

Δ -complexes symétriques et diviseurs à croisements normaux

Anthony

16 mai 2022

L'objectif est de définir la notion de Δ -complexe symétrique, puis de montrer comment associer un tel complexe à un diviseur à croisements normaux dans une variété complexe. La motivation principale étant de comprendre (au moins en partie) l'énoncé suivant :

Théorème 0.1. *Soit X une variété complexe projective de dimension d et D un diviseur à croisements normaux dans X . On note $\Delta(D)$ le Δ -complexe symétrique associé à D . Alors il existe une surjection*

$$H^{2d-k}(X \setminus D) \rightarrow \tilde{H}_{k-1}(\Delta(D))$$

pour tout $k \geq 0$.

1 Δ -complexes symétriques

Formellement, un Δ -complexe un foncteur $Y : \Delta_{\text{inj}}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$ où

- Δ_{inj} est la catégorie dont les objets sont les entiers et dont les morphismes sont les injections $[p] := \{0, \dots, p\} \hookrightarrow [q] := \{0, \dots, q\}$ qui préservent l'ordre ;
- $\Delta_{\text{inj}}^{\text{op}}$ est la catégorie opposée de Δ_{inj} , i.e. la catégorie obtenue en inversant tous les morphismes ;
- et Ens est la catégorie dont les objets sont les ensembles et dont les morphismes sont les fonctions.

Topologiquement, un Δ -complexe Y se pense via la réalisation

$$R(Y) := \left(\bigsqcup_{n \geq 0} Y_n \times \Delta^n \right) / \sim$$

où la relation d'équivalence \sim est définie par

$$(y, \theta_* a) \sim (Y(\theta)(y), a)$$

pour tous $n \geq 0$, $y \in Y_n$, $\theta : [m] \hookrightarrow [n]$ et $a \in \Delta^m$, où θ_* est l'application $\Delta^m \rightarrow \Delta^n$ induite par θ .

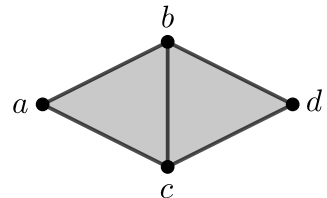
Autrement dit, pour tout $n \geq 0$, Y_n est l'ensemble des n -simplexes ; chaque $\theta : [p] \hookrightarrow [q]$ peut être pensé comme le choix d'une face de dimension p dans Δ^q , et $Y(\theta) : Y_q \rightarrow Y_p$ associe à chaque q -simplexe sa face correspondante.

Exemple 1.1. Le considérons la 2-complexe orienté suivant.

Le foncteur associé Y est défini sur les objets comme suit :

$$Y_0 = \{a, b, c, d\}, Y_1 = \{ab, bc, ca, cd, db\}, Y_2 = \{abc, bcd\}$$

et $Y_k = \emptyset$ pour tout $k \geq 3$.



Si θ est l'injection $[1] \hookrightarrow [2]$ envoyant 0 sur 1 et 1 sur 2, alors $Y(\theta) : Y_2 \rightarrow Y_1$ envoie abc sur bc et bcd sur cd .

On peut définir un Δ -complexe *augmenté* en reprenant la même définition mais en ajoutant l'objet $[-1] := \emptyset$ à la catégorie $\Delta_{\text{inj}}^{\text{op}}$. Comme il n'existe qu'un seul morphisme $[-1] \rightarrow [p]$ pour tout $p \geq -1$, cela revient à se donner une application continue de $R(Y)$ vers un ensemble discret, ou encore d'étiqueter les composantes connexes de $R(Y)$.

Notons I la catégorie dont les objets sont les entiers ≥ -1 et dont les morphismes sont les injections $[p] \hookrightarrow [q]$. Contrairement à Δ_{inj} , on ne demande pas aux injections de préserver l'ordre. Un Δ -complexe *symétrique* est alors un foncteur $Y : I^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$, et sa réalisation topologique $R(Y)$ est définie de la même manière que précédemment. Comme il y a plus de morphismes dans I que dans Δ_{inj} , il y a plus de recollements possibles dans la réalisation topologique. Plus précisément, une même face d'un simplexe pourra désormais être représenté par plusieurs injections, donc les recollements supplémentaires vont provenir de recollements des simplexes sur eux-mêmes.

