

Espace de Teichmüller et complexe des arcs

Anthony

26 mars 2022

Notre objectif ici est de décrire et d'expliquer le lien qui existe entre l'espace de Teichmüller \mathcal{T}_g^1 et le complexe des arcs \mathcal{A}_g^1 d'une surface Σ pointée de genre $g \geq 1$.

Théorème 0.1. *Notons $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_g^1$ le sous-complexe engendré par les simplexes propres (i.e. tels que chaque composante du complémentaire des arcs est un disque). Il existe un homéomorphisme $q : \mathcal{T}_g^1 \rightarrow \mathcal{A}$.*

L'idée est d'associer à chaque métrique hyperbolique sur Σ une triangulation canonique (pondérée). C'est la construction du cut locus. Le système d'arcs (pondéré) donné par q sera alors dual à cette triangulation.

En fait, il existe un *espace de Teichmüller augmenté* $\overline{\mathcal{T}}_g^1$, qui essentiellement revient à autoriser les métriques hyperboliques dégénérées sur notre surface. Le quotient $\overline{\mathcal{M}}_g^1 := \overline{\mathcal{T}}_g^1 / \text{Mod}(S_g^1)$ donne une compactification de l'espace des modules, mais celle-ci est distincte¹ de la compactification de Deligne-Mumford $\widehat{\mathcal{M}}_g^1$. La construction du cut locus s'applique toujours et permet d'associer à toute métrique hyperbolique une triangulation (pondérée) de la surface. L'application q est alors la restriction d'un homéomorphisme $\overline{\mathcal{T}}_g^1 \rightarrow \mathcal{A}_g^1$.

Nous suivrons [BE88] dans ce qui suit.

1 Complexe des arcs

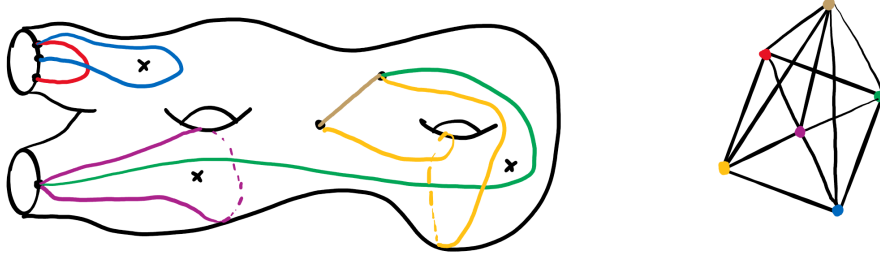
Commençons par rappeler brièvement la définition du complexe d'arcs.

Définition 1.1. Soient S une surface et $\Delta \subset S$ un sous-ensemble fini de points. Un Δ -arc est soit un arc plongé reliant deux points de Δ soit une boucle plongée basée en un point de Δ . Il est *essentiel* si, relativement à Δ , il est homotopiquement non trivial et ne peut pas être homotopé dans $\partial S \setminus \Delta$. Le *complexe d'arcs* $\mathcal{A}(S, \Delta)$ est le complexe simplicial

- dont les sommets sont les classes d'isotopie (relativement à Δ) des Δ -arcs essentiels ;
- et dont les simplexes sont donnés par des arcs ayant deux à deux une intersection dans Δ .

On notera que $\text{Mod}(S \setminus \Delta)$ agit naturellement sur $\mathcal{A}(S, \Delta)$ en préservant la structure simpliciale.

1. La différence vient essentiellement du fait que, dans la compactification de Deligne-Mumford, on autorise les métriques à dégénérer sur des anneaux, alors qu'ici on autorise les métriques à dégénérer sur n'importe quelles sous-surfaces à bord.

