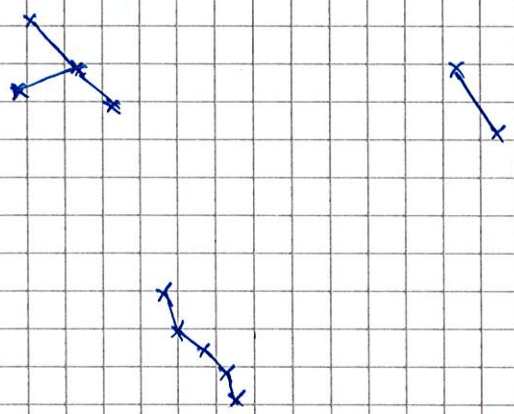
Complexes et homologie



Idée 1 : relier les points à distance $\leq t$ $\quad \forall t \in [0, +\infty[$

Idée 2 :

sommets (dim. 0)	points	
arêtes (dim. 1)	proximité entre 2 points	
triangles (dim. 2)	" " 3 "	
tétraèdres (dim. 3)	" " 4 "	
etc.		

Données brutes $\rightsquigarrow$ Données "topologiques" $\rightsquigarrow$ Données "simplifiées"

Données brutes	$\xrightarrow{\text{complexe}}$	Données "topologiques"	$\xrightarrow{\text{homologie}}$	Données "simplifiées"
X (échelle t)	complexe	K	homologie	$H_n(K)$, $\beta_n(K)$

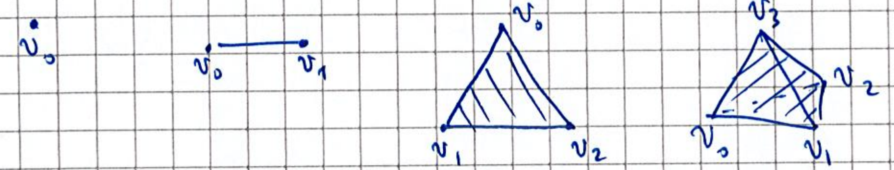
1) Complexes

n-simplexe σ = l'enveloppe convexe de $(n+1)$ points $v_0, v_1, \dots, v_n$ affinement indépendants dans $\mathbb{R}^d$.

sommet de σ = un des v_i

face de σ = un simplexe engendré par certains v_i

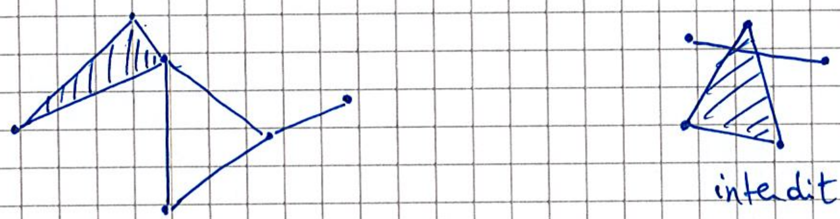
$n=0$ $\qquad$ $n=1$ $\qquad$ $n=2$ $\qquad$ $n=3$



etc.

Def: Un complexe simplicial géométrique est un ensemble fini K de simplexes de $\mathbb{R}^d$ tel que

- toute face d'un simplexe de K est dans K
- l'intersection de deux simplexes de K est soit $\emptyset$ soit une face de chacun des simplexes



interdit

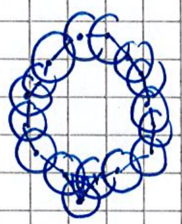
Def: Un complexe simplicial abstrait sur un ensemble fini V (de "sommets") est un ensemble fini K de sous-ensembles non vides de V ("simplexes") tel que

$$\sigma \in K, \emptyset \neq \tau \subset \sigma \Rightarrow \tau \in K.$$

$$\begin{tikzcd} \text{complexe simplicial géométrique} \arrow[r, bend left] & \text{complexe simplicial abstrait} \arrow[l, bend left, "\text{réalisation géométrique}"] \end{tikzcd}$$

- Complexe de Čech de $X \subset M$ (fini) (espace métrique ($\mathbb{R}^d$)) pour $t \geq 0$.

But : modéliser $X_t = \bigcup_{x \in X} B(x,t)$



<u>Def</u> : $\check{C}_t(X,M)$

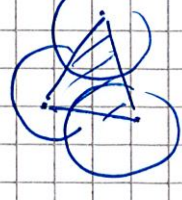
- sommets : X
- ~~arête~~ simplexe $\{x_0, \dots, x_n\}$ si $\bigcap_{i=0}^{n} B(x_i,t) \neq \emptyset$

<u>Théorème du nerf</u> : Si $M = \mathbb{R}^d$, on a une équivalence d'homotopie $\check{C}_t(X,\mathbb{R}^d) \simeq X_t$.
(on peut déformer continûment l'un en l'autre)

<u>Remarque</u> : Pour $t \leq t'$ on a $\check{C}_t(X,M) \subset \check{C}_{t'}(X,M)$.

- Complexe de Vietoris-Rips de X (espace métrique fini)

<u>Def</u> : $VR_t(X)$



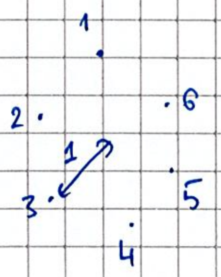
- sommets : X
- ~~arête~~ simplexe $\{x_0, \dots, x_n\}$ si $\forall i \neq j$, $d(x_i, x_j) \leq t$

<u>Remarque</u> : $VR_t(X)$ est uniquement déterminé par ses sommets et arêtes.
("complexes des cliques" d'un graphe)

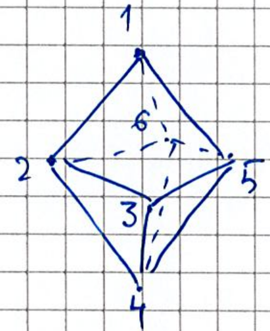
<u>Remarque</u> : Pour $t \leq t'$ on a $VR_t(X) \subset VR_{t'}(X)$.

