

Dimension cohomologique virtuelle des groupes modulaires de surface

Anthony

20 janvier 2022

Notre objectif ici sera de décrire la stratégie suivie dans [Har86] pour démontrer le résultat suivant :

Théorème 0.1. *Soit S_g une surface fermée de genre $g \geq 2$. La dimension cohomologique virtuelle de $\text{Mod}(S_g)$ vaut $4g - 5$.*

Rappelons que la *dimension cohomologique* d'un groupe G , notée $\text{cd}(G)$, est la plus grande dimension $n \geq 1$ pour laquelle il existe un G -module M avec le groupe de cohomologie $H^n(G, M)$ non nul. Pour un point de vue plus géométrique, on peut dire que, si $\text{cd}(G) \neq 2$ alors la dimension cohomologique coïncide avec la *dimension géométrique*, i.e. la plus petite dimension d'un espace classifiant. Un inconvénient avec la dimension cohomologique est qu'elle devient infinie dès que le groupe contient de la torsion, ce qui motive l'introduction de la *dimension cohomologique virtuelle* :

$$\text{vcd}(G) = \min\{\text{cd}(H) \mid H \leq G \text{ d'indice fini}\}.$$

Ainsi, la dimension cohomologique virtuelle peut fournir un invariant fini si le groupe “ne contient pas trop de torsion”, i.e. s'il est virtuellement sans torsion. On peut démontrer que $\text{vcd}(G) = \text{cd}(H)$ pour tout sous-groupe d'indice fini $H \leq G$ sans torsion.

Puisque les groupes modulaires de surfaces contiennent de la torsion mais sont virtuellement sans torsion, la détermination de leur dimension cohomologique virtuelle fait sens. Commençons par remarquer :

Proposition 0.2. *Pour tout $g \geq 2$, la dimension cohomologique virtuelle de $\text{Mod}(S_g)$ est finie.*

Lemma 0.3. *Pour tous $g \geq 1$ et $n \geq 0$, $\text{Mod}(S_{g,n})$ est virtuellement sans torsion.*

Preuve de la proposition 0.2. Soit $G \leq \text{Mod}(S_g)$ un sous-groupe d'indice fini sans torsion. Nous savons que $\text{Mod}(S_g)$ agit proprement sur l'espace de Teichmüller \mathcal{T}_g , qui est homéomorphe à \mathbb{R}^{6g-6} . Donc G est le groupe fondamental de la variété \mathcal{T}_g/G de dimension $6g - 6$. On déduit de la dualité de Poincaré à coefficients locaux que $\text{vcd}(\text{Mod}(S_g)) = \text{cd}(G) \leq 6g - 6$. \square

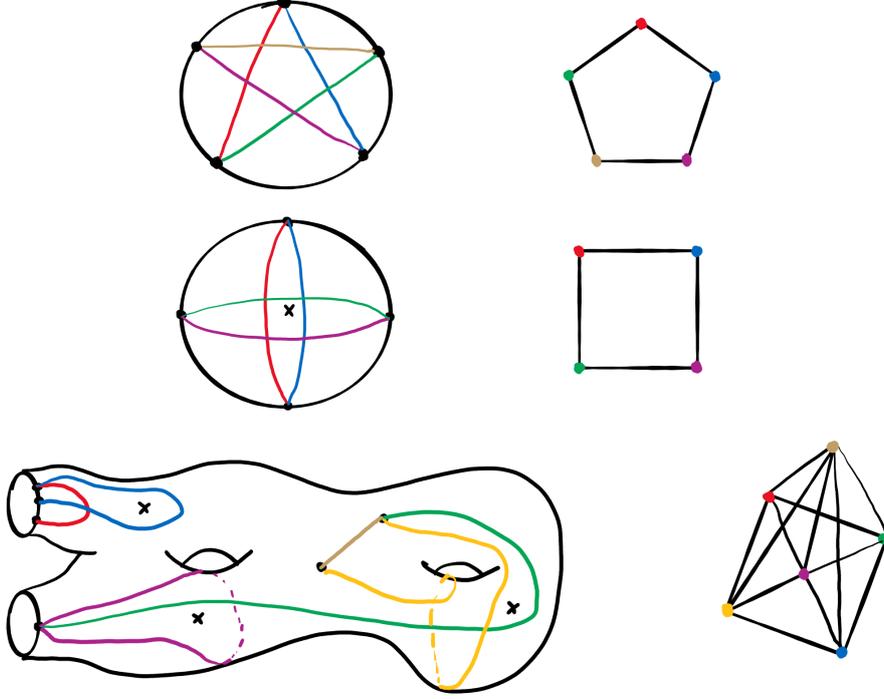
1 Un modèle combinatoire pour l'espace de Teichmüller

Commençons par associer un complexe simplicial à toute surface munie d'un ensemble de points privilégiés.

