Aller-retour entre arbres et barcodes

Image:
Nicolas Antille
Blue Brain Project

Adélie Garin

EPFL - Laboratoire pour la Topologie et la Neuroscience

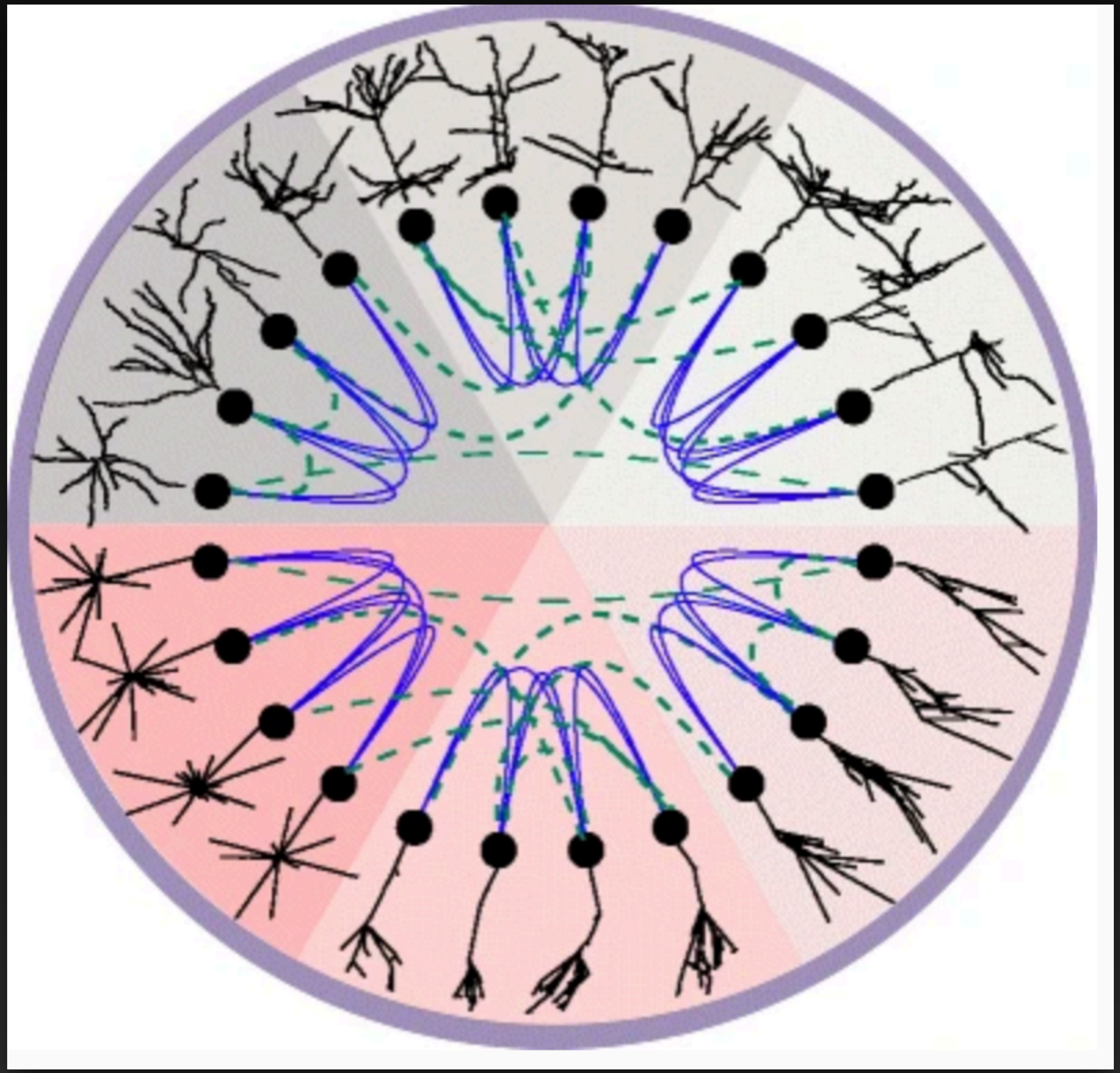
Projet avec Lida Kanari, Kathryn Hess
Justin Curry, Jordan DeSha, Brendan Mallery

La TDA en neuroscience

Sommets = Neurones, Arrêtes = Synapses

- Etude du réseau neuronal comme complexe simplicial dirigé
- Etude bio-médicale: Nuage de points e.g. données des patients
- Imagerie du cerveau: Images e.g. IRM/scan
- Interactions des neurones: Systèmes dynamiques
- Etude de la structure neuronale: Arbres

Motivation: Morphologie des neurones

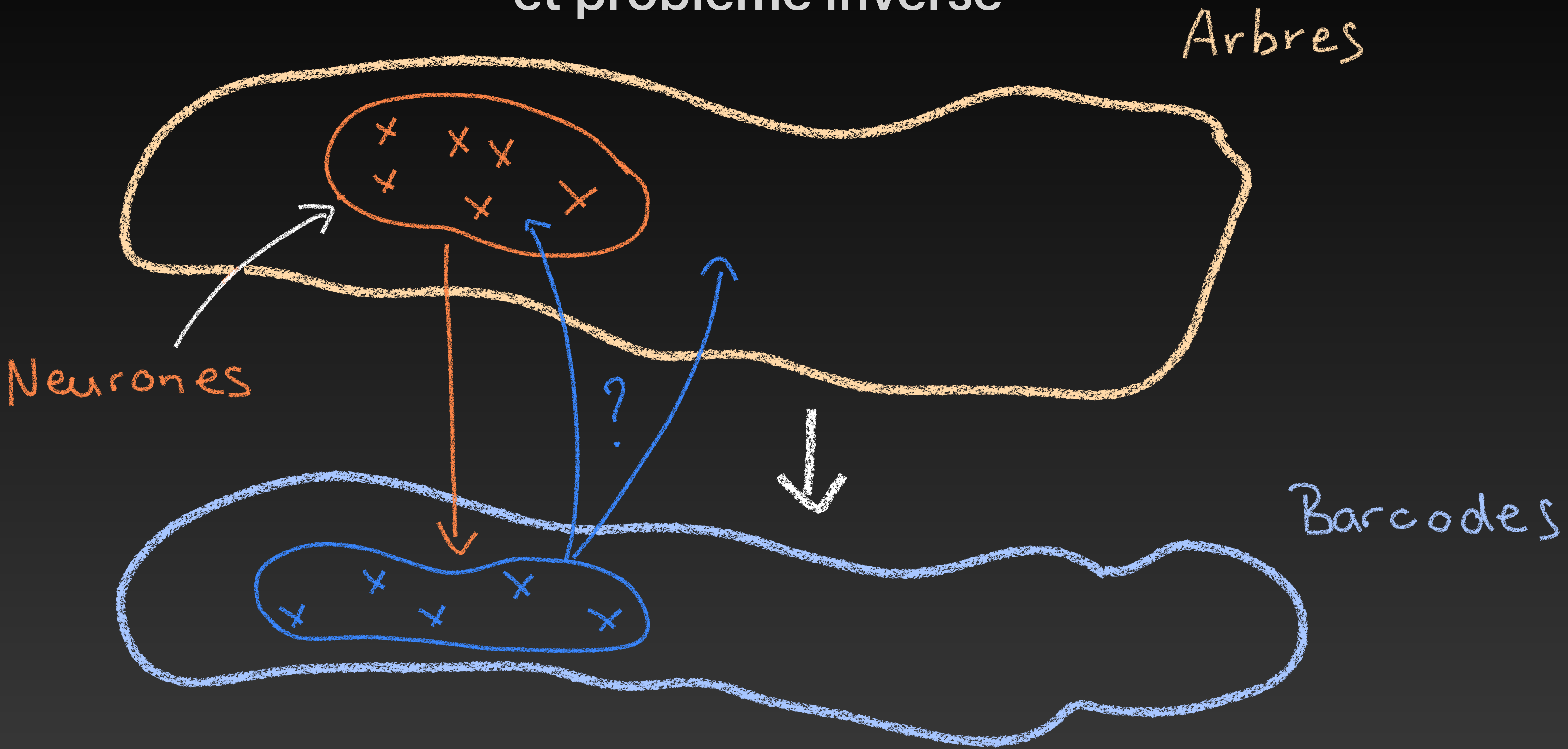


[A topological representation of branching neuronal morphologies]

- Classification
- Comprendre la différence entre les neurones et les arbres "aléatoires"
- Générer des neurones artificiels

Motivation: Distributions de neurones

et problème inverse



Plan

Arbres & Barcodes

- Définitions d’arbre
- Barcodes

Des Arbres aux Barcodes

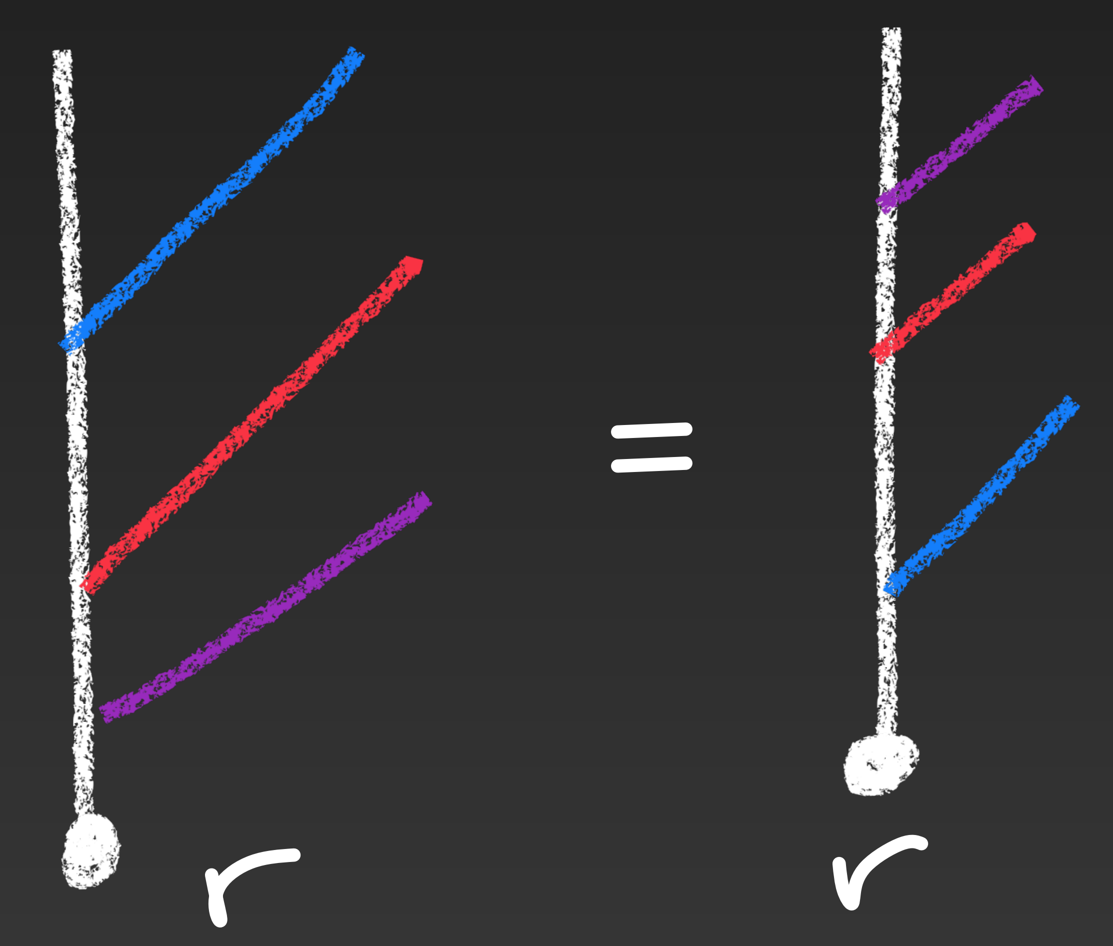
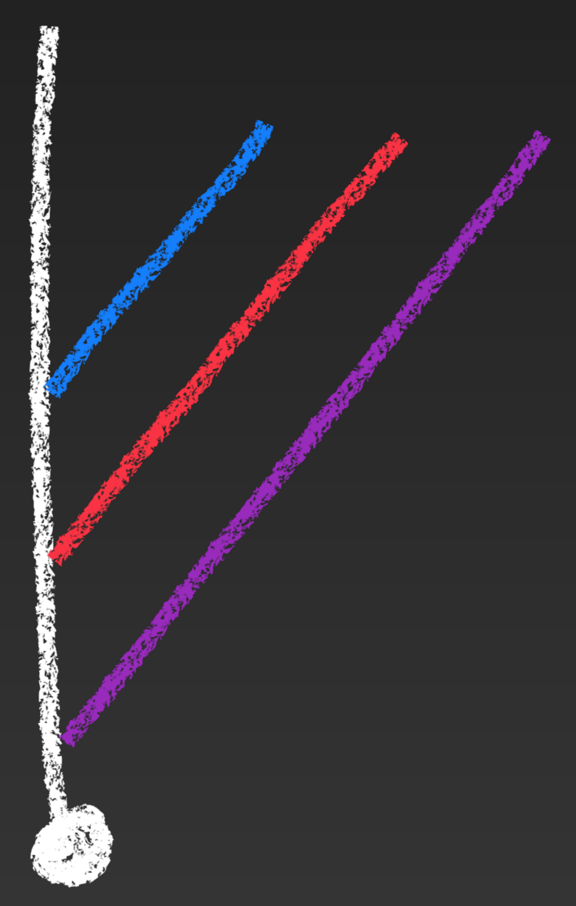
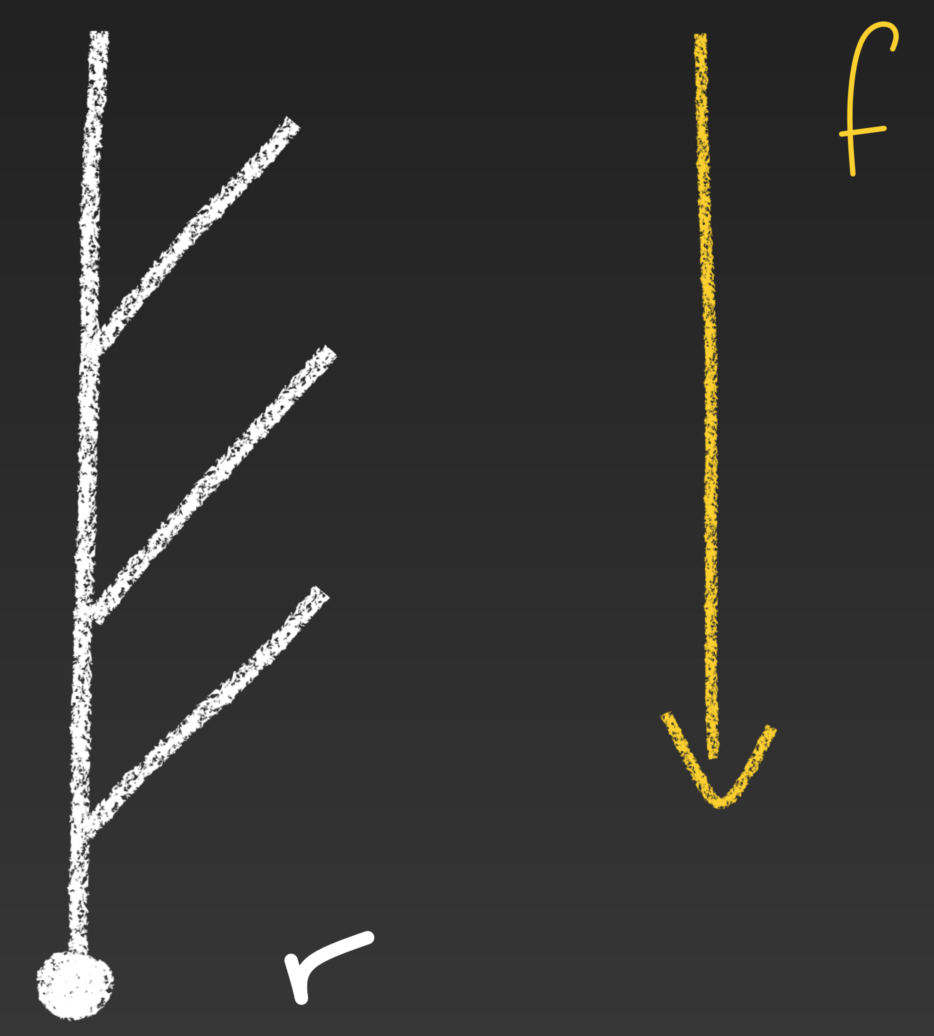
- Topological Morphology Descriptor (TMD)
- Groupe symétrique en action

