Raphaël Paegelow - Éléments de cohomologie des groupes

Intro :

Historique : Hurewicz (1936) étudie les espaces asphériques ($\pi_i(X)=0 \ \forall i \geqslant 2$)
Résultat : $H_n(X)$ déterminé par $\pi_1(X)$.
Hopf (1942) donne une description purement algébrique.
Eckmann et Artin-Tate (1953) introduisent l'application transfert et "calculent" la cohomologie des groupes finis.

I - Construction algébrique

1) Coefficients constants

Cadre : R un anneau, $C=(C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un R-module gradué, $d : C_n \to C_{n-1}$, $d^2=0 \rightsquigarrow (C,d)$ complexe de R-modules

Pour (C,d) et (C',d') $\rightsquigarrow (C\otimes_R C', D)$ avec
R-mod à droite / à gauche

$$(C\otimes_R C')_n = \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes_R C'_q \quad , \quad D(c\otimes c') = dc\otimes c' + (-1)^{\deg(c)} c\otimes dc'.$$

mais aussi $(\mathcal{H}om_R(C,C'), D)$

$$(\mathcal{H}om_R(C,C'))_n = \prod_{q\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_R(C_q, C'_{q+n}) \qquad D_n(f) = d'f + (-1)^{n+1} fd$$

<u>Déf</u> : M un $(\mathbb{Z}G)$-module $\rightsquigarrow$ co-invariants
$M_G = M / \langle gm-m \mid (m,g)\in M\times G\rangle$ "le plus grand quotient sur lequel G agit trivialement", analogue des invariants
$M^G = \{ m\in M \mid \forall g\in G,\ gm=m\}$ "le plus grand sous-module sur lequel G agit trivialement".

$M_G \simeq \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M$

Déf. (de l'homologie)

$\varepsilon : F \to \mathbb{Z}$ une résolution projective (libre) de $\mathbb{Z}$ dans les $\mathbb{Z}G$-modules. (*)

On définit

$$H_n(G,\mathbb{Z}) := H_n(F_G) = H_n(F \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z})$$

$$\overset{\shortparallel}{H_n(G)}$$

(*) : $\cdots \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_0 \to \mathbb{Z} \to 0$ est exacte, chaque F_n est un $\mathbb{Z}G$-module libre. (ou projectif)

Prop : * $H_*(G)$ est indépendant du choix de F

* ε existe, par exemple on regarde le complexe simplicial

$X : X_0 = G$, $X_i = \{$parties à $\cancel{i}$ $i+1$ éléments de $G\}$ (X est contractile)

$C_i(X) = \mathbb{Z}X_i$

2) Avec des coefficients

$\varepsilon : F \to \mathbb{Z}$ comme avant, M un $\mathbb{Z}G$-module

Déf : $H_n(G,M) := H_n(M \otimes_{\mathbb{Z}G} F)$

$H^n(G,M) := H^n(\mathcal{H}om_{\mathbb{Z}G}(F,M))$

(Remarque : $\mathcal{H}om_{\mathbb{Z}G}(F,M)^n = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F_n,M)$)

Autre définition équivalente :

$\eta : E \to M$ une résolution libre de $\mathbb{Z}G$-modules

$$H_\cdot(G, M) = H_\cdot(M \otimes_{\mathbb{Z}G} F) \simeq H_\cdot(E \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}) \simeq H_\cdot(E \otimes_{\mathbb{Z}G} F)$$

c'est E_G

et même chose pour la cohomologie

c'est E'^G

$$H^\cdot(G, M) = H^\cdot(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, E')) \simeq H^\cdot(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F, E'))$$

pour $0 \to M \to E'_0 \to E'_1 \to \cdots$ résolution injective.

II – Topologie

Déf : Un G-complexe est un CW-complexe X muni d'une G-action qui permute les cellules de X. (X_p)

On dit qu'il est libre si l'action de G est libre.

Y est un $K(G,1)$ si Y est connexe, $\pi_1(Y) \simeq G$, et le revêtement universel de Y est contractile. $(X := \tilde{Y})$

Prop : Si X est un G-complexe libre, si $Y = X/G$, alors $C_\cdot(Y) \simeq C_\cdot(X)_G$.

Dém :

L'application $\tilde{\varphi} : C_\cdot(X) \to C_\cdot(Y)$ induit $\varphi : C_\cdot(X)_G \to C_\cdot(Y)$. Comme X est un G-complexe libre, on peut choisir une $\mathbb{Z}$-base de $C_n(X)_G$ avec un élément pour chaque G-orbite de cellule.

Prop : Soit Y un $K(G,1)$ $(X = \tilde{Y})$ alors $H_\cdot(G) \cong H_\cdot(Y)$.

Dém :

C'est parce que $C_\cdot(X) \to \mathbb{Z}$ est une résolution libre de $\mathbb{Z}$ en tant que $\mathbb{Z}G$-module, et $C_\cdot(X)_G = C_\cdot(Y)$.

Exemples :

1) Groupe libre $G = F(S)$, $Y = \bigvee_{i \in S} S^1_i$ bouquet de cercles.