Définition 1.1. Soient S une surface et $\Delta \subset S$ un sous-ensemble fini de points. Un Δ -arc est soit un arc plongé reliant deux points de Δ soit une boucle plongée basée en un point de Δ . Il est *essentiel* si, relativement à Δ , il est homotopiquement non trivial et ne peut pas être homotopé dans $\partial S \setminus \Delta$. Le *complexe d'arcs* $\mathcal{A}(S, \Delta)$ est le complexe simplicial

- dont les sommets sont les classes d'isotopie (relativement à Δ) des Δ -arcs essentiels ;
- et dont les simplexes sont donnés par des arcs ayant deux à deux une intersection dans Δ .

On notera que $\text{Mod}(S \setminus \Delta)$ agit naturellement sur $\mathcal{A}(S, \Delta)$ en préservant la structure simpliciale.



À partir de maintenant, supposons que $S = S_g$ est fermée et $\Delta = \{p\}$. Notons A le complexe d'arcs correspondant. L'observation clef est que A contient un sous-espace homéomorphe à l'espace de Teichmüller \mathcal{T}_g^1 .

Théorème 1.2. *Il existe un homéomorphisme $\text{Mod}(S \setminus \{p\})$ -équivariant entre l'espace de Teichmüller \mathcal{T}_g^1 et $A \setminus A_\infty$, où A_∞ est le sous-complexe de A donné par les simplexes associés à des systèmes d'arcs ne remplissant pas S (i.e. au moins l'une des composantes connexes après découpage le long des arcs n'est pas un disque).*

2 Homotopie dans le complexe d'arcs

Identifions le type d'homotopie des complexes construits jusqu'ici. D'abord, le complexe d'arcs.

Proposition 2.1. *Soient S une surface et $\Delta \subset S$ un ensemble fini de points. Le complexe d'arcs $\mathcal{A}(S, \Delta)$ est contractile sauf*

- si S est un disque fermé et $\Delta \subset \partial S$, alors $\mathcal{A}(S, \Delta)$ est une sphère de dimension $|\Delta| - 4$;
- si S est un disque fermé pointé avec $\Delta \subset \partial S$ ou un anneau avec Δ dans une même composante de bord, alors $\mathcal{A}(S, \Delta)$ est une sphère de dimension $|\Delta| - 2$.

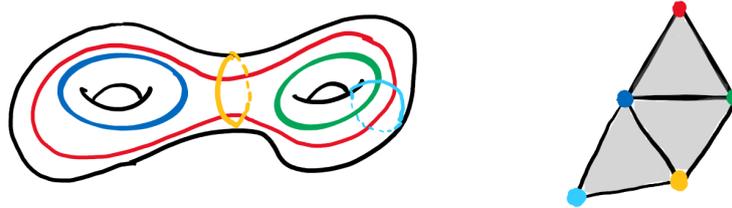
Ensuite, supposons que $S = S_g$ est fermée et $\Delta = \{p\}$. Nous venons de voir que A est contractile. Concernant le sous-complexe A_∞ :

Théorème 2.2. *A_∞ est homotopiquement équivalent au bouquet d'une infinité de sphères de dimension $2g - 2$.*

La preuve du théorème se fait en deux temps. D'abord, on identifie A_∞ à une variante du complexe d'arcs :

Proposition 2.3. *Il existe une équivalence d'homotopie $A_\infty \rightarrow \mathcal{C}(S \setminus p)$ vers le complexe des courbes qui est $\text{Mod}(S \setminus p)$ -équivariante.*

Étant donné une surface S , le *complexe des courbes* $\mathcal{C}(S)$ est le complexe simplicial dont les sommets sont les classes d'isotopie des courbes fermées simples essentielles de S , dont les arêtes sont données par des paires de courbes disjointes, et plus généralement dont les simplexes sont donnés par des collections de courbes deux à deux disjointes.