<u>Remarque</u> : On a la comparaison $VR_t(X) \subset \check{C}_t(X,M) \subset VR_{2t}(X)$.
qui ne sont pas des équivalences d'homotopie en général.

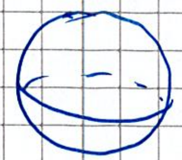
ex:



$\xrightarrow[t=1,9]{VR_t}$



$\simeq$



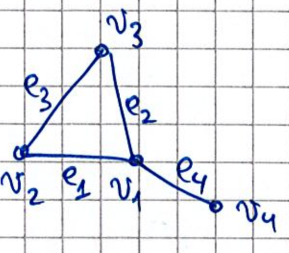
S^2

2) Homologie

Motivation : matrice d'incidence d'un graphe

G graphe fini, sommets $\{v_1, \dots, v_n\}$, arêtes $\{e_1, \dots, e_p\}$

$\to$ matrice $p \times n$ $I(G)$



$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

0) $\operatorname{codim} \operatorname{Im}(I(G))$ = nombre de composantes connexes de G $\quad \beta_0(G)$

1) $\dim \ker(I(G))$ = nombre de cycles indépendants de G $\quad \beta_1(G)$

On fixe un corps (ex : $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$ avec $1+1=0$)

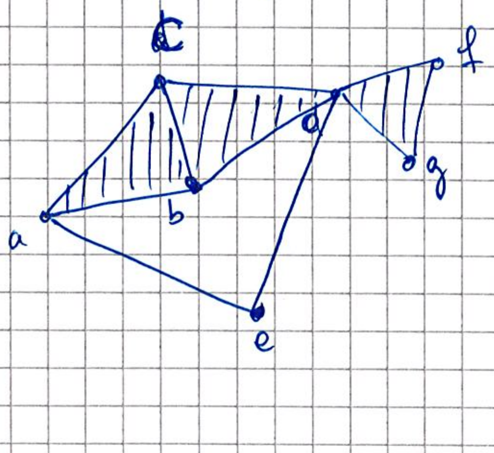
K un complexe simplicial

$n \geq 0$ un entier

Def : $C_n(K)$ = l'espace vectoriel de base les n-simplexes de K

$$C_n(K) \ni \sum_i a_i \sigma_i$$

$\uparrow$ (σ_i) n-simplexe de K



$C_2(K)$ a dim. 3

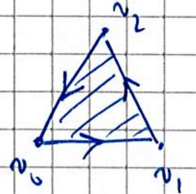
$C_2(K) \ni \{a, b, c\} + \{b, c, d\}$

Def : Application de bord $\partial_n : C_n(K) \longrightarrow C_{n-1}(K)$

$$\partial_n \{v_0, v_1, \dots, v_n\} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \{v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}$$

ex : $\partial_1 \{v_0, v_1\} = \{v_1\} - \{v_0\}$ (matrice d'incidence)

$\partial_2 \{v_0, v_1, v_2\} = \{v_1, v_2\} - \{v_0, v_2\} + \{v_0, v_1\}$



Prop : On a $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$. Dit autrement, $\mathrm{Im}(\partial_{n+1}) \subset \ker(\partial_n)$.

ex : $\partial_1 \circ \partial_2 \{v_0, v_1, v_2\} = \partial_1 \left(\{v_1, v_2\} - \{v_0, v_2\} + \{v_0, v_1\} \right)$

$= \{v_2\} - \{v_1\} - \{v_2\} + \{v_0\} + \{v_1\} - \{v_0\}$.

Def : Le n-ème groupe d'homologie de K : $H_n(K) := \ker(\partial_n) / \mathrm{Im}(\partial_{n+1})$.

Le n-ème nombre de Betti de K : $\beta_n(K) = \dim H_n(K)$

$= \dim(\ker \partial_n) - \dim(\mathrm{Im}\, \partial_{n+1})$.

$\ker(\partial_n) \ni$ cycle de dimension n

$\mathrm{Im}(\partial_{n+1}) \ni$ bord de dimension n

$\beta_n(K) =$ " le nombre de cycles de dimension n dans K à déformation près ".

ex : $H_0(K) = C_0(K) / \mathrm{Im}(\partial_1) \rightsquigarrow \beta_0(K) =$ nombre de composantes connexes de K

$\partial_1 \{v_0, v_1\} = \{v_1\} - \{v_0\}$

$H_1(K) = \ker \partial_1 / \mathrm{Im}\, \partial_2$

$c = ac + cd + de - ae$, $c' = ab + bd + de - ae$ $\quad c, c' \in \ker \partial_1$

$c - c' = ac + cd - ab - bd = \partial_2(abc - bcd) \in \mathrm{Im}\, \partial_2$

Ici $\beta_0(K) = 1$, $\beta_1(K) = 1$.

$\Rightarrow$ $c = c'$ dans $H_1(K)$

$\beta_2(K)$?

<u>Remarque</u> : $K \simeq K' \Rightarrow H_n(K) \simeq H_n(K') \Rightarrow \beta_n(K) = \beta_n(K')$

<u>Remarque</u> : matrices creuses.