18.11.21

Coordonnées de Fenchel-Nielsen

<u>Définition:</u> Un pantalon S est une surface à bord, $\mathring{S} \simeq S^2 - \{*,*,*\}$.

$$S \simeq \overline{\mathbb{D}}_1^2 \setminus \mathbb{D}_2 \cup \mathbb{D}_3$$

Espace de Teichmüller sur un pantalon:

$$\mathcal{H}(S) = \left\{ \begin{array}{c} \text{métriques hyperboliques sur } S \text{ qui rendent} \\ \partial \mathbb{D}_i \text{ géodésiques} \end{array} \right\}$$

$$\mathrm{Diff}_+(S,\partial) = \{ \text{difféo qui préservent } \overset{\text{longueur}}{\ell}(\gamma_i) \}$$

<u>Définition:</u> $\mathcal{T}(S) = \mathcal{H}(S) / \mathrm{Diff}_+(S,\partial)$

<u>Remarque:</u> $\mathrm{Diff}_+(S,\partial) = \mathrm{Diff}_0(S,\partial)$ (Poincaré)

$\mathcal{M}(S) = \mathcal{T}(S)$

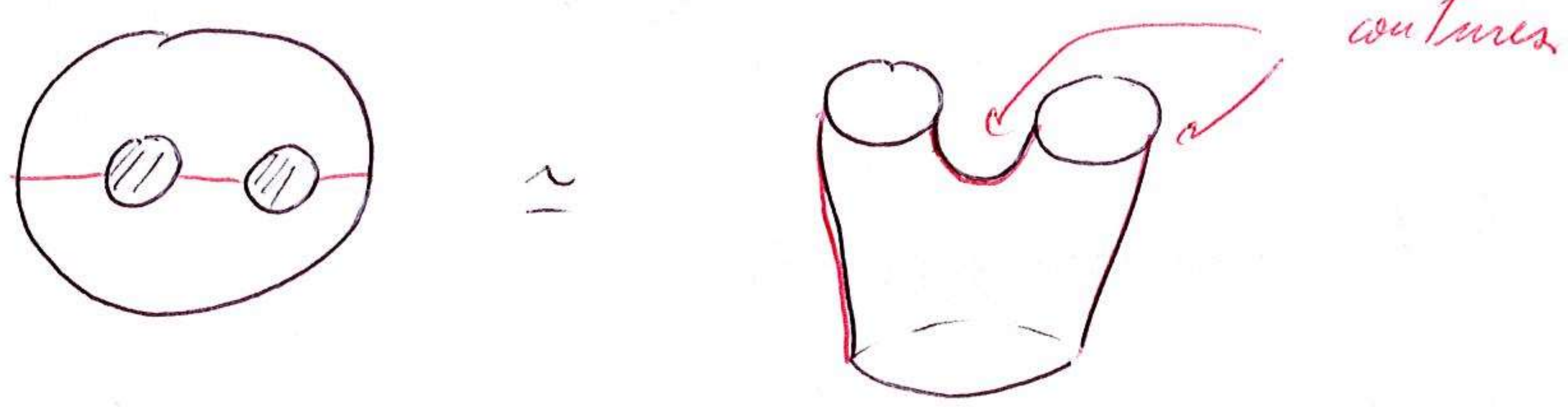
S pantalon: $\chi(S) = -1$

S est hyperbolique, munie de μ_P métrique de Poincaré

$$\mu_{P,\mathbb{D}} = \frac{dx\wedge dy}{1-x^2-y^2}, \quad \mu_{P,\mathbb{H}} = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$$

Coordonnées de Fenchel-Nielsen sur $\mathcal{T}(S)$

Définition : Une couture sur S est l'unique arc géodésique qui minimise la distance entre les bords.