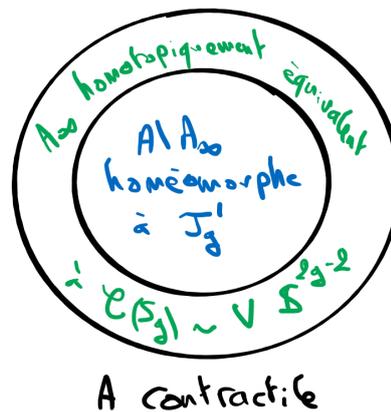


La deuxième étape pour prouver le théorème 2.2 est d'identifier le type d'homotopie des complexes des courbes.

Proposition 2.4. *Le complexe des courbes $\mathcal{C}(S_{g,n})$ est homotopiquement équivalent au bouquet d'une infinité de sphères de dimension $2g - 3 + n$.*

3 Une variété comme modèle

Résumons ce que nous savons jusqu'ici. Le complexe d'arcs $A := \mathcal{A}(S_g, p)$ est contractile ; son "bord" A_∞ est homotopiquement équivalent au complexe des courbes $\mathcal{C}(S_g \setminus \{p\})$, et donc à un bouquet de sphères de dimension $2g - 2$; et son "intérieur" $A \setminus A_\infty$ est homéomorphe à l'espace de Teichmüller \mathcal{T}_g^1 .



Le point clef est qu'il est possible de perturber nos définitions afin d'obtenir un sous-complexe dans une subdivision suffisamment fine de A qui aura un comportement similaire mais qui sera de surcroît une variété.

Théorème 3.1. *Il existe un sous-complexe W dans la seconde subdivision barycentrique de A tel que :*

- W est une variété à bord, contractile, non compacte, de dimension $6g - 4$;
- son bord est homotopiquement équivalent à un bouquet d'une infinité de sphères de dimension $2g - 2$;

— l'action de $\text{Mod}(S_g, p)$ sur W est proprement discontinue et cocompacte.

Avoir une telle variété suffit pour calculer la dimension cohomologique virtuelle de $\text{Mod}(S_g, p)$, ce qui nous permettra d'en déduire la dimension cohomologique virtuelle de $\text{Mod}(S_g)$.

4 Calcul de la dimension cohomologique

Une difficulté pour calculer la dimension cohomologique d'un groupe G est qu'il faut considérer les groupes de cohomologie à coefficients dans n'importe quel G -module. En fait, sous certaines hypothèses, on peut se ramener à un calcul de cohomologie à coefficients dans \mathbb{Z} .

Proposition 4.1. [Bro82, Corollary VIII.7.6] *Soient G un groupe et X un $K(G, 1)$ compact. Alors*

$$\text{cd}(G) = \max\{n \mid H_c^n(\tilde{X}, \mathbb{Z}) \neq 0\}.$$

Preuve du théorème 0.1. Commençons par montrer que $\text{Mod}(S_g, p)$ est de dimension cohomologique virtuelle $4g - 3$. Pour cela fixons un sous-groupe d'indice fini sans torsion $G \leq \text{Mod}(S_g, p)$. Comme G agit librement, proprement discontinûment et cocompactement sur W , on sait que W/G est un espace classifiant compact de G . Soit $k \geq 0$.

— Par dualité de Poincaré, $H_c^k(W, \mathbb{Z}) \simeq H_{6g-4-k}(W, \partial W, \mathbb{Z})$.

— Comme W est contractile, on déduit de la longue suite exacte en homologie relative que $H_{6g-4-k}(W, \partial W, \mathbb{Z}) \simeq \tilde{H}_{6g-5-k}(\partial W)$.

Comme ∂W est homotopiquement équivalent à un bouquet d'une infinité de sphères de dimension $2g - 2$, on conclut que

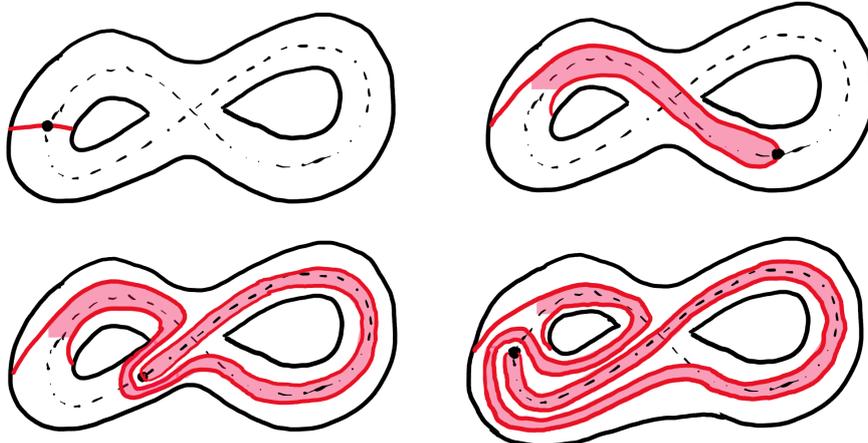
$$H_c^k(W, \mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 4g - 3 \\ \mathbb{Z}^\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

