Théorie de Morse

M espace topologique

$f : M \to \mathbb{R}$ application continue

On s'intéresse à l'évolution de l'homologie $H_i(M^a, k)$ lorsque a varie.

Ici k est un anneau (ou un corps) et $M^a = \{m \in M \mid f(m) \leq a\}$

<u>Exemple</u> : M espace métrique. $X \subset M$

$f : M \to \mathbb{R}$; $m \longmapsto d(m, X)$

Alors $M^a = \bigcup_{x \in X} \overline{B(x,a)}$.

Dans cet exposé on s'intéresse à une autre classe d'exemples :

M variété différentiable et $f : M \to \mathbb{R}$ est une fonction

<u>Théorème</u> : si $f^{-1}([a,b])$ est compact et ne contient pas de points critiques de f alors M^a et M^b sont difféomorphes et M^b se rétracte par déformation sur M^a. En particulier, $H_i(M^a, k) \to H_i(M^b, k)$ est un isomorphisme.

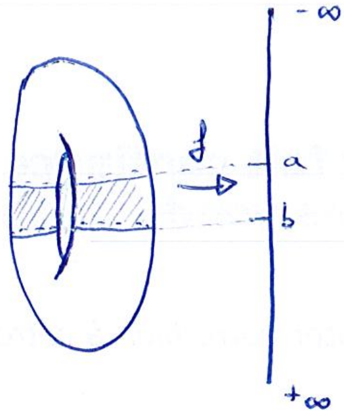
<u>Vocabulaire</u> :

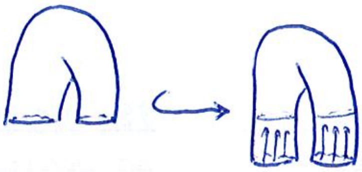
- $m \in M$ est <u>un point critique</u> si $d_m f = 0$ $\left(\text{en coordonnées locales } \frac{\partial f}{\partial x_i}(m) = 0 \ \forall i = 1, \dots, \dim(M)\right)$

- Un <u>rétracte par déformation</u> est une famille à un paramètre d'appl$^{\text{ées}}$ continues $\varphi : [0,1] \times M^b \to M^b$ telle que
  - $\varphi(0, m) = m$
  - $\varphi(1, m) \in M^a$
  - $\varphi(t, m) = m$ si $m \in M^a$.

$\boxed{\Rightarrow}$ l'inclusion $M_a \subset M_b$ induit un isomorphisme $H_i(M^a, k) \xrightarrow{\sim} H_i(M^b, k)$

Exemple :





Idée de la démonstration : il suffit de démontrer qu'il y a un rétracte par déformation de $f^{-1}([a,b])$ sur $f^{-1}(a)$. On choisit une structure Riemannienne sur M

$$\varphi : [0,1] \times f^{-1}([a,b]) \longrightarrow f^{-1}([a,b])$$

$$(t, \underset{\underset{f^{-1}(c)}{\cap}}{m}) \longmapsto \text{flot au temps } t \text{ de } (c-a)\nabla f.$$

On peut même décrire explicitement le changement de topologie au passage d'un point critique sympathique.

Définitions :

- Un point critique $m \in M$ de f est non-dégénéré si la forme quadratique $\mathrm{Hess}_m(f)$ définie sur T_mM est <u>ND</u> (en coord. locales, $\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(m)\right)_{ij} \neq 0$).
- l'<u>indice</u> d'un point critique m est

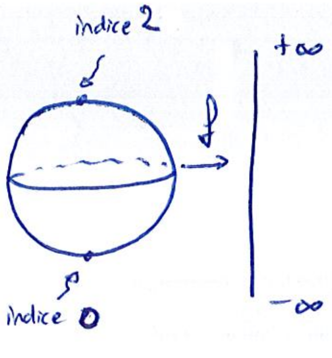
$$\mathrm{Ind}(m) = \max\left\{ \dim(V) \mid V \subset T_mM,\ \mathrm{Hess}_m(f)|_V \text{ déf } < 0 \right\}$$

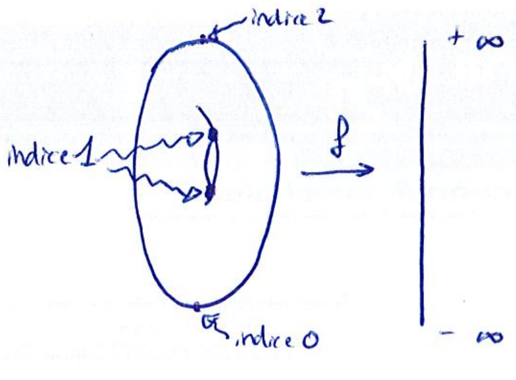
$$= \text{nbr de v.p. négatives de } \mathrm{Hess}_m(f) \quad \text{(comptés avec multiplicités)}$$

$$= \text{“nbr de directions vers lesquelles } f \text{ décroît”}.$$

- une fonction $f : M \to \mathbb{R}$ est dite <u>de Morse</u> si tous ses points critiques sont ND.