Des Barcodes aux Arbres

- Problème inverse & Nombre de réalisations
- Topological Neuronal Synthesis (TNS)
- Stabilité et statistiques du TNS

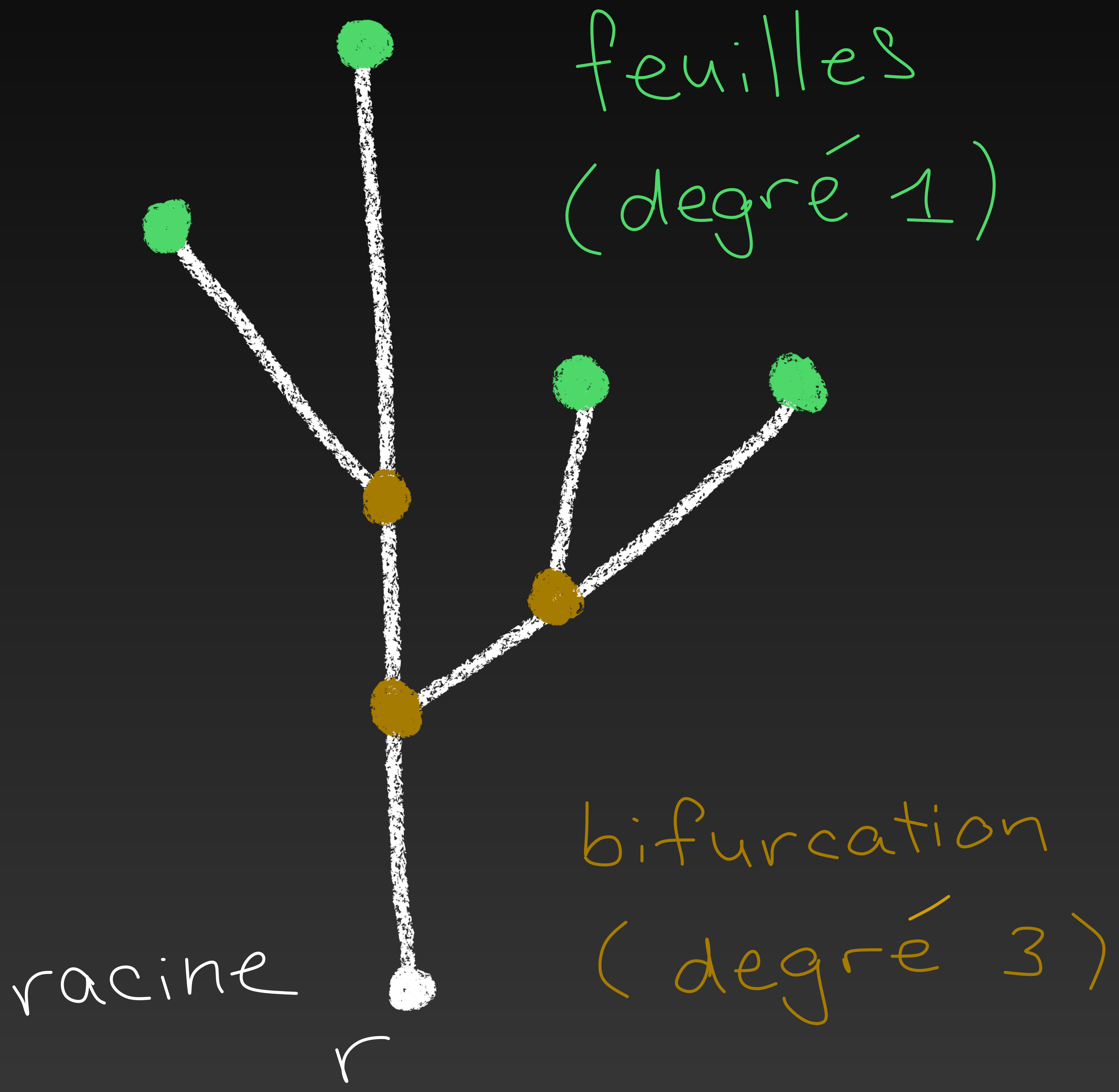
Arbres et Barcodes

Arbres

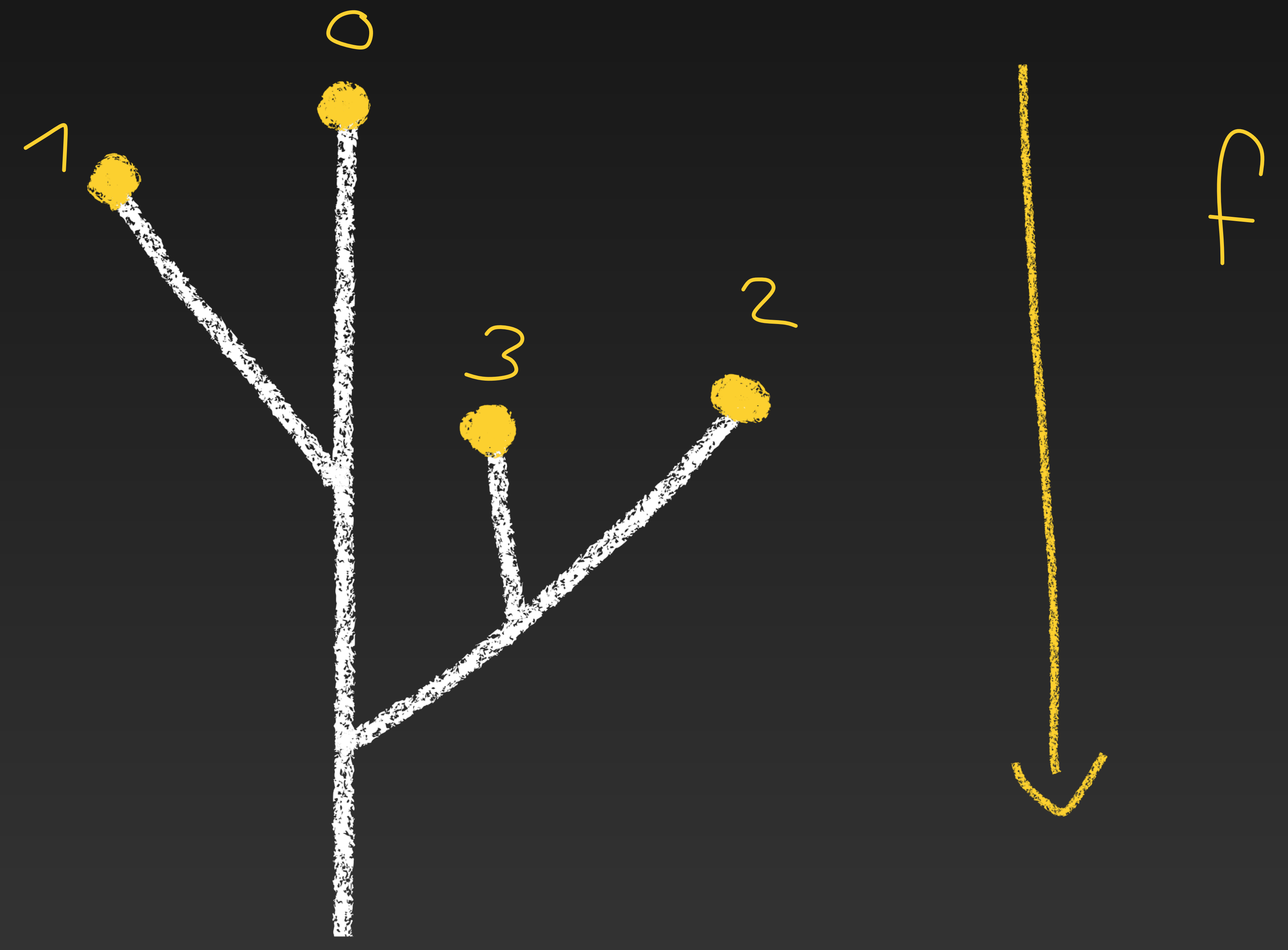
Arbre combinatoire	Arbre phylogénétique	Arbre de fusion (*merge tree*)
Graphe fini, acyclique, binaire, possédant un sommet distinct appelé *racine*.	Arbre combinatoire avec une fonction de label sur les feuilles $L : \{feuilles\} \longrightarrow \mathbb{N}$	$\mathscr{T}$ Arbre combinatoire avec une fonction de hauteur (*height function*) sur les sommets. $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$
	 label = couleur	

Arbres et Barcodes

Arbres



Remarque: Les *merge trees* héritent une fonction de label sur les feuilles de la fonction de hauteur.



Arbres et Barcodes

Barcodes

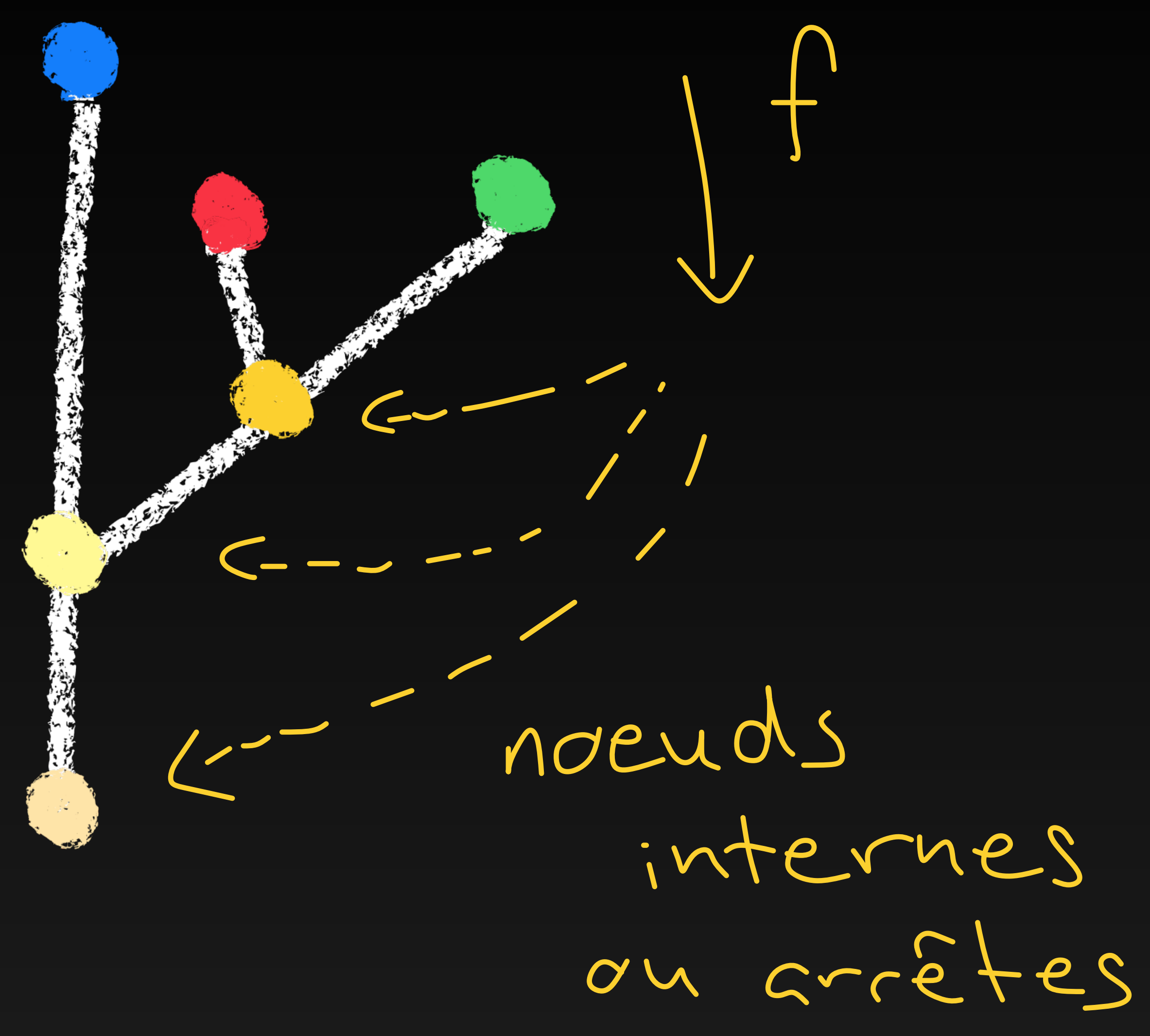
Un barcode est un multiset $\{(b_i, d_i)\}_{i=0,\ldots,n}$

L'espace des barcodes est noté $\mathscr{B}$.