La proposition 4.1 implique que $\text{vcd}(\text{Mod}(S_g, p)) = \text{cd}(G) = 4g - 3$.

Montrons maintenant que $\text{Mod}(S_g)$ est de dimension cohomologique virtuelle $4g - 5$. Le lien avec $\text{Mod}(S_g, p)$ est fait par la suite exacte de Birman :

$$1 \rightarrow \pi_1(S_g, p) \rightarrow \text{Mod}(S_g, p) \rightarrow \text{Mod}(S_g) \rightarrow 1.$$

Le quotient $\text{Mod}(S_g, p) \rightarrow \text{Mod}(S_g)$ revient à "oublier" le point marqué p . Autrement dit, au lieu de regarder les homéomorphismes modulo les isotopies qui fixent p , on regarde les homéomorphismes modulo les isotopies qui peuvent ne pas fixer p . Le noyau correspond donc aux isotopies qui font "bouger" p le long d'un lacet homotopiquement non trivial. Le morphisme $\pi_1(S_g, p) \rightarrow \text{Mod}(S_g, p)$ s'appelle Push. Il revient à "poser le doigt sur p puis à le pousser le long d'un lacet basé en p ".



Fixons un sous-groupe d'indice fini sans torsion $K \leq \text{Mod}(S_g)$ et notons $G \leq \text{Mod}(S_g, p)$ sa pré-image par la projection ci-dessus. Alors G est un sous-groupe d'indice fini sans torsion de $\text{Mod}(S_g, p)$ et on a la suite exacte

$$1 \rightarrow \pi_1(S_g, p) \rightarrow G \rightarrow K \rightarrow 1.$$

Par un argument général sur les suites exactes, on a $\text{cd}(G) \leq \text{cd}(K) + \text{cd}(\pi_1(S_g, p))$, d'où $d := \text{cd}(K) \geq 4g - 5$. Pour montrer l'inégalité inverse, on suppose que M est un K -module tel que $H^d(K, M) \neq 0$. On déduit de la suite spectrale associée à la suite exacte ci-dessus que

$$H^{d+2}(G, M) \simeq H^d(K, H^2(\pi_1(S_g, p), M)) \simeq H^d(K, M) \neq 0.$$

Comme G est de dimension cohomologique $4g - 3$, on doit avoir $d \leq 4g - 5$. On conclut que $\text{Mod}(S_g)$ est de dimension cohomologique virtuelle exactement $4g - 5$. \square

5 Preuve du lemme 0.3

Démonstration. Commençons par supposer que $n = 0$. Comme $\text{Mod}(S_1)$ est isomorphe à $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$, on sait qu'il est virtuellement sans torsion. Supposons donc $g \geq 2$. Comme tout homéomorphisme de S_g induit un automorphisme de $H_1(\pi_1(S_g), \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2g}$, qui ne dépend que de la classe d'homotopie dudit homéomorphisme, on obtient une représentation $\varphi : \text{Mod}(S_g) \rightarrow \text{GL}(2g, \mathbb{Z})$. En fait, puisque les éléments de $\text{Mod}(S_g)$ sont représentés par des homéomorphismes qui préservent l'orientation, l'image de φ vit dans $\text{SL}(2g, \mathbb{Z})$. On a donc

$$\psi_m : \text{Mod}(S_g) \xrightarrow{\varphi} \text{SL}(2g, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{réduction mod } m} \text{SL}(2g, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}).$$

Or le noyau du second morphisme est connu pour être sans torsion, et le fait suivant implique que φ vérifie la même propriété (si $m \geq 3$). Donc $\ker(\psi_m)$ définit un sous-groupe d'indice fini sans torsion dans $\text{Mod}(S_g)$.

