# Éléments de cohomologie des groupes - Raphael

Thursday, November 25, 2021 14:27

## Intro

Historique : Hurewicz 1936

X asphérique, i.e. $\pi_i(X)=0$ $i\geq 2$

1er résultat $H_n(X)$ déterminé par $\pi_1(X)$

1942 : Hopf : Description purement algébrique de $H_n(X)$

'53 : Eckman et Artin-Tate :

→ application transfert

→ Cohomologie des gpes finis

## I - Construction alg.

### 1. Coeff. constants :

Cadre : R ← anneau (pas forcément com)

$(C,d) \in Ch(R)$

On a des $\oplus$, des $\otimes$, des Homs internes...

**Déf** : Soit $M$ un $G$-mod

$$M_G := M \big/ \langle gm - m \rangle \ \forall g, m$$

« Plus grand quotient sur lequel $G \curvearrowright M_G$ est triviale »

$\updownarrow$

$M^G$ « Plus grand s-mod sur lequel $G$ agit triv »

$$M_G = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M .$$

**Déf** (Homologie) :

$\varepsilon : F \longrightarrow \mathbb{Z}$ résolution projective (p. ex libre) de $\mathbb{Z}G$-mod

$$H_n(G) = H_n(G;\mathbb{Z}) := \begin{array}{c} H_n(F_G) \\ \| \\ H_n(F \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}) \end{array}$$

**Rmq** : i) Indép de la résolution choisie.

ii) Il existe au moins une résolution :

$\underset{\text{contractile}}{X}$ : $X_0 = G$, $X_i \subset G$ $|S| = i+1$

$C_i(X) = \mathbb{Z} X_i$ et différentielle simpliciale.

$C_\bullet(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ est un quasi-iso.

2) Avec coefficients :

$\varepsilon : F \longrightarrow \mathbb{Z}$ libre de $\mathbb{Z}G$-mod

$M$ un $\mathbb{Z}G$-mod

Déf : $H_n(G;M) := H_n(M \otimes_G F)$

$$H^n(G;M) := H^n(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F, M))$$

(Conventions de degré t.q. $H^{\geq 0}$ et $H_{\geq 0}$)

Alternativement, soit
$\eta : E \longrightarrow M$ résolution proj de $\mathbb{Z}G$-mod

$$H_\bullet(G,M) = H_\bullet(M \otimes_G F)$$

$$= H_\bullet(E \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z})$$

$$= H_\bullet(E \otimes F)$$

$\mathbb{Z}G$

$$\eta \otimes \mathbb{Z} : E \otimes_G \mathbb{Z} \longrightarrow M \otimes_G \mathbb{Z}$$

$$id_M \otimes \varepsilon : M \otimes_G F \longrightarrow M \otimes_G \mathbb{Z}$$

induisent l'iso

$$H^\bullet(G,M) = H^\bullet\big(\overbrace{\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, E')}^{E'^G}\big)$$

$$= H^\bullet\big(\mathrm{Hom}_G(F, E')\big)$$

$$M \to E'_0 \to E_1 \to E_2 \to \dots$$

résolution injective

# Topologie

Déf : • G-complexe est un CW-complexe X muni d'une action qui permute les cellules de X.

G-complexe libre si la G-action est libre

• Y est $K(G,1)$ si Y est un CW-cx tq :

• Y connexe

- $\pi_1(Y) = G$
- $\pi_{\geq 2}(Y) = 0$ ($\Leftrightarrow$ revêt univ $\tilde{Y}$ est contractile)

**Prop** : Si $X$ est un $G$-complexe libre $Y = X/G$, alors $C_\bullet^{CW}(Y) = C_\bullet^{CW}(X)_G$

Si $X$ est un CW complexe :

Déf :

$$C_n^{CW}(X) = \mathbb{Z} X^n \leftarrow n\text{-cellules}$$

$$d\, e_\alpha^n = \sum_{\beta \in X^{n-1}} d_{\alpha\beta}\, e_\beta^{n-1}$$

deg de l'application de recollement $S^{n-1} \simeq \partial e_\alpha^n \to e_\beta^{n-1} / \partial e_\beta^{n-1} \simeq S^{n-1}$

$$\tilde{\varphi} : C^{CW}(X) \longrightarrow C^{CW}(Y)$$

$$\varphi : C^{CW}(X)_G \longrightarrow C^{CW}(Y)$$

Comme $X$ est un $G$-complexe libre on peut choisir une $\mathbb{Z}(G)$ base de $C_n(X)$

$C_n(X)_G$ admet une $\mathbb{Z}$-base avec un élément pour chaque $G$-orbite de cellules de $X$.