Un barcode est strict si $b_0 < b_i, d_0 > d_i$ pour tout i et $b_i \neq b_j, d_i \neq d_j$ if $i \neq j$.

SPDG, on peut ordonner les barres par ordre de naissance.

Arbres et Barcodes

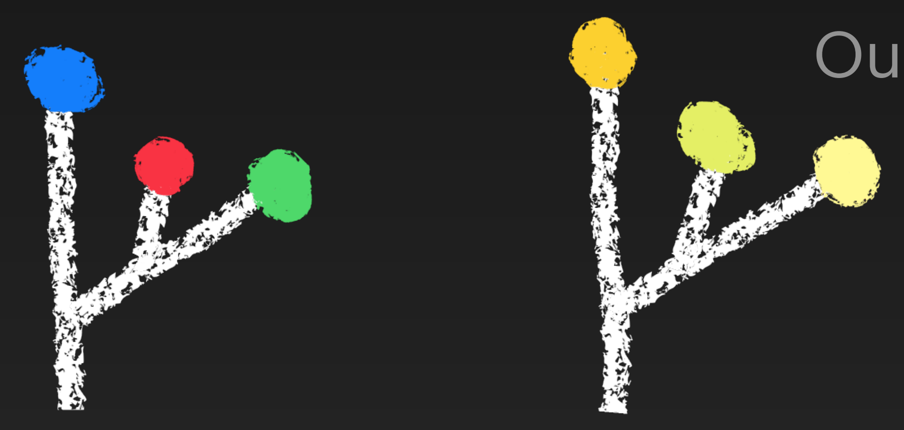


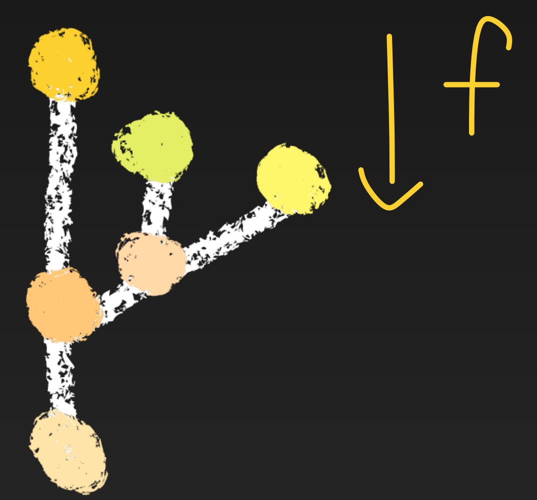
Arbres phylogénétiques métriques

Oubli du label

Merge trees

Oubli des valeurs de bifurcation

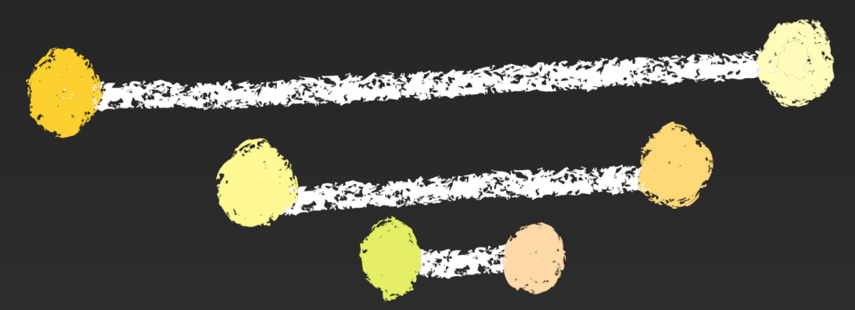




Oubli de l'adjacence

Arbres phylogénétiques

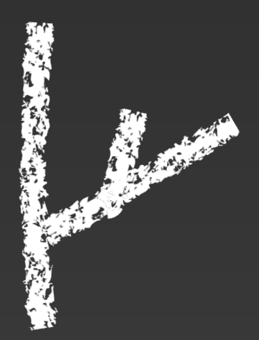
Barcodes



Oubli des valeurs de terminaison (label)

Nombre de réalisations

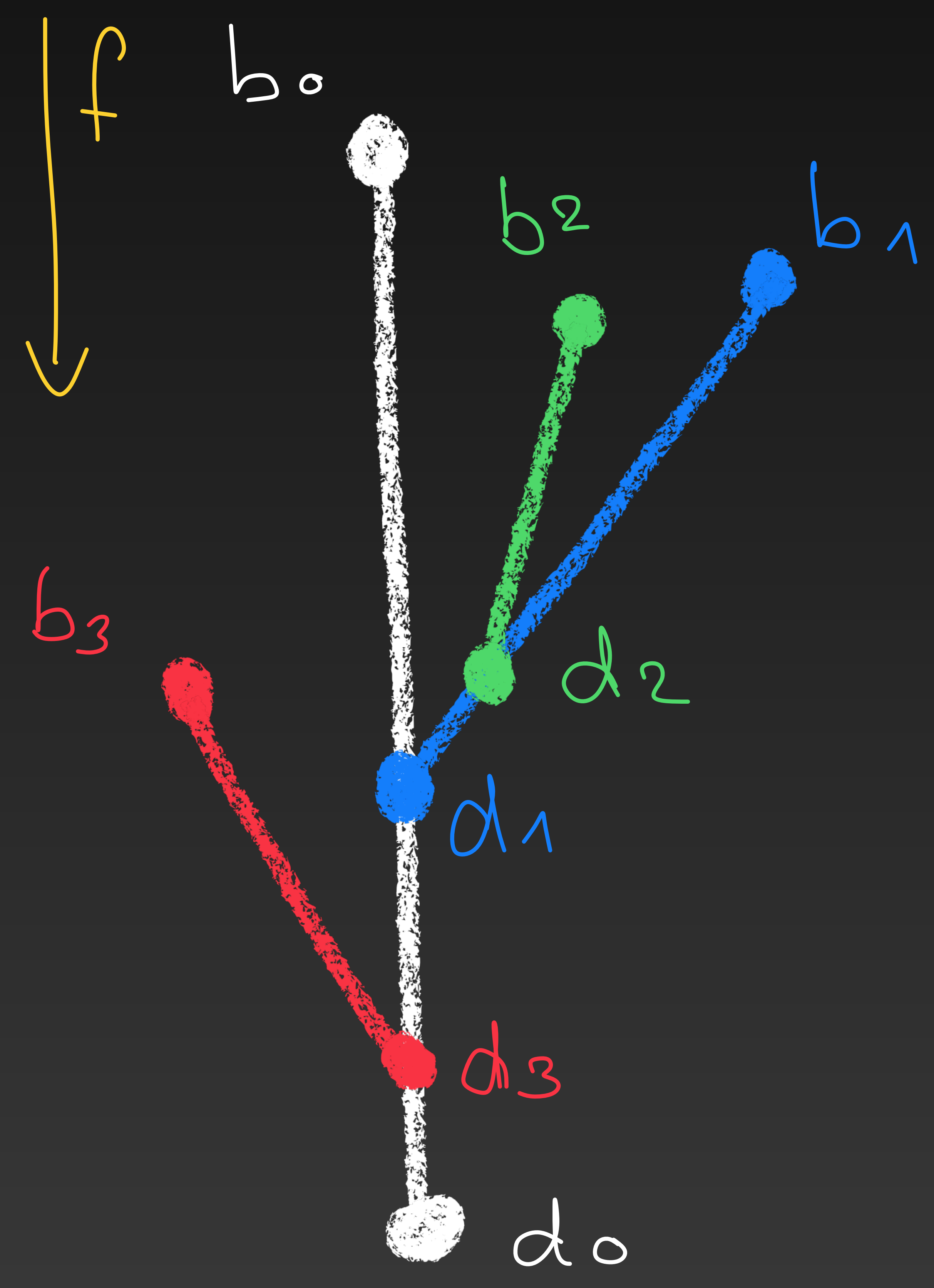
Arbres combinatoires



Des Arbres aux Barcodes

Topological Morphology Descriptor

[A topological representation of branching neuronal morphologies]



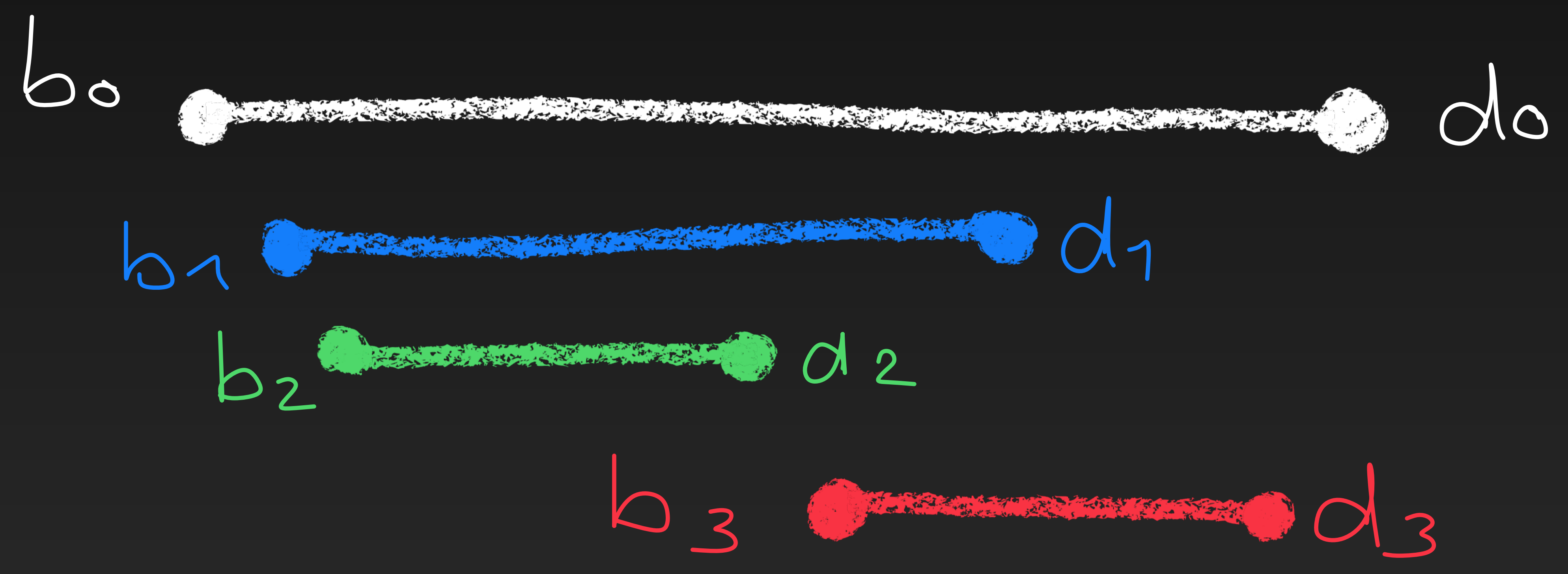
TMD: $\mathscr{T} \longrightarrow \mathscr{B}^{strict}$

$\longmapsto$

Elder rule

La règle de l'Ancien

"Le plus ancien l'emporte"



Des Arbres aux Barcodes

Relation d'équivalence sur les arbres

$$T \sim T' \Leftrightarrow TMD(T) = TMD(T')$$

Classes d'équivalence d'arbres qui ont le même barcode.

Remarque: Le TMD n'est pas injectif.

Question: Peut-on trouver une fonction $t : \mathscr{B}^{strict} \longrightarrow \mathscr{P}(\mathscr{T})$ telle que

$T, T' \in t(B) \implies T \sim T'$ for $B \in \mathscr{B}^{strict}$?

Combien d'arbres y-a-t'il pour un barcode donné ?

Des Arbres aux Barcodes

Le groupe symétrique en action

Soient $B, B' \in \mathscr{B}^{strict}$, on définit $B \sim B'$ si $d_i > d_j \Leftrightarrow d'_i > d'_j$ pour tout i, j

i.e. si leurs morts apparaissent dans le même ordre.

Bijection $\mathscr{B}^{strict} / \sim \; \leftrightarrow S_n$ entre l'espace des barcodes stricts quotienté

par la relation d'équivalence et le groupe symétrique.

$$B = \{(b_i, d_i)\}_{i=0,\ldots,n} \mapsto [\sigma_B : i \mapsto \#\{j \,|\, d_j \leq d_i\}]$$

Caractérisation d'un barcode par la permutation donnée
par la i-ème naissance envoyée sur la j-ème mort.