Fact 5.1. *Si $f \in \text{Mod}(S_g) \setminus \{1\}$ est d'ordre fini, alors $\varphi(f) \neq 1$.*

Puisqu'un groupe fini (non trivial) est de dimension cohomologique infini, $\langle f \rangle$ ne peut pas agir librement sur une variété. Quitte à remplacer f par une puissance non triviale, on peut donc supposer que f fixe un point dans l'espace de Teichmüller $\text{Teich}(S_g)$. Rappelons qu'un point dans $\text{Teich}(S_g)$ est la donnée d'une paire (X, ϕ) , où X est une variété hyperbolique et $\phi : S_g \rightarrow X$ un difféomorphisme, modulo la relation : $(X, \phi) \simeq (Y, \psi)$ s'il existe une isométrie $i : X \rightarrow Y$ telle que $i \circ \phi$ est homotope à ψ . De plus, $\text{Mod}(S_g)$ agit sur $\text{Teich}(S_g)$ via $[h] \cdot [X, \phi] = [X, \phi \circ h^{-1}]$. Comme f fixe un point de $\text{Teich}(S_g)$, disons $[X, \phi]$, il existe donc une isométrie i de X telle que f peut être représentée par $\phi^{-1} \circ i \circ \phi$. Autrement dit, il existe une métrique hyperbolique sur S_g telle que f admet un représentation isométrie d'ordre fini.

Remarquons qu'une isométrie non trivial de S_g qui préserve l'orientation n'a qu'un nombre fini de points fixes et qu'ils sont tous d'indice 1. En effet, si $x \in S_g$ est un point fixe de f , alors la différentielle $D_x f$ doit être une rotation non triviale. Ceci implique que les points fixes de f sont isolés, donc il ne peut y en avoir qu'un nombre fini; et que, moralement, f agit comme une rotation sur un petit voisinage autour de x , ce qui implique que x doit être d'indice 1. On déduit du théorème de point fixe de Lefschetz que

$$2 - \text{tr}(\varphi(f)) = \sum_{i=0}^2 (-1)^i \text{tr}(f^* : H_i(S_g, \mathbb{Z}) \rightarrow H_i(S_g, \mathbb{Z})) = \sum_{x \in S_g \text{ point fixe}} \text{Indice}_f(x) \geq 0,$$

d'où $\text{tr}(\varphi(f)) \leq 2$, ce qui empêche d'avoir $\varphi(f) = 1$.

Lorsque $n > 0$, on raisonne par récurrence grâce à la suite exacte de Birman

$$1 \rightarrow \pi_1(S_g) \rightarrow \text{Mod}(S_{g,n}) \rightarrow \text{Mod}(S_{g,n-1}) \rightarrow 1$$

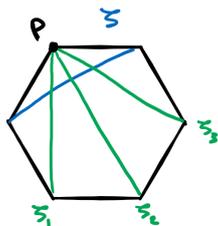
précédemment utilisée et grâce au cas $n = 0$ que nous venons de traiter. \square

6 Preuve de la proposition 2.1

Commençons par montrer le premier cas exceptionnel de la proposition 2.1. Le deuxième peut se montrer par un argument similaire.

Proposition 6.1. *Soient S un disque fermé et $\Delta \subset \partial S$ un ensemble fini de points marqués. Alors $\mathcal{A}(S, \Delta)$ est une sphère de dimension $|\Delta| - 4$.*

Démonstration. Posons $n := |\Delta|$. Notre complexe d'arcs \mathcal{A}_n correspond au complexe simplicial dont les sommets sont les diagonales d'un n -gone P_n et dont les simplexes sont donnés par les collections de diagonales qui deux à deux ne se croisent pas à l'intérieur P_n . Fixons un sommet de référence $p \in P_n$, notons ζ la diagonale reliant les deux voisins de p , et notons $\zeta_1, \dots, \zeta_{n-3}$ les diagonales partant de p .



Les sommets de \mathcal{A}_n sont $\zeta; \zeta_1, \dots, \zeta_{n-3}$, qui engendrent un simplexe Z ; et les diagonales disjointes de ζ , qui engendrent un sous-complexe L . On remarquera que L est homéomorphe à \mathcal{A}_{n-1} , donc, en raisonnant par récurrence, nous savons que L est une $(n - 5)$ -sphère. Comme ζ est adjacent à tous les sommets de L , le sous-complexe engendré par L et ζ est une $(n - 4)$ -boule dont L est le bord. Si nous montrons que le sous-complexe A engendré par L et Z est une $(n - 4)$ -boule dont L est le bord, alors on saura que \mathcal{A} est obtenu en recollant deux $(n - 4)$ -boules le long de leur bord, et donc est une $(n - 4)$ -sphère.