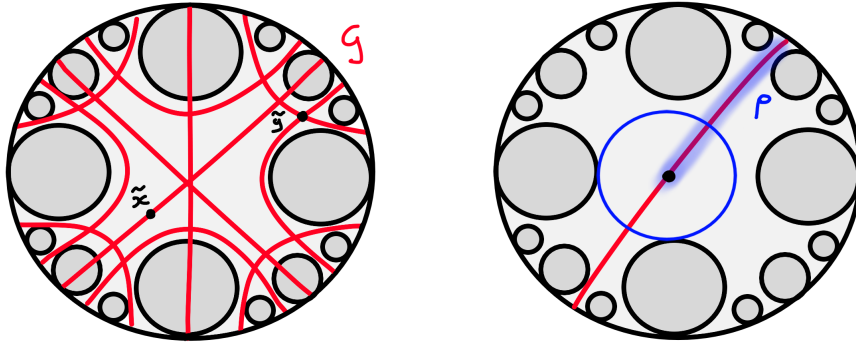


2 Construction du cut locus

Soit Σ une surface hyperbolique (complète, d'aire finie) avec une cusp, dont on note p le point marqué associé. Fixons un petit voisinage horocyclique H de p , et notons ℓ la longueur de son bord. Pour tout $x \in \Sigma$, notons $w(x)$ le nombre de points de H à distance minimale de x .

Lemma 2.1. *L'ensemble $S := \{x \in \Sigma \mid w(x) \geq 3\}$ est fini, et $A_1 := \{x \in \Sigma \mid w(x) = 2\}$ est une union disjointe d'arcs géodésiques reliant les points de S .*

Démonstration. Soit $x \in A_1$. Identifions le revêtement universel de Σ avec le plan hyperbolique muni d'une collection d'horodisques \mathcal{H} donnée par les relevés de H . Notons \mathcal{G} l'union de toute les géodésiques équidistantes à deux horodisques dans \mathcal{H} . Nécessairement, un relèvement \tilde{x} de x appartient à \mathcal{G} et le plus petit disque centré en \tilde{x} intersectant un horodisque dans \mathcal{H} intersecte exactement deux horodisques. Donc \tilde{x} appartient à l'intérieur d'un arc dans \mathcal{G} , et réciproquement un petit arc dans \mathcal{G} contenant \tilde{x} se projette dans A_1 . Donc A_1 est une union disjointe d'arcs géodésiques. Un tel arc se termine sur un point de S ou bien se prolonge à l'infini. Ce dernier cas est impossible, car sinon on pourrait trouver un rayon infini ρ dans \mathcal{G} et deux horodisques $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$ tels que, pour tout point $x \in \rho$, le boule centrée en x tangente à H_1, H_2 est disjointe de tout autre horodisque dans \mathcal{H} .



Donc A_1 est bien une union disjointe d'arcs géodésiques reliant les points de S . Pour montrer que S est fini, il suffit de remarquer que S est discret. Soit $y \in S$. Fixons un relèvement \tilde{y} dans $\tilde{\Sigma}$. Nécessairement, \tilde{y} est équidistant à $k \geq 3$ horodisques dans \mathcal{H} et le plus petit disque centré en \tilde{y} intersectant un horodisque de \mathcal{H} intersecte exactement ces k horodisques. Bouger \tilde{y} d'une petite distance brise cette configuration, et donne un point qui n'est pas dans S . Cette petite boule autour de \tilde{y} se projette sur une petite autour de y dont l'intersection avec S est $\{y\}$. \square

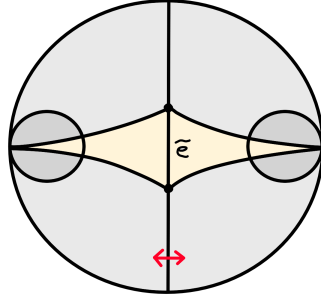
Pour tout point $x \in \Sigma \setminus (S \cup A_1)$, il existe un unique point de H à distance minimale. L'unique géodésique minimale reliant x à ce point peut être prolongée au delà de x jusqu'à tomber sur un point de $S \cup A_1$ et à l'intérieur de H jusqu'à p . Ces géodésiques sont les *lignes de rétraction*. On remarquera que ces lignes permettent de rétracter $\Sigma \setminus (S \cup A_1)$

sur p , donc le complémentaire de $S \cup A_1$ est un disque. Notons A_2 l'union des lignes de rétraction passant par un point de S .

Lemma 2.2. *L'union $S \cup A_1 \cup A_2$ définit une triangulation finie de Σ telle que :*

- *tout triangle a exactement un côté dans A_1 et exactement un sommet qui est p ;*
- *tout arc e dans A_1 est le côté de deux triangles, dont l'un peut être obtenu à partir de l'autre par une réflexion le long de e .*

Démonstration. La première affirmation est claire par construction. Pour la deuxième affirmation, il suffit de regarder ce qui se passe dans le revêtement universel.