Des Arbres aux Barcodes

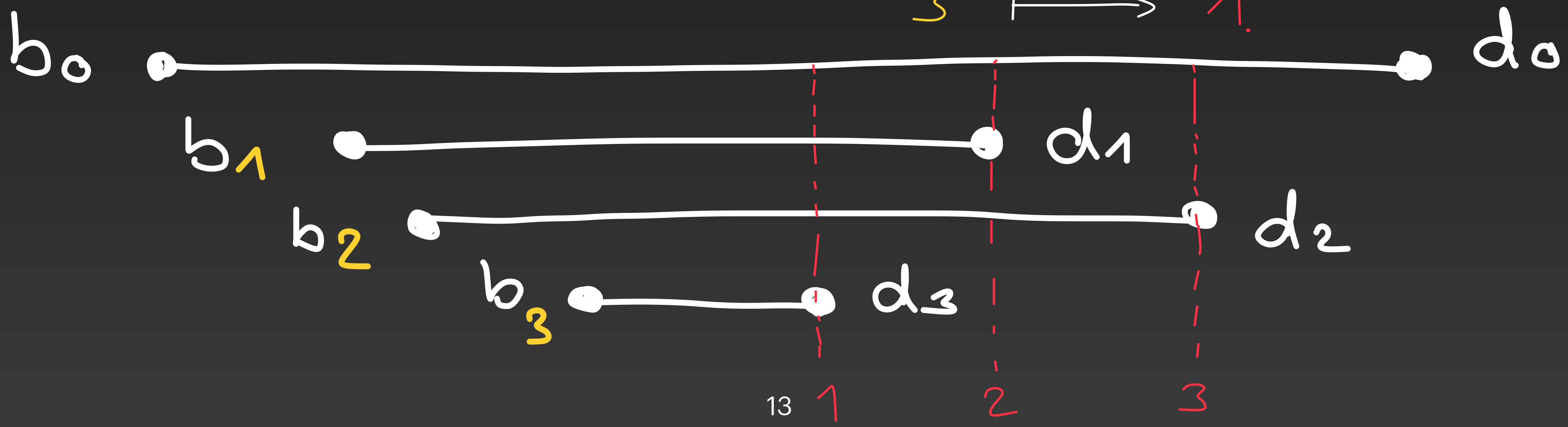
Le groupe symétrique en action: Exemple

Bijection $\mathscr{B}^{strict}/\sim\ \leftrightarrow S_n$ entre l'espace des barcodes stricts quotienté par la relation d'équivalence et le groupe symétrique.

$$B = \{(b_i, d_i)\}_{i=0,\ldots,n} \mapsto [\sigma_B : i \mapsto \#\{j \,|\, d_j \leq d_i\}]$$

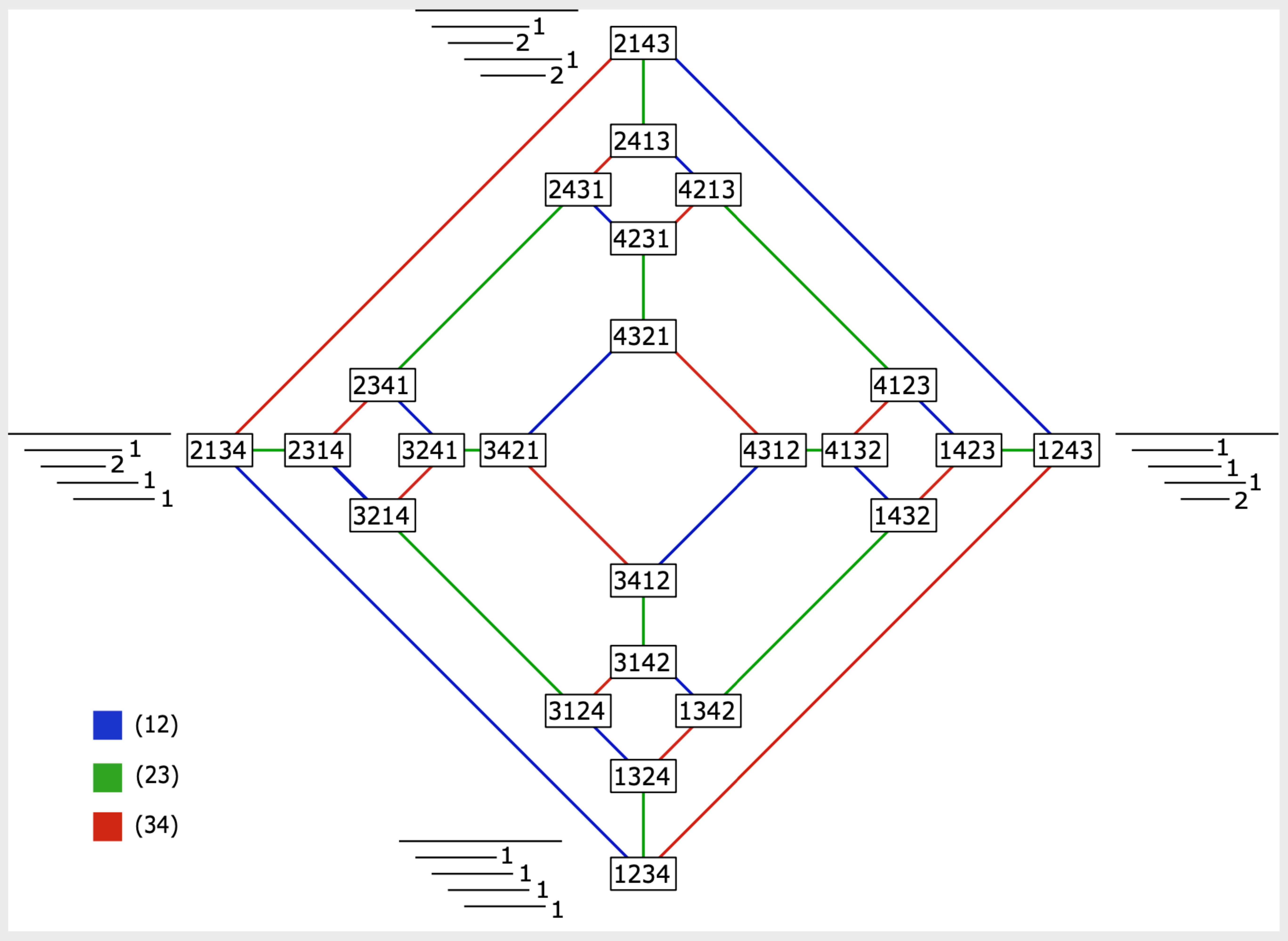
Exemple:

$$\begin{array}{l} 1 \longmapsto 2 \\ 2 \longmapsto 3 \\ 3 \longmapsto 1 \end{array} \rightsquigarrow (2\ 3\ 1)$$



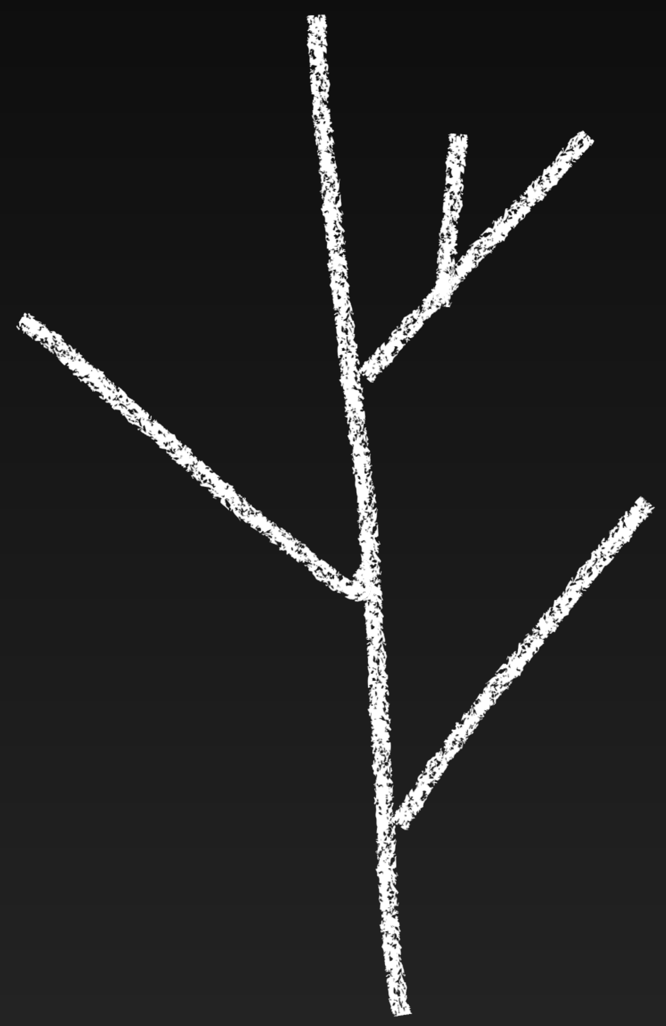
Des Arbres aux Barcodes

Décomposition de l'espace des barcodes par permutation

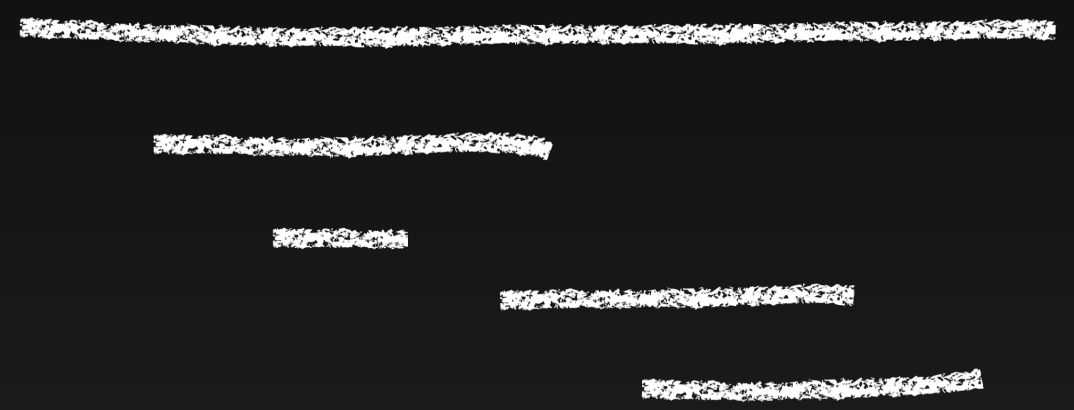


Des Barcodes aux Arbres

Problème inverse



Arbres ⟶ Barcodes

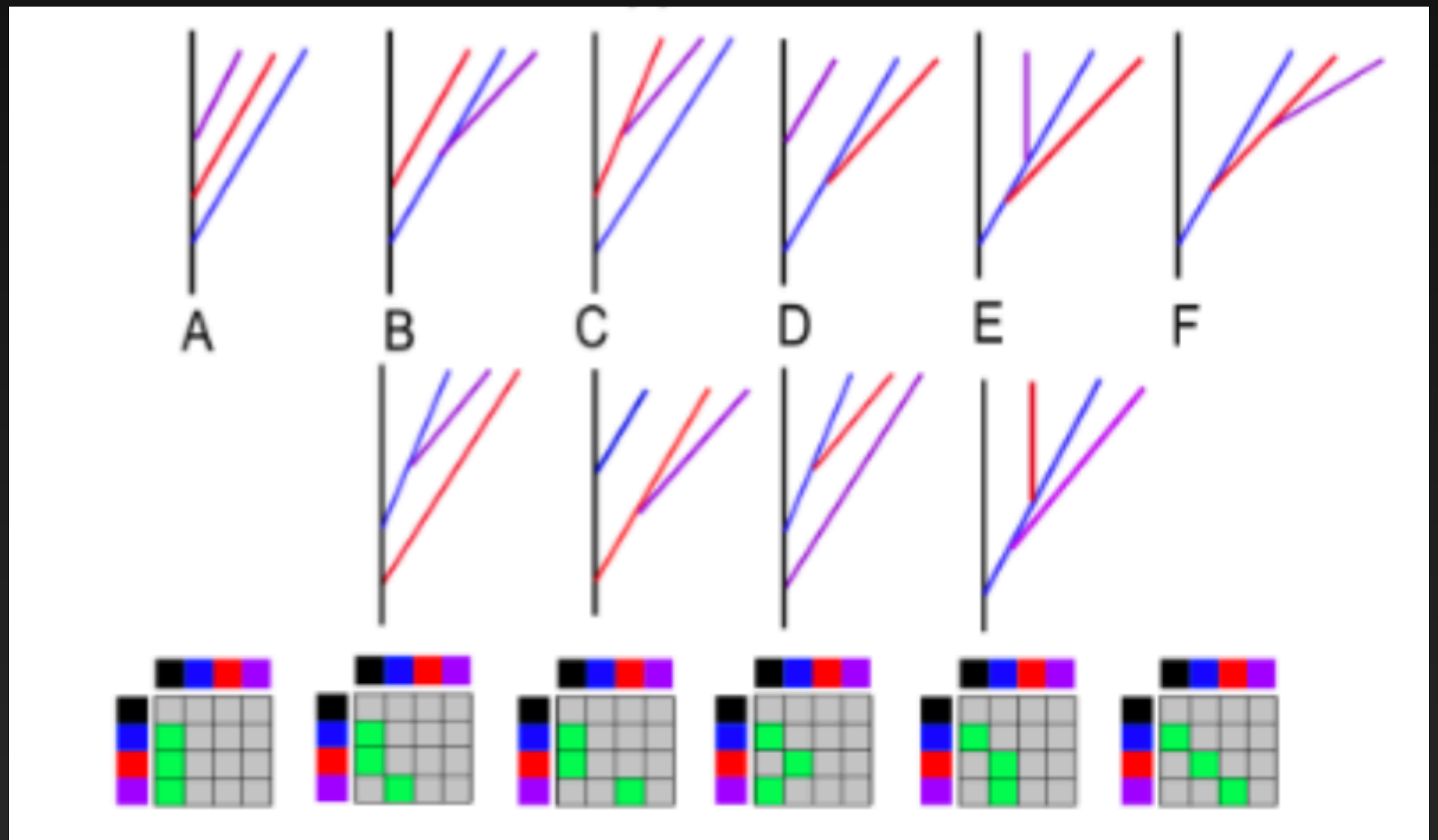


- Combien? Injectivité
- Comment? TNS → pertinence biologique
- Comportement avec du bruit