Le slogan à retenir est qu'un Δ -simplexe est obtenu en collant des simplexes (orientés) entre eux alors qu'un Δ -simplexe symétrique est obtenu en recollant entre eux des quotients de simplexes par des groupes finis.

Exemple 1.2. Prenons le foncteur Y avec Y_{-1}, Y_0, Y_1 des singletons et Y_k vide pour $k \geq 2$. En tant que Δ -complexe, Y un cercle. Mais, en tant que Δ -complexe symétrique, il donne une demi-arête, i.e. le quotient de $[0, 1]$ par réflexion centrale. La raison est que l'inversion $\iota : [1] \rightarrow [1]$ donne un recollement additionnel, qui coïncide avec la réflexion centrale. Pour retrouver un cercle à partir d'un Δ -complexe symétrique, il faut ajouter des orientations artificiellement. Plus précisément, on pose $Y_0 = \{a\}$, $Y_1 = \{e^-, e^+\}$ et $Y(\iota) : e^\pm \mapsto e^\mp$.

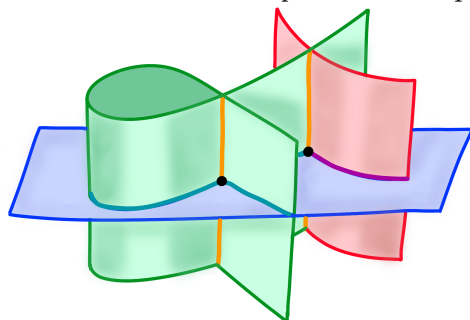
Exemple 1.3. Pour obtenir un demi-triangle (i.e. le quotient d'un triangle par une réflexion dont l'axe passe par un sommet), on peut prendre $Y_0 = \{a, b\}$, $Y_1 = \{ab, ba, bb\}$ et $Y_2 = \{abb, bab, bba\}$.

2 Diviseurs à croisements normaux

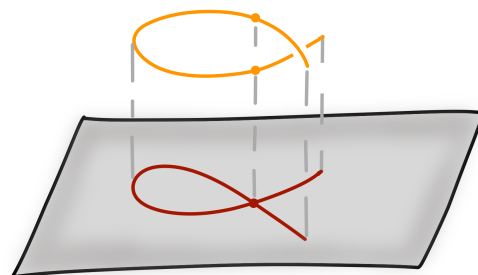
Fixons une variété complexe X de dimension d , i.e. un espace topologique localement homéomorphe à \mathbb{C}^d dont les changements de cartes sont holomorphes. Un *diviseur* D est une sous-variété immergée dans X , i.e. l'image d'une variété Y par une immersion $Y \rightarrow X$. Nous ne demandons pas à Y d'être connexe, et une *composante* de D fera référence à l'image d'une composante connexe de Y . Le diviseur D est à *croisements normaux* s'il est localement isomorphe à une union de plan

$$\{(z_1, \dots, z_d) \mid z_1 \cdots z_k = 0\} \subset \mathbb{C}^d$$

pour un certain $1 \leq k \leq d$. Si on peut toujours prendre $k = 1$, on dira que le diviseur est *lisse*. Un diviseur est *simple* si ses composantes sont lisses.



Diviseur à croisements normaux ayant trois composantes, dont deux lisses.



Normalisation d'un diviseur.

La figure ci-dessus donne un exemple de diviseur à croisements normaux. Dans \mathbb{C}^2 , l'union

$$\{(x, y) \mid x = 0\} \cup \{(x, y) \mid y = 0\} \cup \{(x, y) \mid x + y = 0\}$$

est un diviseur qui n'est pas à croisements normaux.

Si un diviseur D est l'image d'une immersion $Y \rightarrow X$, le processus de *normalisation* permet moralement de retrouver la variété Y à partir de D . On "désingularise" la variété immergée. Formellement, la normalisation \tilde{D} de D est la variété

$$\{(z, b) \mid z \in D, b \text{ branche de } D \text{ en } z\}.$$

Localement, D ressemble à une union de plans, et une *branche* en un point fait référence à l'un de ces plans.

3 Δ -complexe associé à un diviseur

Soient X une variété complexe de dimension d et $D \subset X$ un diviseur à croisements normaux. L'objectif est de construire un Δ -complexe symétrique $\Delta(D)$.

Considérons d'abord le cas où D est un diviseur simple. Ici, on peut définir $\Delta(D)$ comme un Δ -complexe (non symétrique) en prenant les composantes c_i de D comme sommets, les composantes des $c_i \cap c_j$ comme arêtes, les composantes des $c_i \cap c_j \cap c_k$ comme triangles, et ainsi de suite.