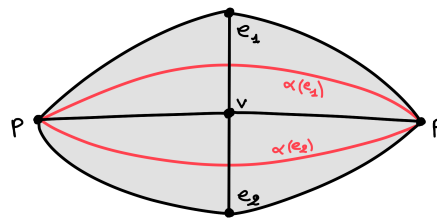
□

La construction du cut locus associe à notre surface hyperbolique pointée Σ la triangulation $S \cup A_1 \cup A_2$ dont on pondère les arcs de A_1 comme suit. Soient e un arc de A_1 et T_1, T_2 les deux triangles contenant e . Le sommet de T_i opposé à e est p . Notons $\ell(e)$ la longueur du sous-arc de ∂H à l'intérieur de T_i . Comme T_1 peut être obtenu à partir de T_2 par réflexion le long de e , cette longueur ne dépend pas de i . Posons le poids $\theta(e) := 2\ell(e)/\ell$. Remarquons que

$$\sum_{e \in A_1} \theta(e) = \frac{1}{\ell} \sum_{e \in A_1} 2\ell(e) = 1.$$

3 De l'espace de Teichmüller vers le complexe des arcs

Définissons une application $q : \mathcal{T}_g^1 \rightarrow \mathcal{A}_g^1$. Un point \mathcal{X} dans \mathcal{T}_g^1 nous donne une surface hyperbolique, à laquelle la construction du cut locus associe une triangulation pondérée $S \cup A_1 \cup A_2$. Pour tout $e \in A_1$, notons $\alpha(e)$ l'arc basé à p coupant en deux les deux triangles contenant e . On associe à $\alpha(e)$ le poids $\theta(e)$. Remarquons que $\{\alpha(e) \mid e \in A_1\}$ est un système d'arcs. En effet, $\alpha(e)$ est homotopiquement non trivial puisque son relèvement relie deux points distincts à l'infini (l'un étant obtenu à partir de l'autre par réflexion le long de \tilde{e}). Ensuite, si $\alpha(e_1)$ et $\alpha(e_2)$ sont homotopes, alors ils bordent un disque, qu'on supposera, sans perte de généralité, ne contenir aucun autre $\alpha(e)$. Les arcs e_1, e_2 doivent avoir une extrémité en commun, disons $v \in S$. La configuration est donc la suivante :



Mais, par définition de S , il doit exister au moins trois lignes de rétraction dans A_2 partant de v , une contradiction. Ainsi, $\{\alpha(e) \mid e \in A_1\}$ définit un simplexe dans \mathcal{A}_g^1 .

Remarquons qu'il est propre puisque chaque composante connexe du complémentaire des $\alpha(e)$ se rétracte sur un point de S . Posons

$$q(\mathcal{X}) := \sum_{e \in A_1} \theta(e) \cdot \alpha(e) \in \mathcal{A}_g^1.$$

Théorème 3.1. *L'application $q : \mathcal{T}_g^1 \rightarrow \mathcal{A}_g^1$ définit un homéomorphisme sur le sous-complexe de \mathcal{A}_g^1 engendré par les simplexes propres.*

Idée de preuve. Afin de montrer que q est injective et que son image coïncide avec le sous-complexe engendré par les simplexes propres, on fixe un simplexe propre $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ et des constantes $\theta_1, \dots, \theta_k > 0$ vérifiant $\theta_1 + \dots + \theta_k = 1$, puis on vérifie qu'il existe une et une seule métrique hyperbolique (à isotopie près) sur Σ telle que l'image par q du point de l'espace de Teichmüller associé donne le point $\theta_1\alpha_1 + \dots + \theta_k\alpha_k$ du complexe des arcs.

Pour cela, on considère la triangulation duale aux α_i et on cherche à munir ces triangles de métriques hyperboliques de manière à obtenir une métrique hyperbolique sur Σ tout entière. Ces métriques locales dépendent des angles qu'on impose à nos triangles, et la métrique globale est hyperbolique si l'angle total autour d'un sommet de la triangulation vaut 2π . Par un argument mi-analytique mi-géométrique, on montre qu'il y a une unique solution à ce problème.

La continuité est montrée par un argument de compacité en étendant q au compactifié mentionné dans l'introduction. □

Références

- [BE88] B. H. Bowditch and D. B. A. Epstein. Natural triangulations associated to a surface. *Topology*, 27(1) :91–117, 1988.