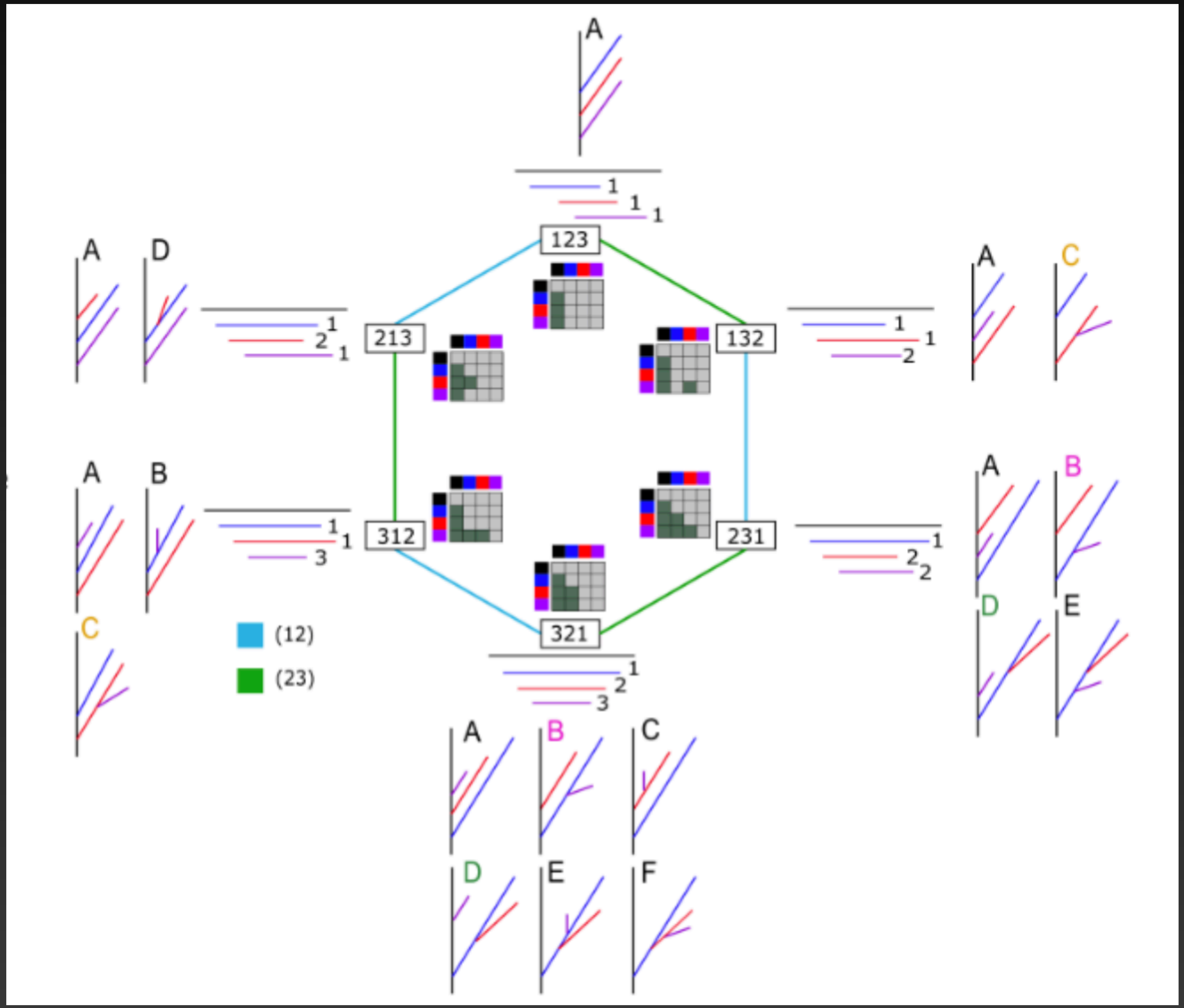
Des Barcodes aux Arbres

Problème inverse

Question: Combien de types d'arbres combinatoires réalisent un barcode?



Type combinatoire d'arbres



Graphe de Cayley de S_3 représentant tous les barcodes
à 4 barres et leur arbres combinatoires correspondants.

Des Barcodes aux Arbres

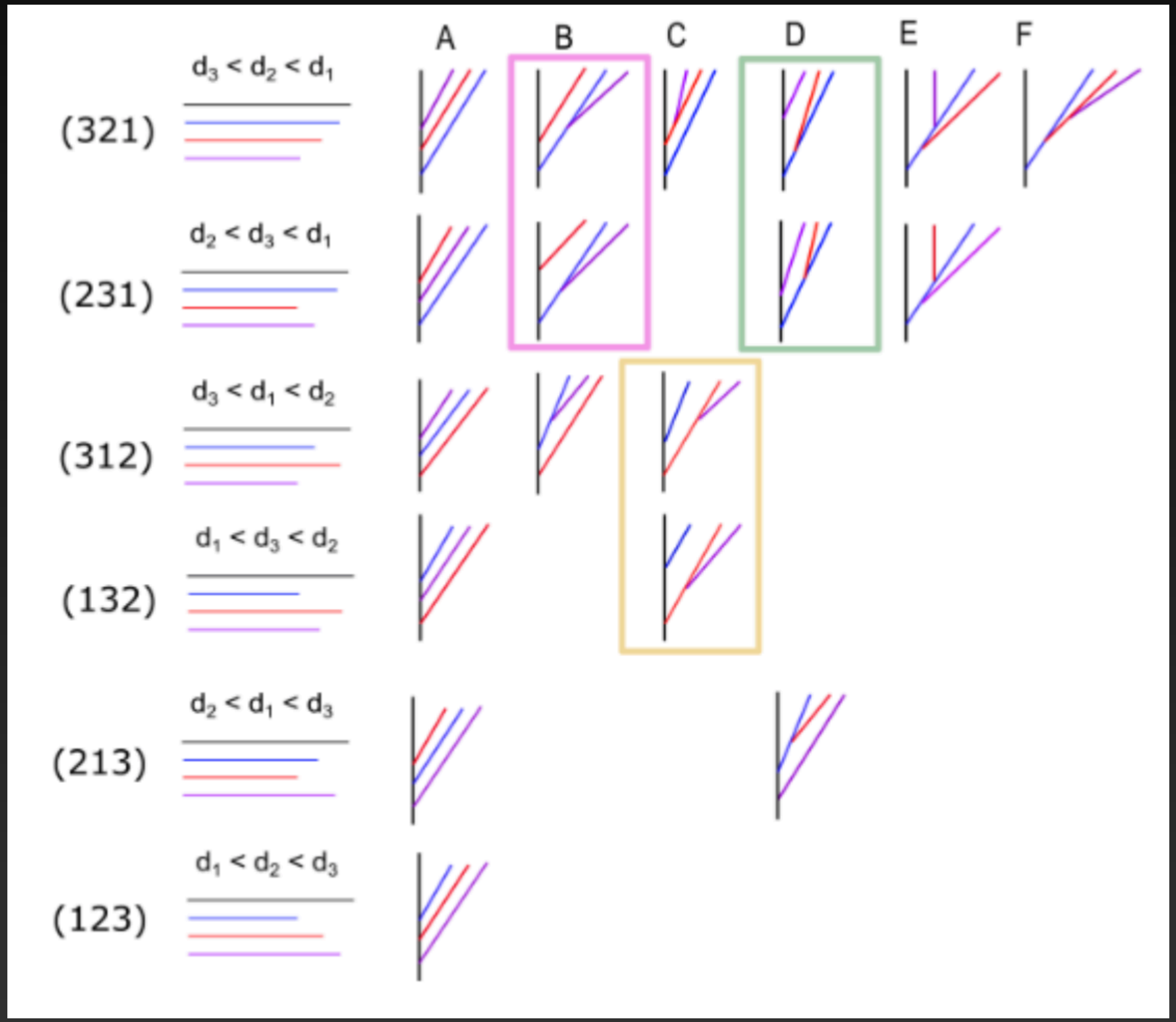
Nombre de réalisations

Combien d’arbres?

Le nombre de réalisations d’un barcode B est

$$TRN(B) = \prod_{bar \in B} \text{index}(bar),$$

où l’indice d’une barre est le nombre d’autres barres qui la contiennent.

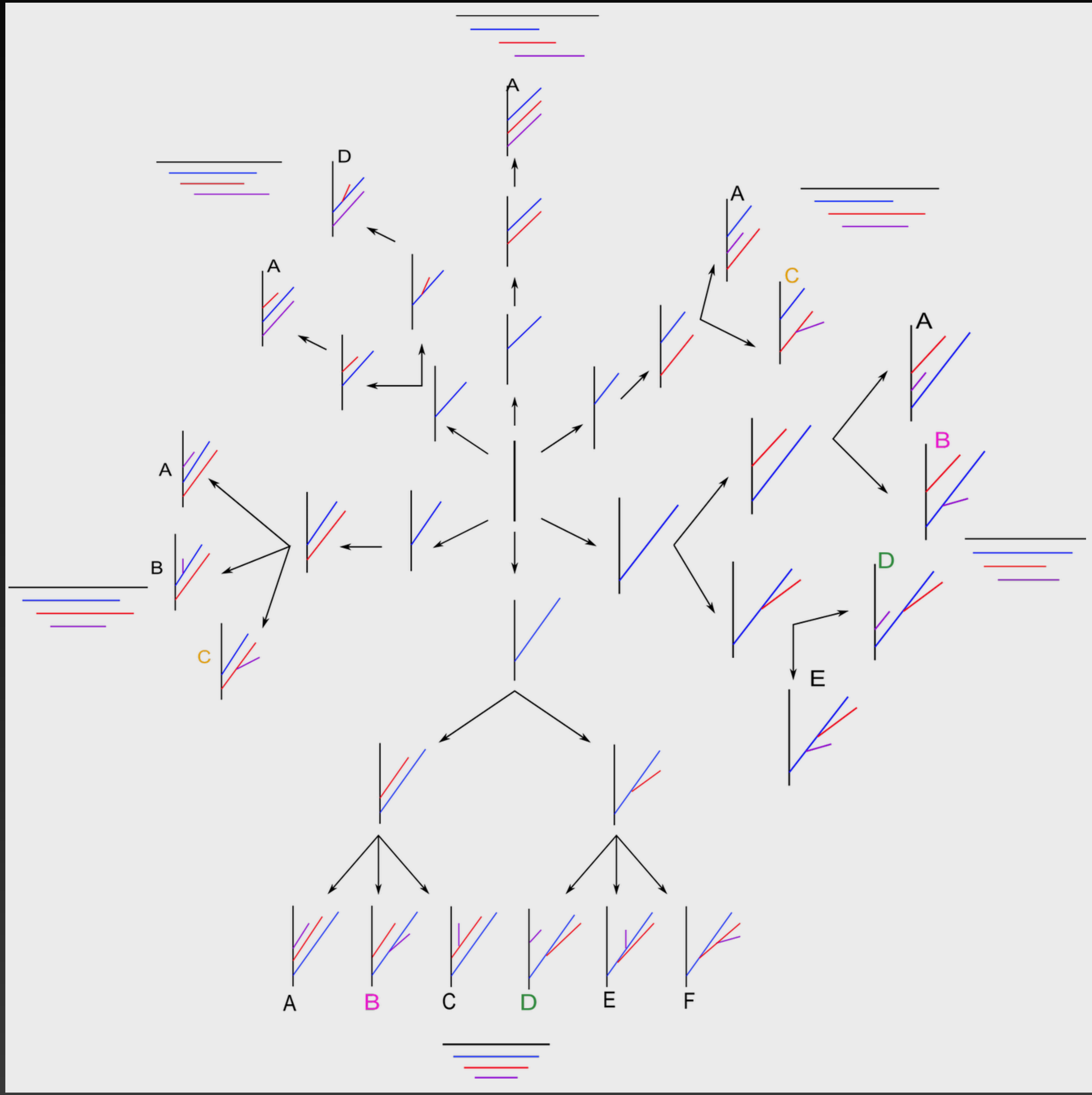


Types d’arbres combinatoires des barcodes avec 4 barres.