Commençons par remarquer que A est une variété de dimension $(n - 4)$ dont L est le bord. Pour cela, il suffit de montrer que \mathcal{A}_n est une variété, puisque A est obtenu à partir de \mathcal{A}_n en retirant le sommet ζ (ainsi que toute les cellules ouvertes contenant ζ dans leur fermeture) et que L est le link de ζ . C'est une conséquence des observations suivantes.

- Tout k -simplexe est inclus dans un $(n - 4)$ -simplexe (i.e. toute collection de k diagonales deux à deux non transverses s'étend en une collection de $n - 4$ diagonales).
- Tout $(n - 5)$ -simplexe est inclus dans exactement deux $(n - 4)$ -simplexe (i.e. toute collection de $n - 5$ diagonales deux à deux non transverses s'étend exactement de deux manières en une collection de $n - 4$ diagonales).

À partir de maintenant, nous voulons montrer que A est une $(n - 4)$ -boule.

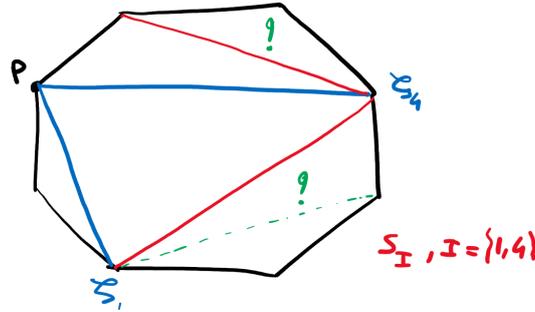
Notons A_k l'union des simplexes contenant au moins k diagonales parmi $\zeta_1, \dots, \zeta_{n-3}$. On a

$$Z = A_{n-3} \subset A_{n-2} \subset \dots \subset A_2 \subset A_1 = A.$$

En utilisant le même raisonnement que précédemment, on vérifie que les A_k sont des variétés. Pour tout $I \subset \{1, \dots, n-3\}$, notons Λ_I l'union des simplexes contenant exactement les $\zeta_i, i \in I$, parmi $\zeta_1, \dots, \zeta_{n-3}$. On a

$$A_k = A_{k+1} \cup \bigcup_{|I|=k} \Lambda_I.$$

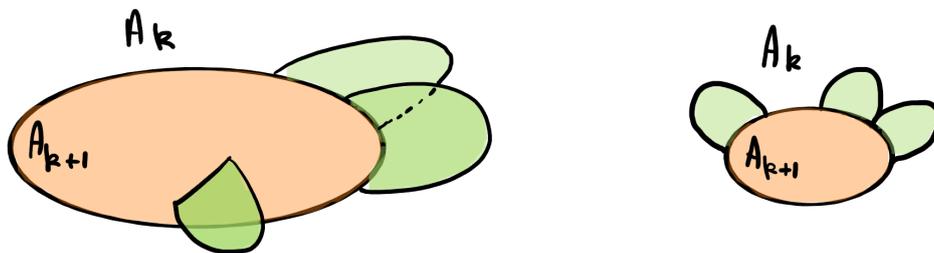
Fixons un $I \subset \{1, \dots, n\}$ de taille k . Soit S_I l'ensemble des diagonales reliant les extrémités de deux $\zeta_i, i \in I$, consécutifs mais pas adjacents.



Alors Λ_I est l'union des simplexes contenant $S_I \cup \{\zeta_i \mid i \in I\}$. Il est le joint du simplexe Z avec le simplexe S_I et les complexes d'arcs $\mathcal{A}^\alpha, \alpha \in S_I$, des polygones délimités par les diagonales dans S_I . Par récurrence, chacun de ces complexes d'arcs est une sphère. En réorganisant notre joint, on en déduit que Λ_I est le joint de Z avec les boules $\alpha * \mathcal{A}^\alpha, \alpha \in S_I$. Ainsi, Λ_I est une $(n-4)$ -boule. De plus,

- $\Lambda_I \cap A_{k+1}$ est l'union des simplexes contenant les $\zeta_i, i \in I$, mais pas toutes les diagonales dans S_I . Dans notre décomposition de Λ_I en joint, cela revient à prendre le joint de Z avec le bord du joint des $\alpha * \mathcal{A}^\alpha, \alpha \in S_I$. Ainsi, $\Lambda_I \cap A_{k+1}$ est une $(n-5)$ -boule dans le bord de Λ_I .
- Si $J \neq I$, alors $\Lambda_I \cap \Lambda_J$ est l'union des simplexes contenant les $\zeta_i, i \in I \cup J$. L'intersection est donc incluse dans A_{k+1} .