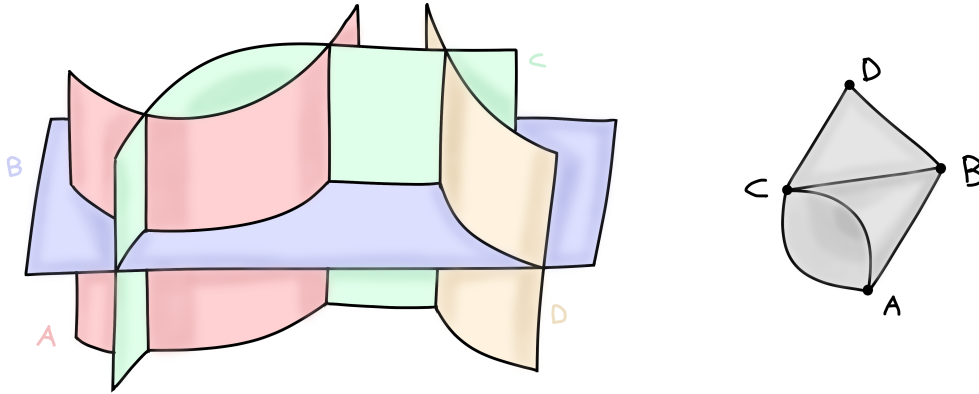


FIGURE 1 – Δ -complexe associé à un diviseur à croisements normaux simple.

Pour le cas général, la présence d'auto-intersection empêche de définir un Δ -complexe, mais un Δ -complexe symétrique peut être défini de manière similaire. Commençons par introduire le produit fibré

$$\begin{aligned} \tilde{D}_p &:= \underbrace{\tilde{D} \times_X \cdots \times_X \tilde{D}}_{p+1 \text{ facteurs}} \setminus \{(z_0, \dots, z_p) \mid \exists i \neq j, z_i = z_j\} \\ &= \{(z, b_0, \dots, b_p) \mid z \in D, b_0, \dots, b_p \text{ branches de } D \text{ en } z \text{ deux à deux distinctes}\} \end{aligned}$$

On remarquera que \tilde{D}_0 coïncide avec la normalisation \tilde{D} de D . Par convention, on posera $\tilde{D}_{-1} := X$. Définissons notre foncteur $\Delta(D) : I^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$ comme suit. Pour tout $n \geq -1$, $\Delta(D)_n$ est l'ensemble des composantes de \tilde{D}_n . Pour toute injection $\theta : [p] \hookrightarrow [q]$, $\Delta(D)(\theta) : Y_q \rightarrow Y_p$ envoie une composante Z de \tilde{D}_q sur la composante de \tilde{D}_p qui contient $\theta_*(Z)$, où θ_* est l'application $\tilde{D}_q \rightarrow \tilde{D}_p$ induite par θ qui "oublie" des branches.

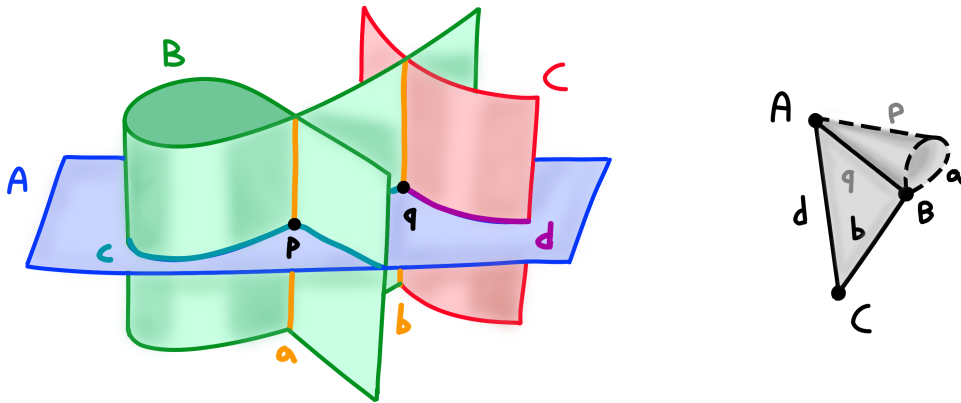


FIGURE 2 – Δ -complexe symétrique associé à un diviseur à croisements normaux.