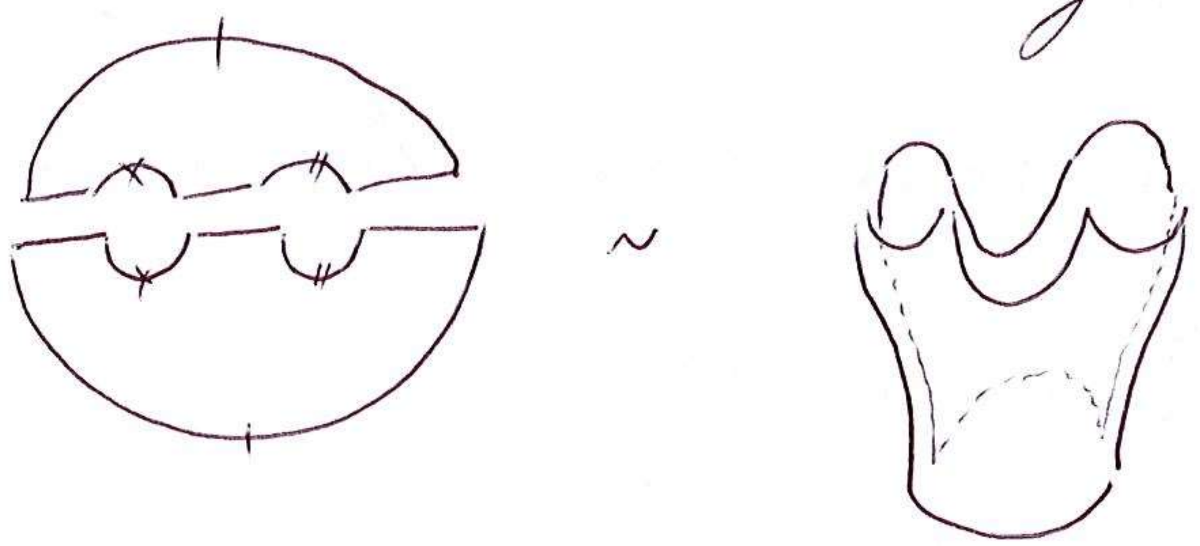


$$\mathcal{T}(S) \longrightarrow (\mathbb{R}_+^*)^3$$
$$[\mu] \longrightarrow (\ell_\mu(\partial_1), \ell_\mu(\partial_2), \ell_\mu(\partial_3))$$

bien définie, est un homéomorphisme.

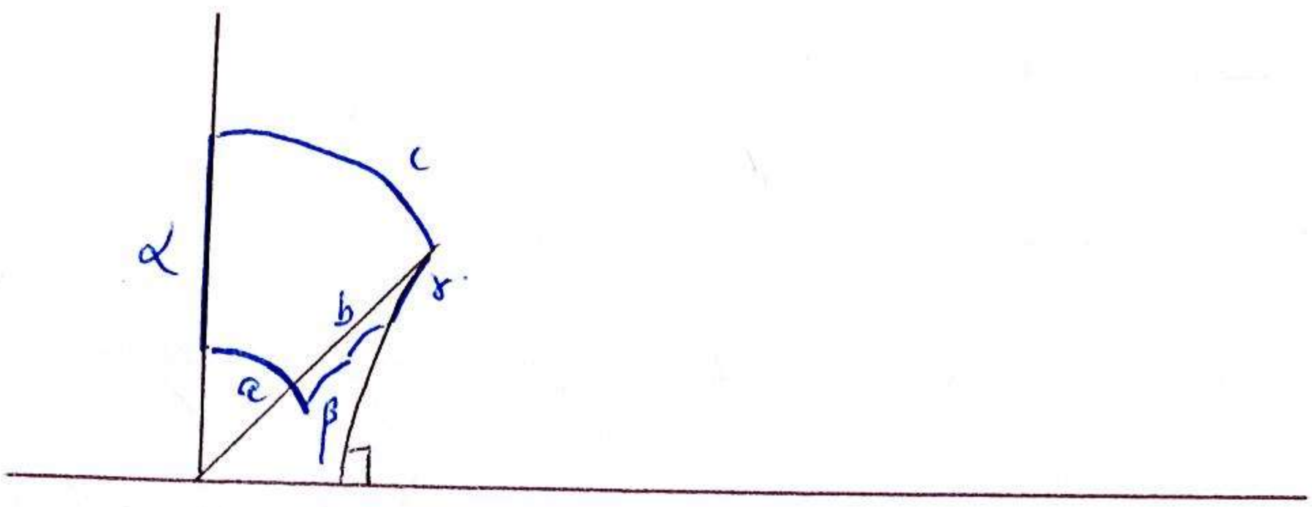
Idée :

Lemme : les coutures décomposent S en deux hexagones géodésiques isométriques, et décomposent chaque bord en deux arcs de même longueur.



<u>Lemme</u>: $(a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, $\exists!$ hexagone géodésique dont les côtés non adjacents sont de longueur (a,b,c).

Dans le modèle $\mathbb{H}$: (existence)



<u>Unicité</u>: "relations trigonométriques hyperboliques"

