Damien - suite et fin

Rappels : $St_g := H_{2g-2}(\mathscr{C}_g)$ avec $\mathscr{C}_g \simeq \partial T_g^{\text{thick}}$

"module de Steinberg"

St_g est le module $\mathbb{Q}$-dualisant pour Mod_g :

$$H^k(Mod_g, \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{Q}\text{-rep}}}{V}) \simeq H_{4g-5-k}(Mod_g, V \otimes (St_g \otimes \mathbb{Q})) \quad (= 0 \text{ si } k > 4g-5)$$

En particulier : $H^{4g-5}(Mod_g, \mathbb{Q}) \simeq H_0(Mod_g, St_g \otimes \mathbb{Q})$

$$\simeq (St_g \otimes \mathbb{Q})_{Mod_g}$$

<u>But</u> : montrer que $(St_g \otimes \mathbb{Q})_{Mod_g} = 0$.

En fait on peut montrer que $(St_g)_{Mod_g} = 0$.

$$\mathscr{C}_g \simeq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1 point marqué}}}{\mathscr{C}_{g,*}} \simeq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{arcs non} \\ \text{remplissants}}}{A_\infty}(S_g, *) \quad \text{bord de } A(S_g,*) \text{ qui est contractile.}$$

<u>Conséquence</u> : $St_g \simeq H_{2g-2}(A_\infty(S_g,*)) \simeq H_{2g-1}(A(S_g,*)/A_\infty(S_g,*))$

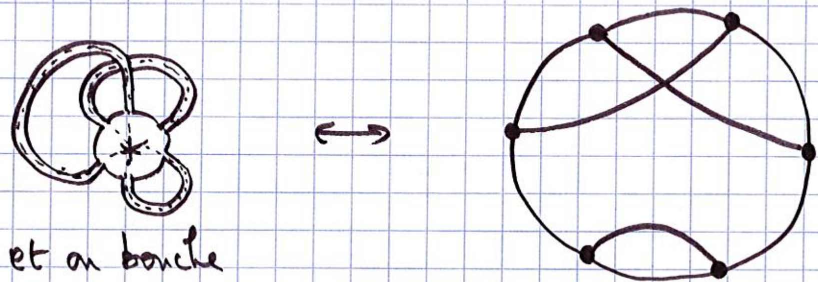
$$\| $$

$$C_{2g-1}(A/A_\infty) / \partial C_{2g}(A/A_\infty)$$

Cette dernière égalité vient de la factorisation :

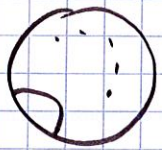
$$\begin{tikzcd}
\partial : C_{2g-1}(A) \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & C_{2g-2}(A) \\
& C_{2g-2}(A_\infty) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

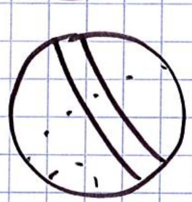
On a une correspondance : systèmes d'arcs $\longleftrightarrow$ diagrammes de cordes



et on bouche les trous

• Condition : $g = \dfrac{\#\text{cordes} + 1 - \#\text{composantes de bord}}{2}$

•  $\longmapsto 0$ (arc contractile) (1)

•  $\longmapsto 0$ (deux arcs homotopes) (2)

Soit $F_i^1 = \mathbb{Z}\{$diagrammes de cordes décorés (*) avec $2g+i$ ~~1~~ cordes et $i+1$ composantes de bord$\}/((1)$ et $(2))$

$\partial : F_i^1 \longrightarrow F_{i-1}^1$ (somme alternée de "enlever une corde")

$\partial = \sum_{j=1}^{2g+i-1} (-1)^j \partial_j$

(*) on décore chaque corde par un élément de $\pi_1(S_g, *)$.

On a $St_g = F_0^1 / \partial F_1^1$.

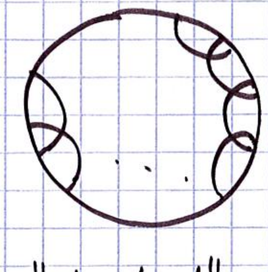
<u>Remarque</u> : L'action de Mod_g sur F_i^1 est par action sur les décorations ($Mod_g \circlearrowright \pi_1(S_g,*)$)

Cette action est transitive, sur F_0 au moins et donc

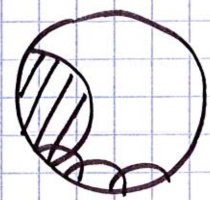
$(St_g)_{Mod_g} = \mathcal{U}_0 / \partial \mathcal{U}_1$ où $\mathcal{U}_i = \mathbb{Z}\{$diagrammes non décorés$\}/\ldots$

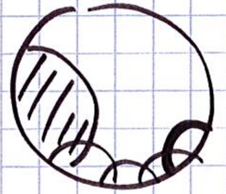
(En fait on a aussi une relation qui a à voir avec l'ordre linéaire qu'on s'est implicitement fixé sur les cordes.)

<u>Théorème</u> : [Broaddus] St_g est cyclique, engendrée par la classe de



(qui donne la présentation "standard" du π_1.)

<u>Idée de la preuve</u> : par récurrence, si $Y =$ , on note

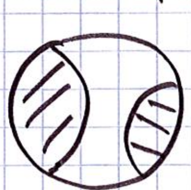
$\tilde{Y} =$ , alors $\tilde{Y} \in \mathcal{F}'_1$

$\partial \tilde{Y} = \pm Y + \cdots \pm$ 

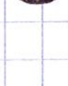
Les termes "..." sont nuls. En effet :

<u>Lemme</u> : La classe dans $\mathcal{F}'_0 / \partial \mathcal{F}'_1$ d'un diagramme disconnecté est zéro.

<u>Idée de la preuve</u> :

$Y =$  $\tilde{Y} =$  $\in \mathcal{F}'_1$

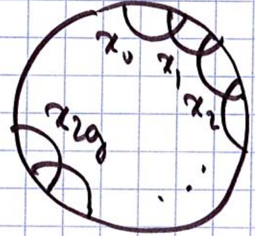
$\partial \tilde{Y} = \pm Y +$ termes avec au moins 2 composantes de bord.

Conséquence du théorème de Broaddus : $(St_g)_{Mod_g} = \begin{cases} 0 \\ \text{ou} \\ \mathbb{Z}[\ \ ]/q\mathbb{Z} \end{cases}$ 

Prop: dans $\mathcal{U}_0/\partial\mathcal{U}_1$, la classe de 

est zéro.

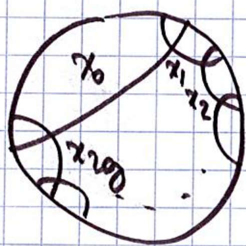
Preuve: Appelons X cet élément et posons

$Y =$ 

$\in \mathcal{U}_1$.

$$\partial Y = X + (-1)^{2g} X = 2X$$

Posons aussi

$Z =$ 

$$\partial Z = X - (-1)^{2g-1} X + (+X) - (-X) \cdots = (2g+1) X$$

signature d'une permutation cyclique de longueur $2g$

On en conclut que $X = 0$. $\lrcorner$