Exemples :





Remarque : l'ensemble des fonctions de Morse forme un ouvert dense de l'ensemble des fonctions $C^k(M, \mathbb{R})$ $(k \geq 2)$ pour la topologie C^2.

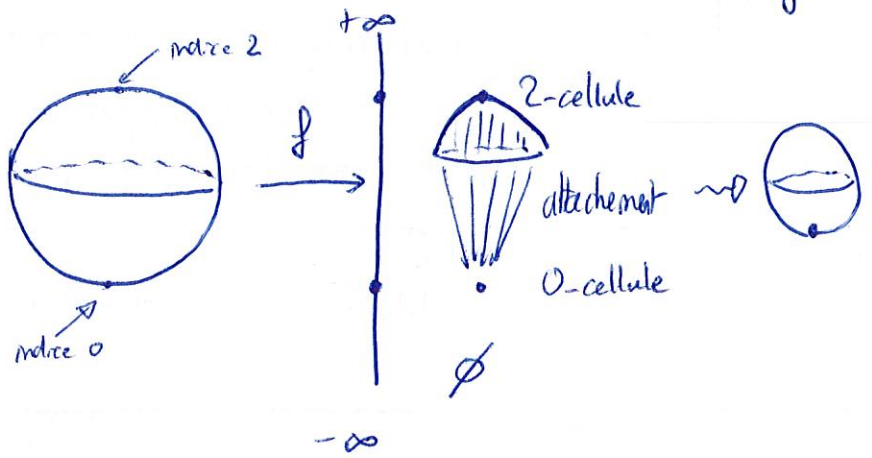
Théorème : Soit m un point critique ND et $\varepsilon > 0$ tels que

$f^{-1}([f(m)-\varepsilon, f(m)+\varepsilon])$ est compact et ne contient pas de pt critique autre que m.

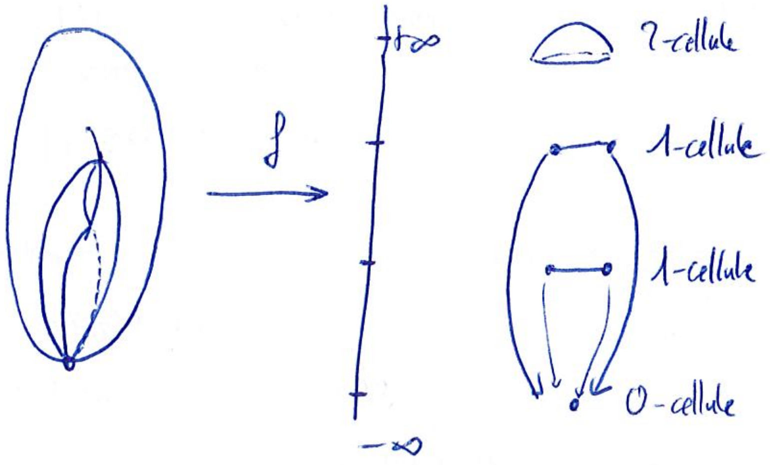
Alors $M^{f(m)+\varepsilon}$ a le type d'homotopie de $M^{f(m)-\varepsilon}$ attaché d'une q-cellule, où q est l'indice de m.

Vocabulaire :
- Une q-cellule est une boule fermée de dimension q.
- Un attachement est un recollement d'une cellule le long de son bord.

Exemples : (1)



(2)



Autre image

Conséquence : toute variété a le type d'homotopie d'un CW-complexe.

espace topologique obtenu par recollement de cellules de dim croissante.

- les complexes simpliciaux (exposé de Clément) sont des CW-complexes.
- les complexes cubiques sont des CW-complexes
- plus généralement, les complexes polyhedraux sont des CW-complexes.

Homologie cellulaire

Soit X un CW-complexe.

Le complexe cellulaire associé à X est défini comme suit :

$$C_n(X) = k \cdot [n\text{-cellules de } X]$$

$$C_n(X) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X)$$

n-cellule $\longmapsto$ somme alternée des $(n-1)$-cellules qui constituent son bord

(on prendra $k = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour éviter les questions de signes)

Lemme : $\partial \circ \partial = 0$.