Des Barcodes aux Arbres

Construction inductive de tous les arbres à 3 branches

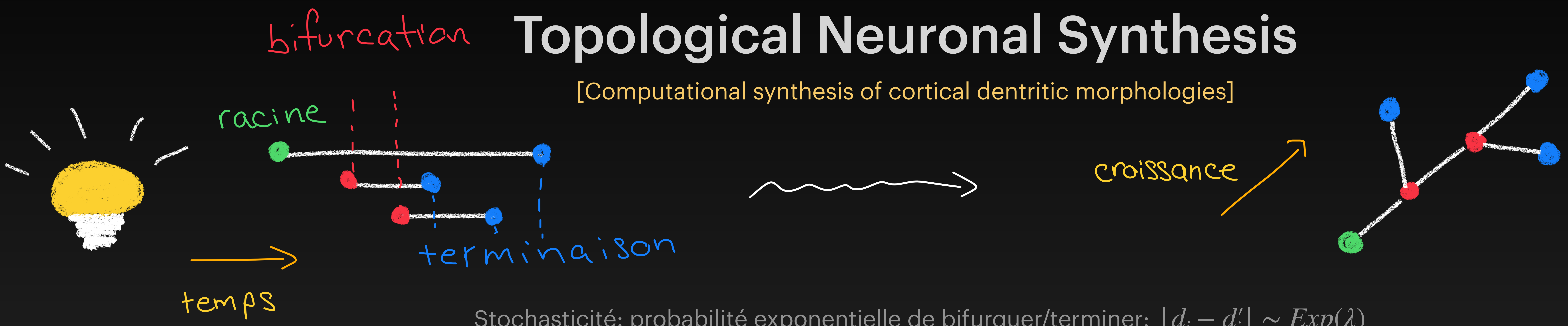
"flocon de neige"



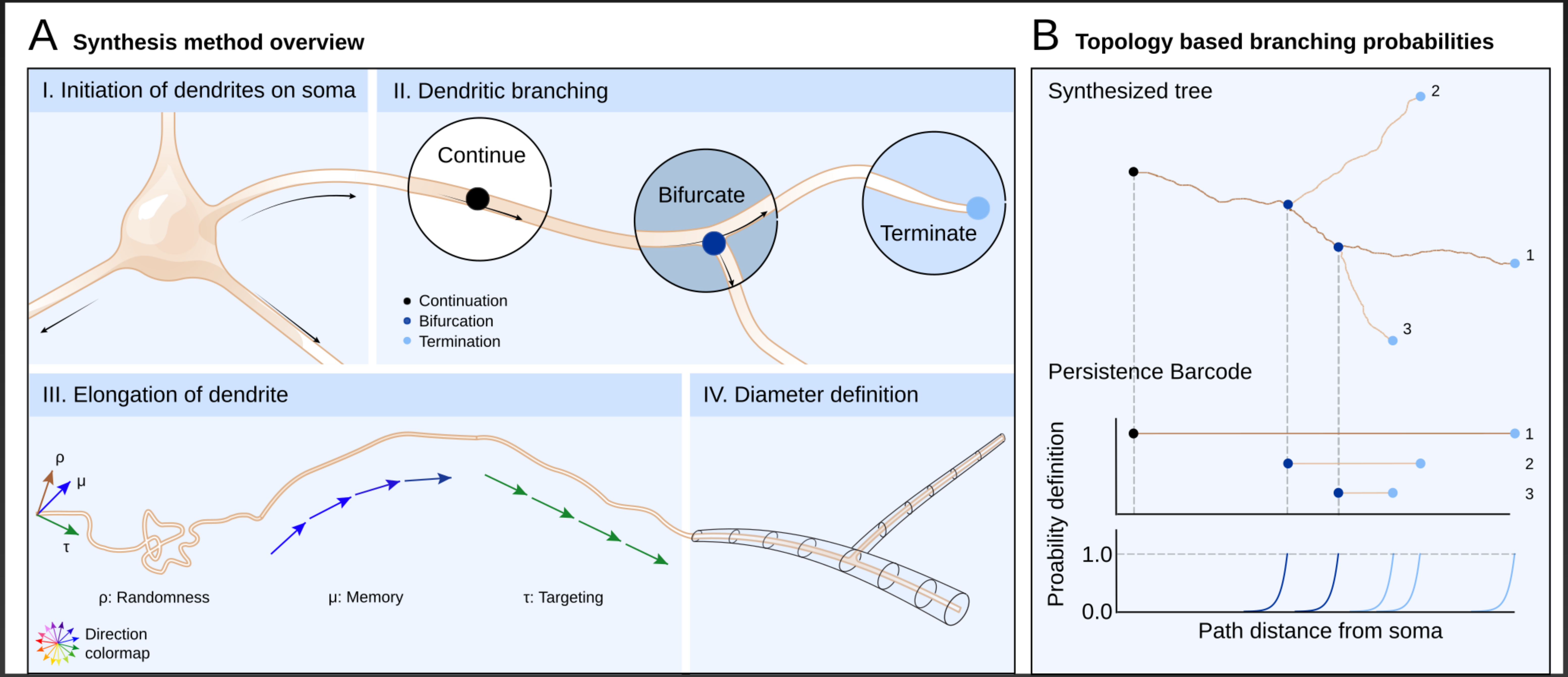
Des Barcodes aux Arbres

Topological Neuronal Synthesis

[Computational synthesis of cortical dentritic morphologies]



Stochasticité: probabilité exponentielle de bifurquer/terminer: $|d_i - d_i'| \sim Exp(\lambda)$

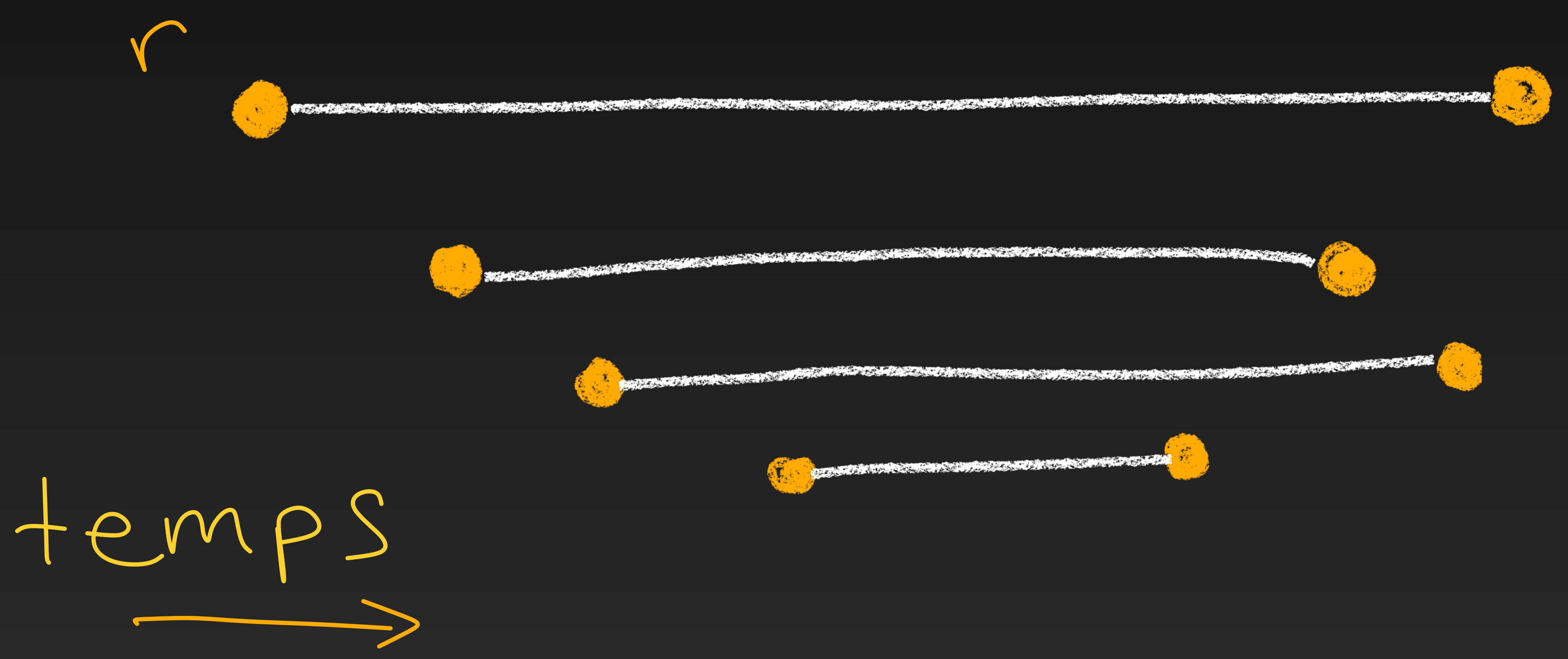


Des Barcodes aux Arbres

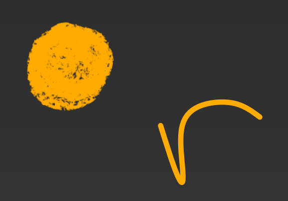
Topological Neuronal Synthesis

[Computational synthesis of cortical dendritic morphologies]

Exemple:

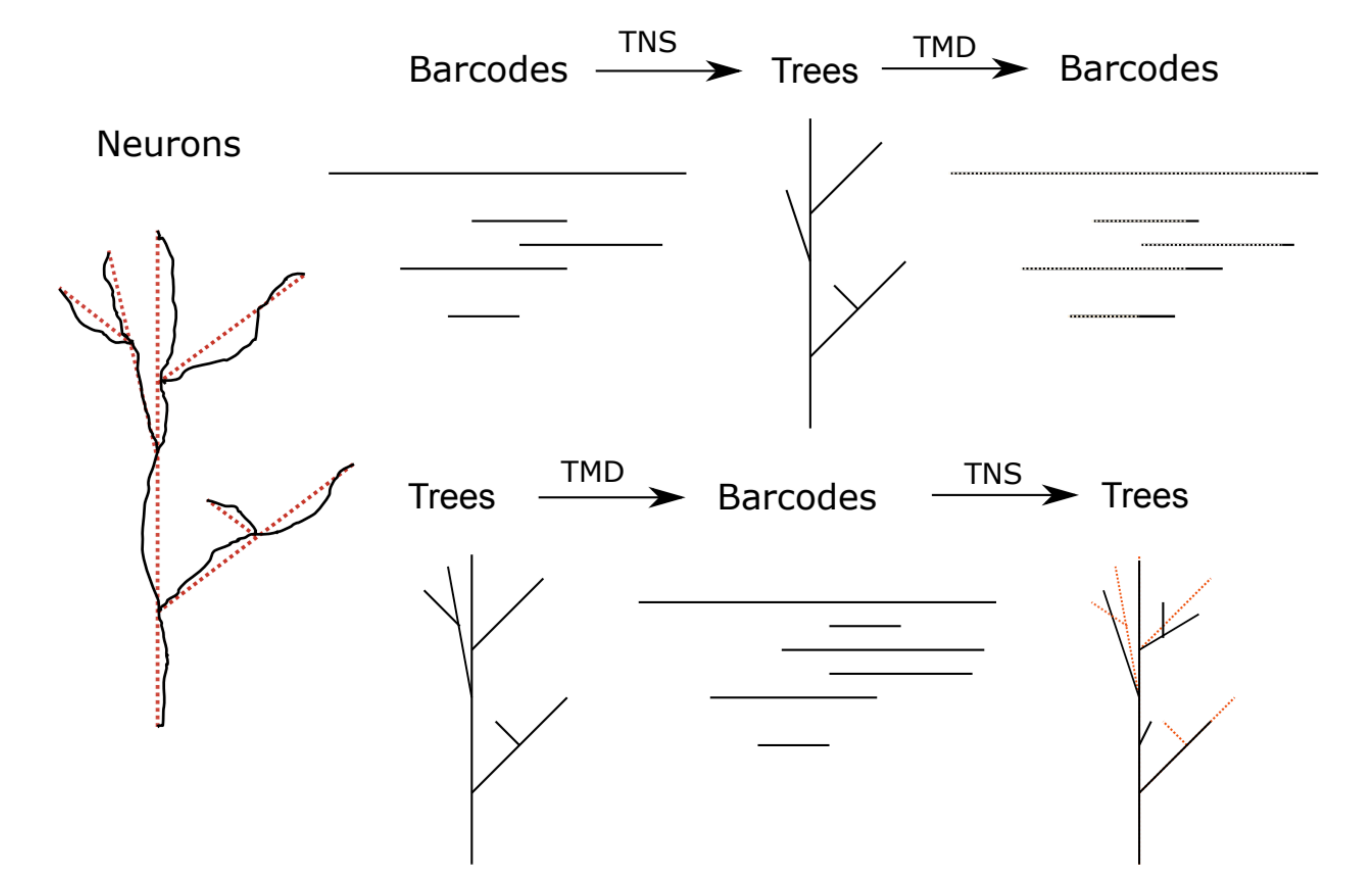


1) Croissance d’une branche
2) Bifurcation/terminaison avec probabilité exponentielle en approchant d’une cible.



Des Barcodes aux Arbres

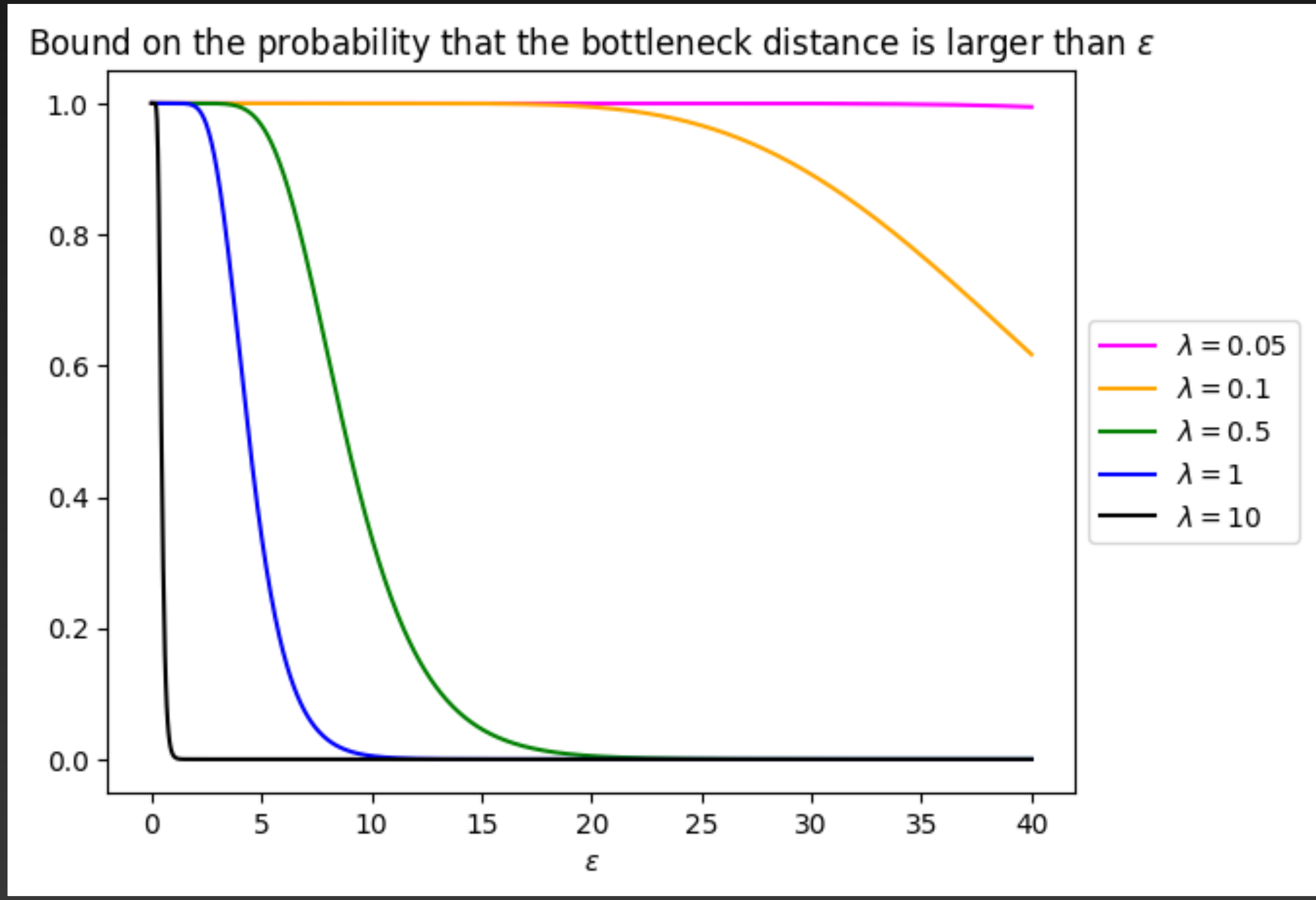
TNS - une inverse stochastique



Des Barcodes aux Arbres
Stabilité du TNS

La distance Bottleneck entre deux barcodes B et B′ est $d(B,B') = \inf_{\gamma \in \mathfrak{S}_n} \sup_i |b_i - b'_{\gamma(i)}| + |d_i - d'_{\gamma(i)}|$.