On conclut que A_k est obtenu à partir de A_{k+1} en recollant des $(n-4)$ -boules le long de $(n-5)$ -boules de leur bord.



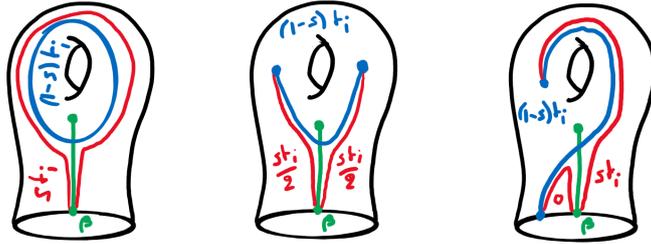
Comme A_k est une variété et que A_{k+1} est une $(n-4)$ -boule par récurrence, on conclut que A_k doit être une $(n-4)$ -boule également. De proche en proche, on conclut que A est une $(n-4)$ -boule. \square

Ensuite, nous nous focalisons sur l'affirmation principale de la proposition 2.1.

Proposition 6.2. *Soient S une surface et $\Delta \subset S$ un nombre fini de points marqués. Supposons que S n'est ni un disque fermé avec $\Delta \subset \partial S$, ni un disque fermé pointé avec $\Delta \subset \partial S$, ni un anneau avec Δ dans une même composante de bord. Le complexe d'arcs $\mathcal{A}(S, \Delta)$ est contractile.*

Démonstration. Supposons tout d'abord que chaque composante de bord contient au plus deux points de Δ . Fixons un arc essentiel orienté β . On souhaite montrer que $\mathcal{A}(S, \Delta)$ se rétracte par déformation dans $\text{star}(\beta)$, c'est-à-dire dans le sous-complexe donné par les arcs disjoints de β . Ce dernier étant clairement contractile, cela montre que $\mathcal{A}(S, \Delta)$ est contractile.

Un point $p \in \mathcal{A}(S, \Delta)$ peut s'écrire comme une combinaison convexe $t_1v_1 + \dots + t_kv_k$ des sommets v_1, \dots, v_k d'un simplexe. On pensera alors au point p comme l'union des arcs v_1, \dots, v_k (qu'on suppose en position minimale vis à vis de β) respectivement munis des poids t_1, \dots, t_k . Étant donné un $s \in [0, 1]$, on souhaite définir un nouveau point p_s . Si les v_i sont tous disjoints de β , alors $p_s := p$. Sinon, on remplace l'arc v_i qui coupe β en dernier comme suit :



En considérant la filtration

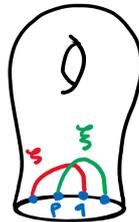
$$\text{star}(\beta) = \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1 \subset \dots \subset \mathcal{A}(S, \Delta),$$

où chaque \mathcal{A}_i est le sous-complexe de $\mathcal{A}(S, \Delta)$ donné par les arcs qui intersectent β au plus i fois, alors

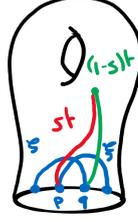
$$R : \begin{cases} [0, 1] \times \mathcal{A}(S, \Delta) & \rightarrow \mathcal{A}(S, \Delta) \\ (s, p) & \mapsto p_s \end{cases}$$

est une homotopie entre l'identité $R(0, \cdot)$ et une application $R(1, \cdot)$ qui fixe les points de \mathcal{A}_0 et qui envoie chaque \mathcal{A}_i avec $i \geq 1$ dans \mathcal{A}_{i-1} . On conclut que $\mathcal{A}(S, \Delta)$ se rétracte par déformation sur $\text{star}(\beta)$, comme annoncé.