$Y = K(F(S), 1)$

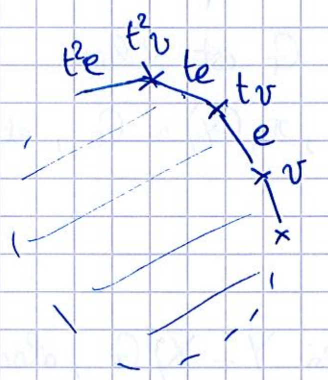
Résolution cellulaire : $0 \to \mathbb{Z}G^{(S)} \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$

$$\partial(e_s) = s - 1$$

$$\varepsilon(g) = 1$$

$$H_i(Y) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0 \\ F(S)_{ab} = \mathbb{Z}^{(S)} & i = 1 \\ 0 & i > 1 \end{cases}$$

2) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \langle t \mid t^n = 1 \rangle$ qui agit sur le ~~cercle~~ ~~disque~~ cercle S^1



$N = 1 + t + \dots + t^{n-1}$

$$0 \to \underset{H_1(S^1)}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\eta} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

$$1 \longmapsto N$$

On "cycle" pour avoir une résolution libre en tant que $\mathbb{Z}G$-module :

$$\dots \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\eta} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

$$\Big\downarrow \otimes_{\mathbb{Z}G} M$$

$$\dots \to M \to M \to M \to M \to 0$$

i impair ≥ 1 : $H_i(G, M) \simeq H^{i+1}(G, M) \simeq \ker(\overline{N})$ $\qquad \overline{N} : M_G \to M^G$

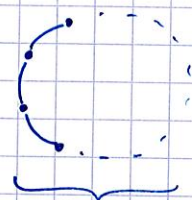
i pair ≥ 2 : $H_i(G, M) \simeq H^{i+1}(G, M) \simeq \operatorname{coker}(\overline{N})$

Raphaël Paegelow – (Suite et fin)

Rappel : G un groupe, M un $\mathbb{Z}G$-module, $\cdots \to F_2 \to F_1 \to F_0 \to \mathbb{Z} \to 0$ une résolution libre en tant que $\mathbb{Z}G$-module.

$H_i(G,M) = H_i(F_\cdot \otimes_{\mathbb{Z}G} M)$, $H^i(G,M) = H^i(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F_\cdot, M))$

Exemples : $G = \langle t \rangle$, $t^n = 1$ (cyclique d'ordre n)

G G  $= S^1$ avec n 0-cellules, 1-cellules

X

$$0 \to H_1(S^1) \to C_1(X) \to C_0(X) \to \mathbb{Z} \to 0$$

$H_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ (avec action triviale !)

et on cycle :

$$\cdots \to C_1(X) \xrightarrow{N} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} C_1(X) \xrightarrow{N} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0 \qquad N = \sum_{i=0}^{n-1} t_i$$

$C_1(X) = \mathbb{Z}[G]$, $C_0(X) = \mathbb{Z}[G]$

Homologie : $\cdots \to M \xrightarrow{N} M \xrightarrow{\varepsilon} \underset{(1)}{M} \xrightarrow{N} \underset{(0)}{M} \to 0$

Cohomologie : $(\ldots)$

On obtient : $H_i(G,M) = H^{i+1}(G,M) = \begin{cases} \mathrm{coker}(\bar{N}) & i \text{ impair} \\ \ker(\bar{N}) & i \text{ pair} \end{cases}$

avec $\bar{N} : M_G \to M^G$

Petits degrés :

Résolution standard $$\cdots \to F_1 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

$F_1 = \mathbb{Z}(G\times G) =$ $\mathbb{Z}G$-module libre sur les $(1,g)$

$$\partial_1(1,g) = g - 1$$

On prend $-\underset{\mathbb{Z}G}{\otimes} M$: $$\cdots \to F_1 \underset{\mathbb{Z}G}{\otimes} M \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

$$H_0(G,M) = M/\mathrm{Im}(\partial_1) = M/\langle g.m - m\rangle = M_G$$

Pour la cohomologie :

$$H^0(G,M) = M^G.$$

Pour le H_1 :

$$H_1(G,\mathbb{Z}) \simeq G^{ab} \quad , \text{ l'abélianisé}$$

$$\cdots \to \mathbb{Z}(G\times G\times G) \to \mathbb{Z}(G\times G) \to \mathbb{Z}G \ (\to \mathbb{Z} \to 0) \quad \Big\} \underset{\mathbb{Z}G}{\otimes}\mathbb{Z}$$

$$\cdots \to \mathbb{Z}(G\times G) \to \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z} \to 0$$

$$\begin{array}{ccc} H_1(G,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\sim} & G^{ab} \\ [g] & \longmapsto & \bar{g} \end{array}$$

$$H^1(G,\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}_{gp}(G,\mathbb{Z})$$

Groupes finis

$|G| < \infty$, V un $\mathbb{Z}G$-module où $|G|$ est inversible.

<u>Théorème</u> : $H^i(G,V) = \begin{cases} V^G & i=0 \\ 0 & i \geq 1 \end{cases}$

Preuve dans le cas où V est un $\mathbb{Q}G$-module :

$\cdots \to F_n \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to \mathbb{Q} \to 0$ résolution libre de $\mathbb{Q}G$-module.

(Maschke : Tout $\mathbb{Q}G$-module est projectif)

on : plus concrètement $H^i(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}G}(F_\cdot, \mathbb{Q})) = H^i((F_\cdot^*)^G)$

et $V \mapsto V^G$ est exact.

<u>Prop</u> : Soit X un G-complexe (G quelconque) contractile avec des groupes d'isotropie finis. Alors

$$H^\cdot(X/G ; \mathbb{Q}) \simeq H^\cdot(G ; \mathbb{Q})$$