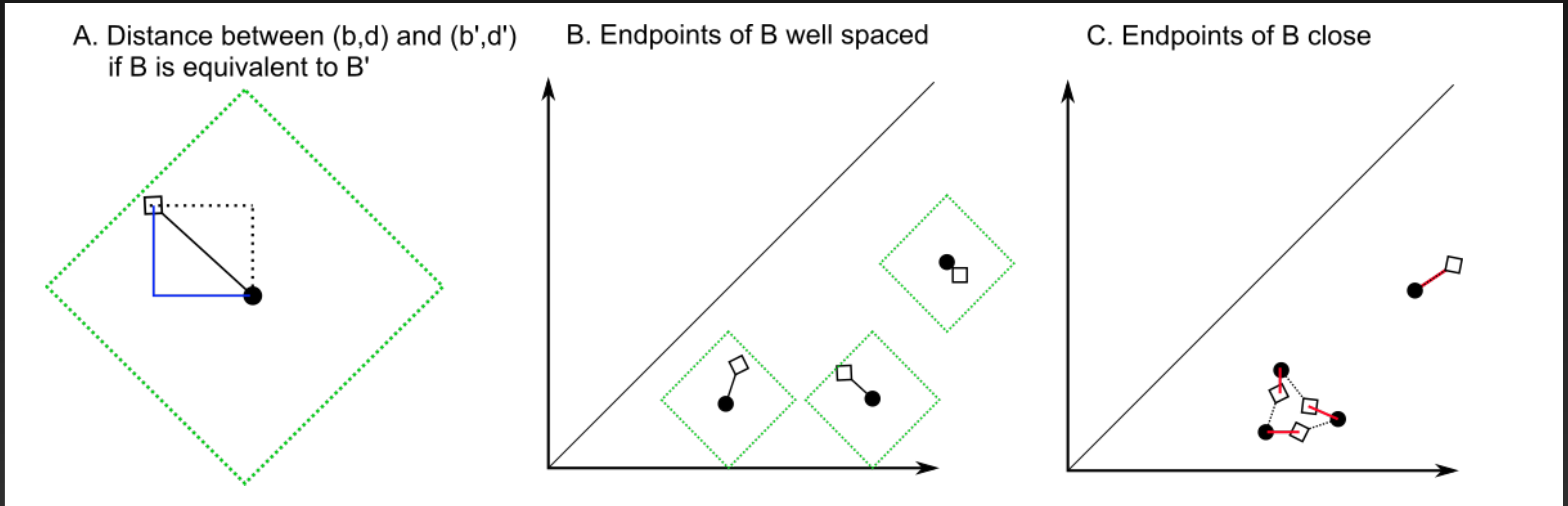
Lemme: Si $B \sim B'$, alors $\mathbb{P}\big(d(B,B') > \varepsilon\big) \leq 1 - (1 - \exp(-\lambda\varepsilon)(\lambda\varepsilon + 1))^n$.



Des Barcodes aux Arbres

Stabilité du TNS

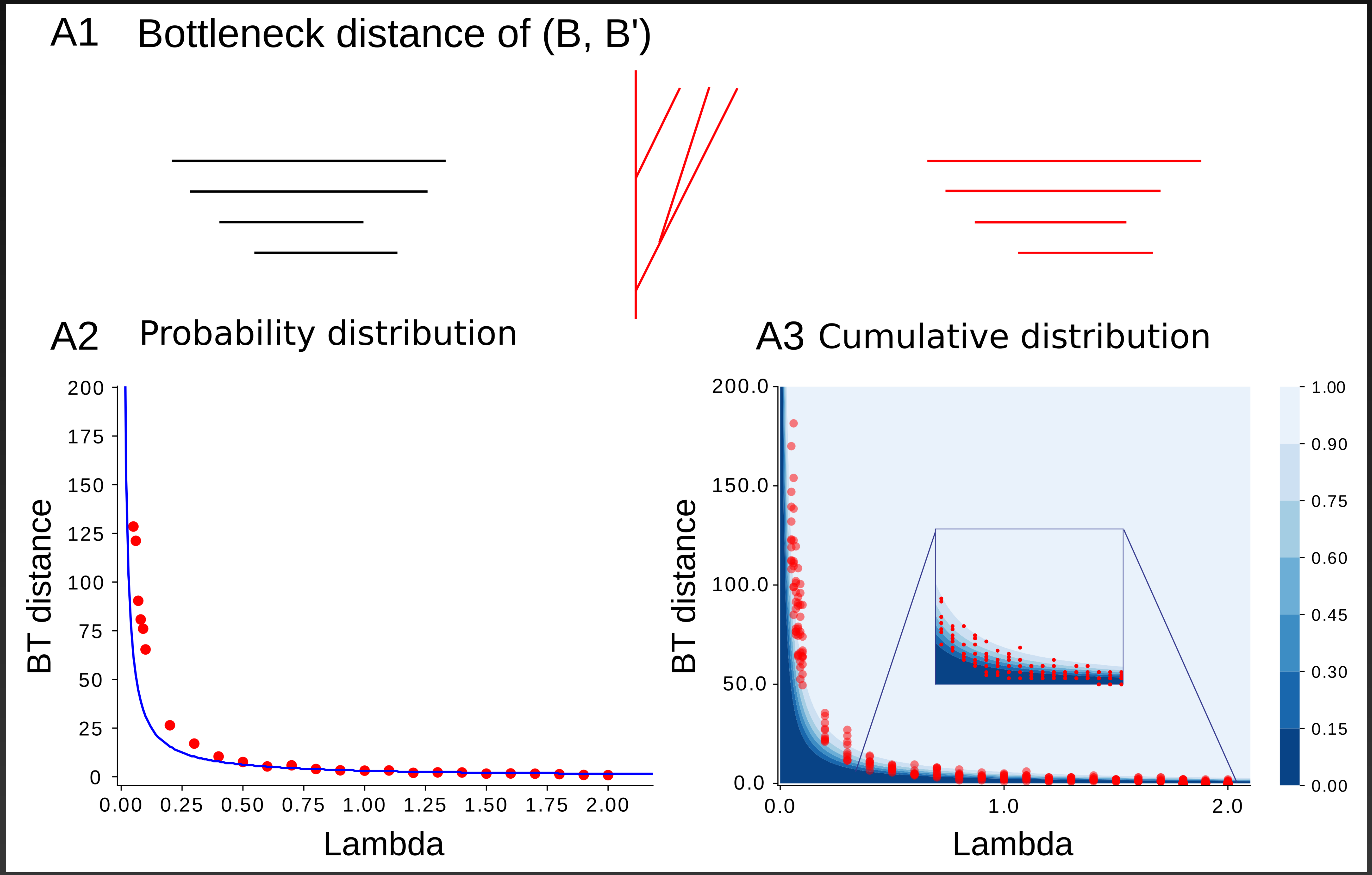
Lemme: Si $B \sim B'$, alors $\mathbb{P}\big(d(B,B') > \varepsilon\big) \leq 1 - (1 - \exp(-\lambda\varepsilon)(\lambda\varepsilon + 1))^n$.



Des Barcodes aux Arbres

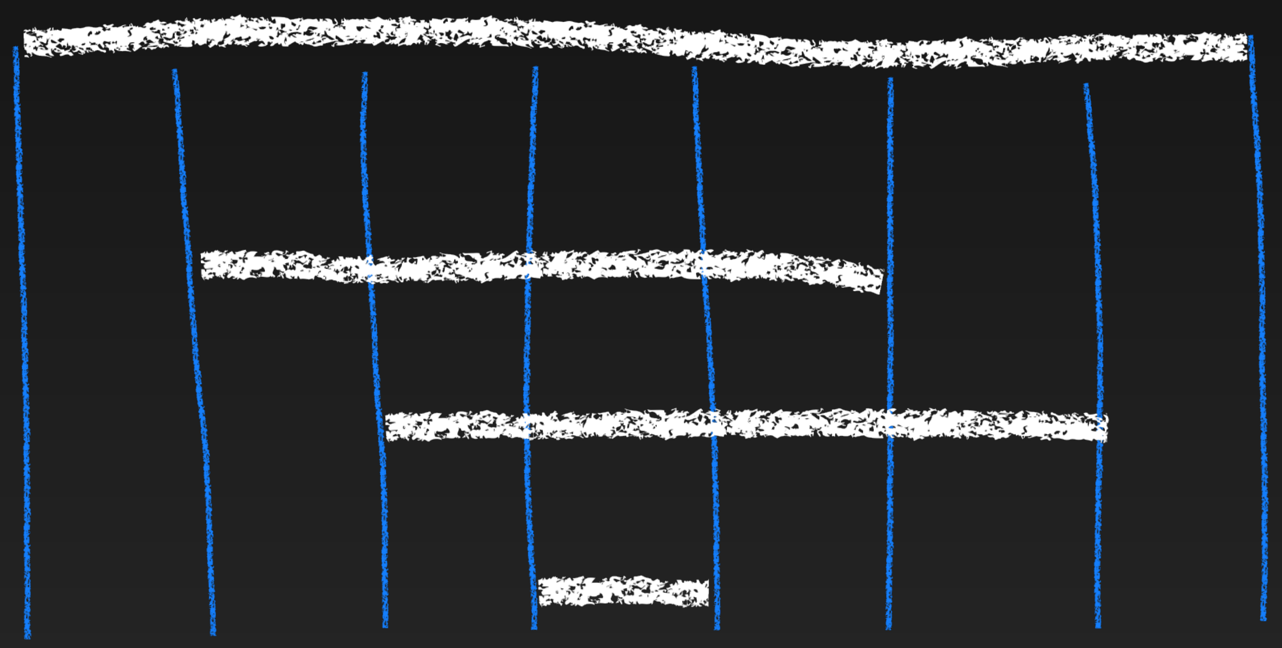
Stabilité du TNS

Lemme: Si $B \sim B'$, alors $\mathbb{P}\big(d(B,B') > \varepsilon\big) \leq 1 - (1 - \exp(-\lambda\varepsilon)(\lambda\varepsilon + 1))^n$.

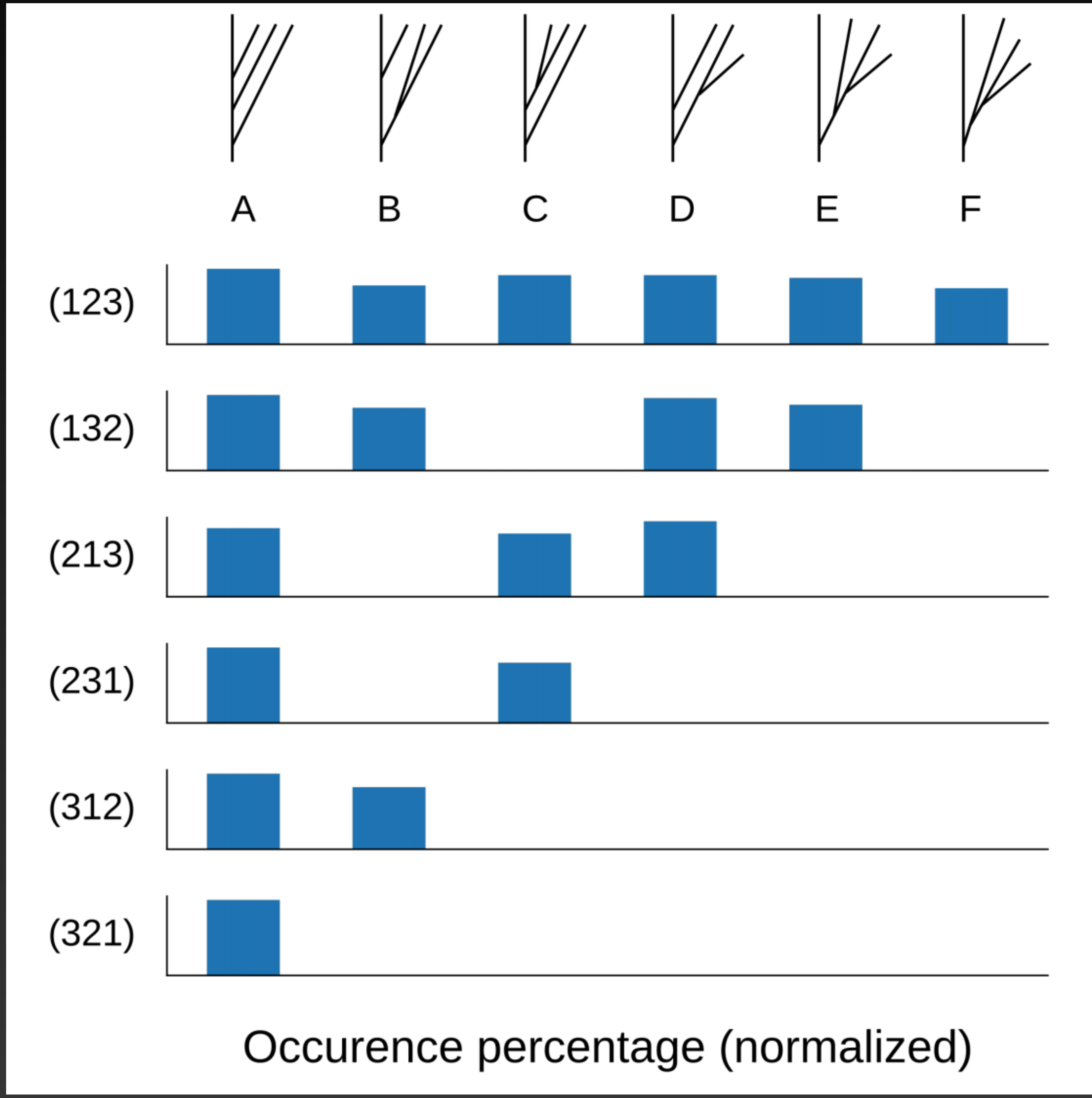


Statistiques du TNS

Types combinatoires par barcode "régulier"