Supposons maintenant qu'une composante de ∂S contient au moins trois points de Δ . Fixons deux points $p, q \in \Delta$ consécutifs le long d'une telle composante, et deux arcs ζ, ξ comme suit (les points tout à gauche et tout à droite pouvant être identique) :



Notons $\mathcal{A}(\zeta)$ le sous-complexe de $\mathcal{A}(S, \Delta)$ donné par les arcs distincts de ζ . Par un argument similaire au précédent, on montre que $\mathcal{A}(\zeta)$ se rétracte par déformation sur $\text{star}(\xi)$:



Ainsi, $\mathcal{A}(\zeta)$ est contractile. Mais $\mathcal{A}(S, \Delta)$ est l'union de $\mathcal{A}(\zeta)$ avec $\text{star}(\zeta)$, tous deux contractiles, dont l'intersection est $\text{link}(\zeta) \simeq \mathcal{A}(S, \Delta - p)$. On conclut par récurrence. \square

7 Preuve de la proposition 4.1

Démonstration. Tout d'abord, remarquons que, puisque G est de dimension cohomologique finie, la valeur de cette dimension peut être calculée en se restreignant aux G -modules libres, i.e.

$$\text{cd}(G) = \max\{n \mid H^n(G, M) \neq 0 \text{ pour un } G\text{-module libre } M\}.$$

En effet, donnons-nous un G -module M tel que $H^d(G, M) \neq 0$ pour $d = \text{cd}(G)$. En décrivant M comme le quotient d'un G -module libre L , on obtient une suite exacte

$$0 \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Fixons une résolution projective $F \rightarrow \mathbb{Z}$ de G . On vérifie aisément que la suite exacte précédente induit une suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Hom}_G(F, N) \rightarrow \text{Hom}_G(F, L) \rightarrow \text{Hom}_G(F, M) \rightarrow 0.$$

À une telle suite exacte courte est associée une suite exacte longue

$$\dots \rightarrow H^d(G, N) \rightarrow H^d(G, L) \rightarrow \underbrace{H^d(G, M)}_{\neq 0} \rightarrow \underbrace{H^{d+1}(G, N)}_{=0} \rightarrow \dots,$$

d'où on déduit que $H^d(G, L) \neq 0$ puisque $H^d(G, L)$ se surjecte sur $H^d(G, M) \neq 0$. Autrement dit, nous venons de prouver que, en dimension maximale, on peut toujours trouver de la cohomologie non triviale à coefficients dans un module libre, prouvant notre affirmation.

Maintenant, remarquons que, puisque G est de type FP_∞ , la dimension cohomologie peut être calculée en se restreignant uniquement à $\mathbb{Z}G$, i.e.

$$\text{cd}(G) = \max\{n \mid H^n(G, \mathbb{Z}G) \neq 0\}.$$

En effet, supposons que $H^n(G, \mathbb{Z}G) = 0$ et montrons que, quelque soit le G -module libre L , $H^n(G, L) = 0$. Pour cela, fixons une résolution projective $F \rightarrow \mathbb{Z}$ de type fini et une base $(e_i)_{i \in I}$ de L . Comme F est de type fini, on a

$$\text{Hom}_G(F, L) = \text{Hom}_G\left(F, \varinjlim L_J\right) = \varinjlim \text{Hom}_G(F, L_J)$$

où la limite inductive est prise sur les $J \subset I$ finis. De plus, l'application bord passe également à la limite inductive. D'où

$$H^n(G, L) = \varinjlim H^n(G, L_J) = \varinjlim \bigoplus_{j \in J} H^n(G, \mathbb{Z}G e_j) = 0,$$

prouvant notre affirmation.

L'avantage de la cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}G$ est de pouvoir se ramener à un calcul à coefficients dans \mathbb{Z} . En effet,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hom}_c(C_*(\tilde{X}), \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}_G(C_*(\tilde{X}), \mathbb{Z}G) \\ \varphi \mapsto \left(\sigma \mapsto \sum_{g \in G} \varphi(g^{-1}\sigma) \cdot g \right) \end{array} \right.$$

définit un isomorphisme (qui, moralement, transforme un morphisme \mathbb{Z} -linéaire en un morphisme $\mathbb{Z}G$ -linéaire), d'où

$$H^*(G, \mathbb{Z}G) \simeq H^*(\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(C(\tilde{X}), \mathbb{Z}G)) \simeq H^*(\text{Hom}_c(C(\tilde{X}), \mathbb{Z})) = H_c^*(\tilde{X}, \mathbb{Z}).$$

Ce qui conclut la preuve de notre proposition. □

Références

- [Bro82] K. Brown. *Cohomology of groups*, volume 87 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
- [Har86] J. Harer. The virtual cohomological dimension of the mapping class group of an orientable surface. *Invent. Math.*, 84(1) :157–176, 1986.