules de courbes de genre g avec n points marqués.

$\mathcal{M}_{g,n}$ = ensemble des classes d'isomorphisme de surfaces de Riemann de genre g avec n points marqués. (L'ordre des points compte !)

Objectif : voir $\mathcal{M}_{g,n}$ comme quotient de $T_{g,n}$.

Donnons-nous
$$\begin{array}{ccc} (S,P) & \xrightarrow{\varphi} & (\hat{X}, Q) \\ & & \downarrow \alpha \\ (S,P) & \xrightarrow[\varphi']{} & (\hat{X}', Q') \end{array}$$

Donne $h = (\varphi')^{-1} \alpha \varphi \in \mathrm{Diff}_+(S,P)$.

$$\underbrace{\mathrm{Diff}_+(S,P) / \mathrm{Diff}_0(S\setminus P)}_{} \circlearrowright T_{g,n}$$

$$\begin{matrix} \| \\ \pi_0(\mathrm{Diff}_+(S,P)) \\ \| \\ \Gamma_{g,n} \end{matrix}$$ le groupe modulaire

<u>Déf</u>: $\mathcal{M}_{g,n} := T_{g,n} / \Gamma_{g,n}$

<u>Remarque</u>: $\mathcal{M}_{g,n}$ est un orbifold complexe

~~Remarque~~

<u>Prop</u>: $\Gamma_{g,n}$ agit proprement discontinûment sur $T_{g,n}$
(càd : pour tout compact K, $\{g \in \Gamma_{g,n} \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$ est fini)

L'action de $\Gamma_{g,n}$ n'est pas libre.

<u>Digression</u>: Si G agit sur X librement + action proprement discontinue, et si X est ~~simplement connexe~~ contractile, alors
$H^\cdot(X/G, k) \simeq H^\cdot(G, k)$ $\forall k$ anneau commutatif
Si l'action de G n'est pas libre, la différence est donnée par la cohomologie des sous-groupes d'isotropie.
En particulier, si X est contractile et G agit proprement discontinûment, alors
$H^\cdot(X/G, \mathbb{Q}) \simeq H^\cdot(G, \mathbb{Q})$

(car $H^\cdot(\text{groupe fini} ; \mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q} & \deg 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$)

Bonne nouvelle : $T_{g,n}$ est contractile (conséquence de l'exposé 2).

<u>Exemples</u>: (de description de $\mathcal{M}_{g,n}$)

- $g = 0$. $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \dfrac{az+b}{cz+d}$

Un tel automorphisme est complètement déterminé par l'image de 3 points donnés.
$\mathcal{M}_{0,3} = pt$.
$\mathcal{M}_{0,n+3} = \mathrm{Conf}_n(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\})$

• $g=1,\ n=1$

surfaces de Riemann de genre 1 avec 1 point marqué

$$\updownarrow$$

courbes elliptiques
$$\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}) \qquad (\tau\in\mathbb{H})$$

$$\mathcal{M}_{1,1} = \mathbb{H}/SL(2,\mathbb{Z}).$$

• $g=1,\ n=2$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{1,2} & & \mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z})\setminus\{\bar 0\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{H}/SL(2,\mathbb{Z}) & \ni & \tau \end{array}$$

$$\mathcal{M}_{1,2} = \Big(\mathbb{H}\times\mathbb{C}\setminus\{(\tau,z)\mid z\in\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}\}\Big)\Big/\mathbb{Z}^2\rtimes SL(2,\mathbb{Z})$$

avec $(m,n)\in\mathbb{Z}^2 \quad (\tau,z)\mapsto(\tau,\ z+m+n\tau)$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{Z}) \qquad (\tau,z)\mapsto\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\ \frac{z}{c\tau+d}\right)$$