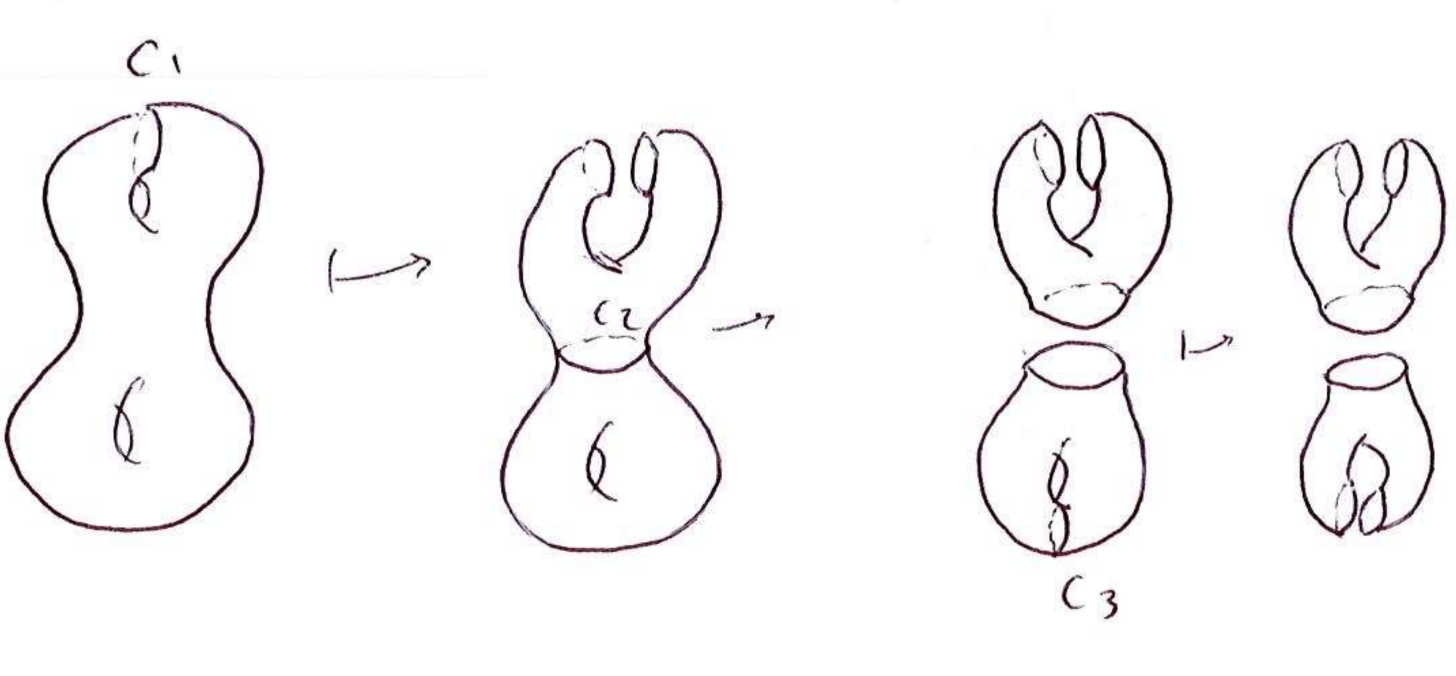
<u>Découpage en pantalons</u>:

<u>Idée</u>: couper la surface le long d'une courbe simple fermée, non homotope à un point.

$\hat{X}$ surface compacte, $P \hookrightarrow \hat{X}$ nombre fini de points.

$X = \hat{X} \setminus P$

<u>Ex</u>: $P = \emptyset$, $\hat{X} = X$



En itérant : (S_i) les composantes connexes obtenues après l'étape j ; à l'étape $j+1$ soit le nombre de composantes connexes ne change pas et le genre diminue de 1, soit le nombre de composantes connexes augmente.

$\sum (2g_i - 2 + n) = \text{cste}$.

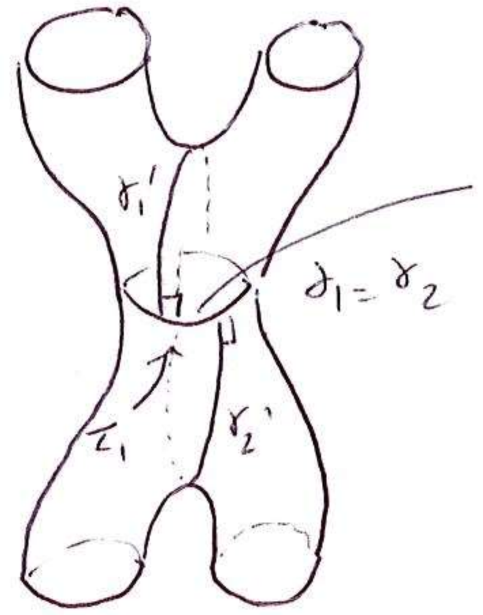
$\sum (3g_i - 3 + n_i)$ diminue de -1 après chaque étape.

$\Rightarrow (2g-2+n)$ pantalons après $3g-3+n$ découpages.

Définition : $(c_1, \ldots, c_{3g-3+n}) :=$ découpage en pantalons

Proposition : $\exists$ un découpage en pantalons géodésique, c'est-à-dire $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{3g-3+n}) \overset{\text{homotope}}{\sim} (c_1, \ldots, c_{3g-3+n})$. ($\gamma_i$ géodésiques).

Paramètres de torsion :



$\theta_1 = \frac{2\pi \tau_1}{\ell_1}$, $\ell_1 = \ell(\gamma_1) = \ell(\gamma_2)$

<u>Définition:</u> $\theta_i = \frac{2\pi\tau_i}{\ell_i}$ les paramètres de torsion.

<u>Théorème:</u> $X = \hat{X} \setminus P$, $|P| = n$.

$$\mathcal{T}(X) \xrightarrow{L} (\mathbb{R}_+^*)^{3g-3+n} \times (\mathbb{R})^{3g-3+n}$$

$$[\mu] \longmapsto (\ell_\mu(\delta_1), \ldots, \ell_\mu(3g-3+n), \theta_1, \ldots, \theta_{3g-3+n})$$

est un homéomorphisme.

<u>Remarque:</u> $\mathcal{M}_{g,n}(X) \simeq (\mathbb{R}_+^*)^{3g-3+n} \times (\underset{\substack{\simeq \\ \mathbb{R}/2\pi\ell_i\mathbb{Z}}}{S^1})^{3g-3+n}$