Barcode régulier

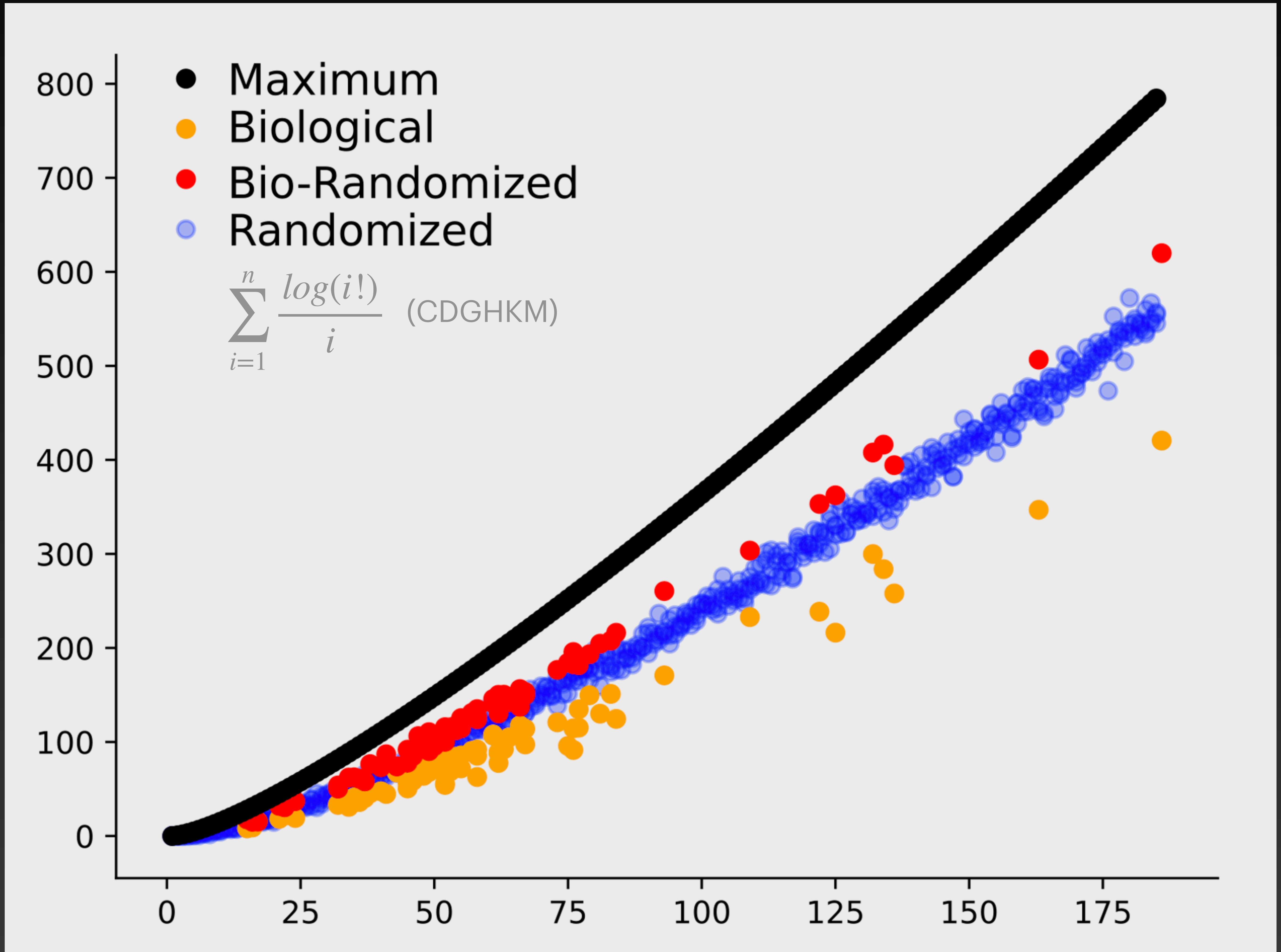


Pourcentage de chaque type d'arbre combinatoire généré à partir d'un barcode régulier

Statistiques du TNS

Arbres artificiels VS vrais arbres

log du nombre de réalisations

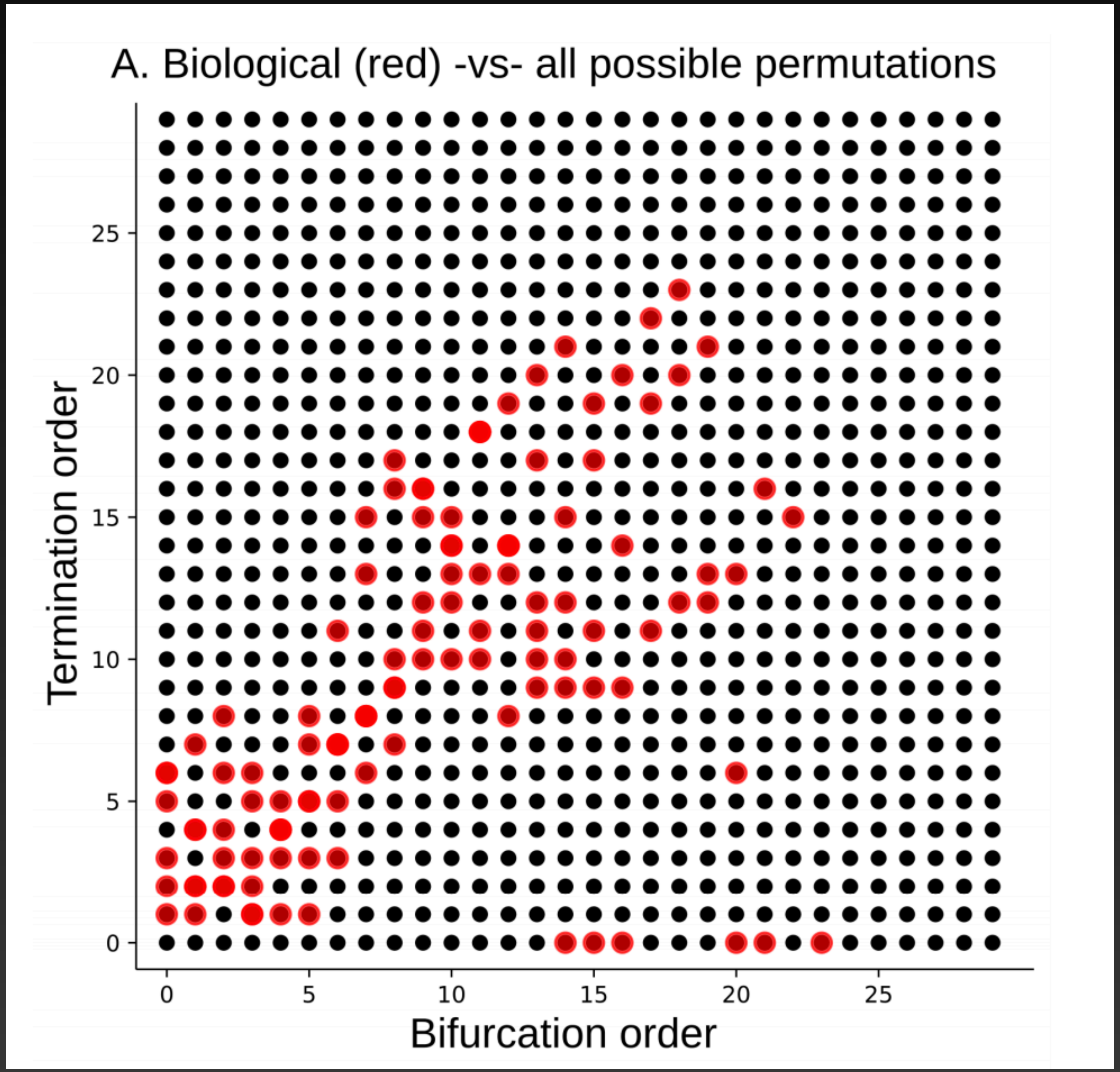


Comparaison de la distribution du nombre de réalisation de barcodes biologiques, biologiques randomisés et aléatoires.

Nombre de barres

Statistiques du TNS

Types de permutations pour les neurones



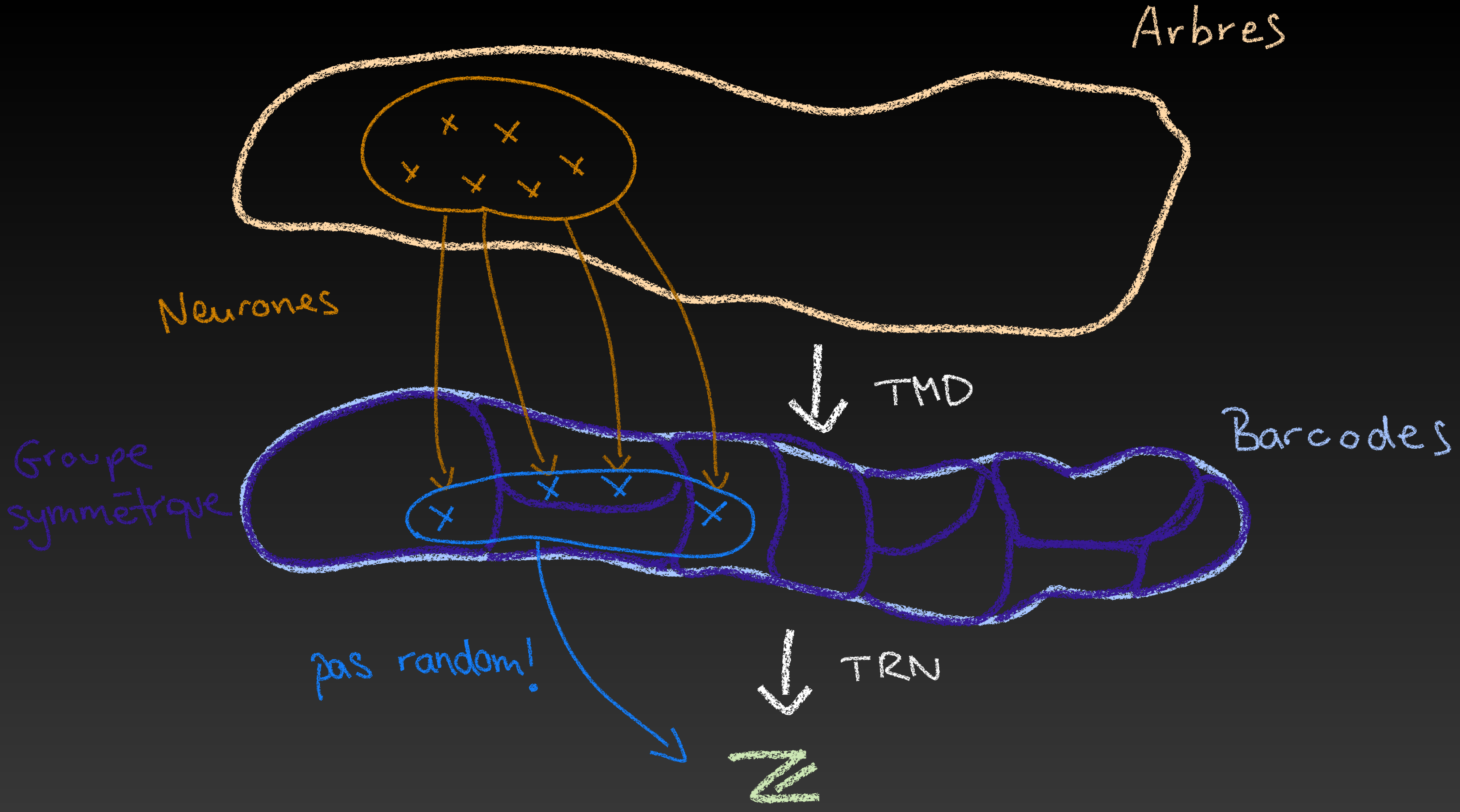
Conclusion
Résumé

- Comprendre les relations entre l'espace des arbres et l'espace des barcodes,

- Afin de mieux comprendre des arbres biologiques (neurones) et leurs différences avec des arbres aléatoires.

- Etudier une inverse stochastique (TNS) et son comportement avec du bruit

[From trees to barcodes and back again: theoretical and statistical perspectives]


Arbres
Neurones
TMD
Barcodes
Groupe symmétrique
pas random!
TRN
Z

Conclusion

A suivre...

Mieux comprendre les relations entre les différents espaces d'arbres et l'espace des barcodes d'un point de vue combinatoire (bientôt!) et avec des outils de théorie géométrique des groupes.

Utiliser des outils statistiques (e.g. moyenne) d'un espace sur l'autre.

Générer des neurones artificiels à partir de barcodes artificiels.

Merci!

Collaborateurs:

Kathryn Hess, EPFL
Lida Kanari, Blue Brain Project

Justin Curry, Albany SUNY
Jordan DeSha, Albany SUNY
Brendan Mallery, Albany SUNY

Gill Grindstaff, Texas University
Benjamin Brück, ETH Zurich

Questions?