$\varphi$ est un iso

**Prop :** Soit $Y$ un $K(G,1)$

alors $H_\bullet(G) = H_\bullet(Y)$

**Preuve :** $\tilde{Y}$ rev univ

$$C_\bullet^{cw}(\tilde{Y}) \longrightarrow \mathbb{Z} \quad \overset{(\mathbb{Z}G),}{\text{rés}} \text{ libre de } \mathbb{Z}$$

$$C_\bullet^{cw}(X)_G \simeq C_\bullet^{cw}(Y)$$

**Exemples :**

1. Groupe libre : $G = F(S)$

$Y = \bigvee_{i \in S} S^1$ bouquet de cercles

$Y = K(F(S), 1)$

Résolution cellulaire

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}G^{(S)} \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

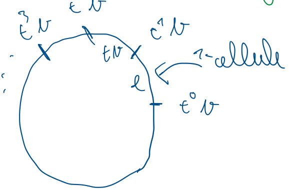
$\mathbb{Z}G^{(S)}$ le $\mathbb{Z}G$-mod libre de base $(e_s)_{s \in S}$

$\partial e_s = s - 1$

$\varepsilon(g) = 1$

$$H_i(Y) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i=0 \\ (F(S))_{ab} = \mathbb{Z}^S & \text{si } i=1 \\ 0 & \text{si } i>0 \end{cases}$$

2. $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} = \langle t \mid t^n = 1 \rangle$ ← agit librement sur le cercle



$= Y$ cw-cx libre

$N = 1 + t + \dots + t^{n-1}$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

$\overset{\shortparallel}{H_1}(S^1)$

$\eta(1) = N$

Pas $\mathbb{Z}G$-projectif!

$\varepsilon(g) = 1$

On "cycle" pour avoir une résolution $\mathbb{Z}G$-libre :

$$\underbrace{\cdots \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

$$\rightsquigarrow \otimes_G M$$

$$\overbrace{M \to M \to M \to M} \to 0$$

$i \geq 1$ impair :

$$H_i(G;M) \simeq H^{i+1}(G;M) \simeq \mathrm{Ker}(\overline{N})$$

où $\overline{N} : M_G \to M^G$

$i \geq 2$ pair :

$$H_i(G;M) \simeq H^{i+1}(G;M) \simeq \mathrm{coker}(\overline{N})$$

---

## Partie 2 (16/12) :

Rappel : $G$ gp $\quad M$ $G$-mod

Res $\quad \to F_n \to \cdots \to F_0 \to \mathbb{Z}$

$$H_i(G;M) := H_i(F \otimes_G M)$$

$$H^i(G;M) := H_i(\mathrm{Hom}_G(F_i, M))$$

## III Petits degrés :

$H_0(G;M)$ :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & F_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, equal] & \mathbb{Z}G \arrow[r, "\varepsilon"] & \mathbb{Z} \\
& \mathbb{Z}[G\times G] & &
\end{tikzcd}$$

$\leftarrow$ action diagonale

$$\partial_1(\underbrace{1,g}_{\text{base}}) := g-1 \qquad \varepsilon(g) = 1$$

$- \otimes_G M$ est exact à droite

$$F_1 \otimes M \xrightarrow{\partial_1 \otimes \mathrm{id}_M} M \to 0$$

$$H_0(G;M) = M/\mathrm{Im}(\partial_1 \otimes \mathrm{id}) = M_G$$

—

$H^0$ :

$$\overbrace{\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}G, M)}^{\simeq M} \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(F_1, M)$$

$$\underline{H^0(G,M)} = \ker(\ \uparrow\ ) = M^G$$

---

$H_1(G;\mathbb{Z}) \cong G_{ab}$ :

$$\overset{\otimes_G \mathbb{Z}}{\mathbb{Z}[G\times G\times G]} \xrightarrow{\partial_2} \overset{\otimes_G \mathbb{Z}}{\mathbb{Z}[G\times G]} \xrightarrow{\partial_1} \overset{\otimes_G \mathbb{Z}}{\mathbb{Z}G} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

$$H_1(G;\mathbb{Z}) = \ker(\bar\partial_1) / \mathrm{Im}(\bar\partial_2)$$

$$\mathbb{Z}G \otimes \mathbb{Z}G \xrightarrow{\bar\partial_2} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\bar\partial_1} \mathbb{Z}$$

$$\partial_2(a,b) = [a]-[b]+[ab]$$

$$H^1(G;\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}_{Gp}(G,\mathbb{Z})$$

$\wr\wr$

$$\ker(\mathrm{Hom}(\bar\partial_2, \mathbb{Z}))$$

$$\ell \longmapsto (g \mapsto \ell(g))$$

---

Gpes finis :

$$|G| < +\infty$$

$V$ un $\mathbb{Z}G$-mod avec $|G|$ inversible sur $V$.

Théorème :

$$H^i(G;V) = \begin{cases} V^G & \text{si } i=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Preuve (Sur $\mathbb{Q}$ pour simplifier)

$$\to F_n \to \dots \to F_1 \to F_0 \to \mathbb{Q}$$

libre de $\mathbb{Q}G$-modules

Maschke : Tout $\mathbb{Q}G$-mod est projectif.

$$H^i(F;\mathbb{Q}) = H^i(\underbrace{\mathrm{Hom}_G(F_i,\mathbb{Q})}_{=(F_i^*)^G})$$

Prop : (c.f. premier exposé de Damien)

Soit $X$ un $G$-CX contractile avec des groupes d'isotropie finis, alors ← pas forcément nuls.

$$H^*(X/G;\mathbb{Q}) \cong H^*(G;\mathbb{Q})$$