L'homologie cellulaire $H_n(C) = \dfrac{\ker\left(C_n(X) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X)\right)}{\partial\left(C_{n+1}(X)\right)}$.

Le cas des variétés : le complexe de Morse

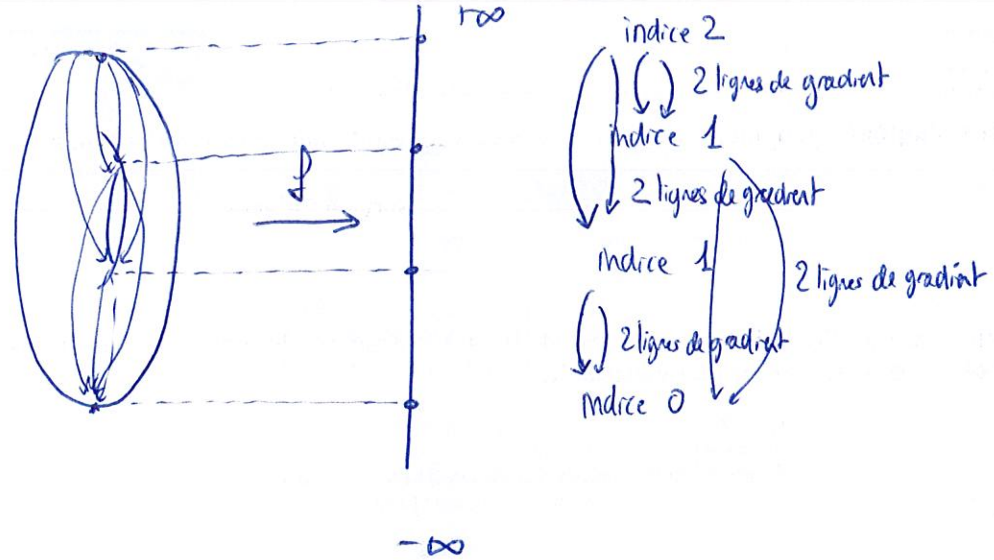
M variété $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ fonction de Morse

$\Longrightarrow$ X complexe cellulaire ayant le type d'homotopie de M.

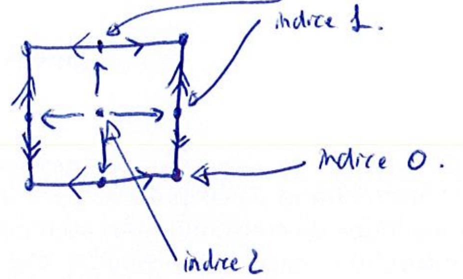
Question : a-t-on une description de $C_*(X)$ en termes de M et f.

Réponse : oui, c'est le complexe de Morse.

Revenons à l'exemple du tore :



Chaque ligne de gradient correspond à une composante de bord.



Complexe de Morse de (M, f)

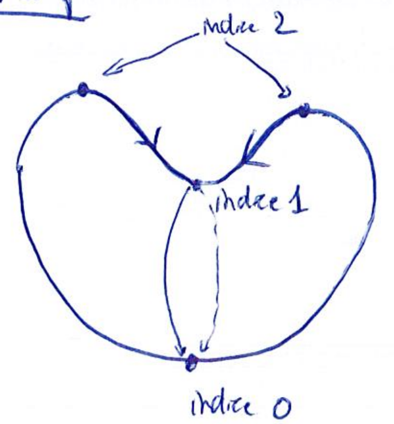
$$C_n(M,f) = k\{\text{pts critiques d'indice } n\}$$

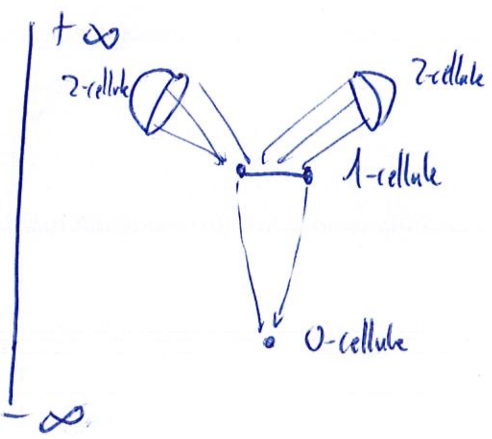
$$C_n(M,f) \longrightarrow C_{n-1}(M,f)$$

$$m \longmapsto \sum_{\substack{\gamma \\ m \to n \\ \text{ligne de gradient}}} \pm n .$$

(ici encore, on prend $k = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour ne pas se soucier des signes)

Exemple = une autre décomposition cellulaire de la sphère.





Complexe de Morse/cellulaire

$$\begin{array}{ll} k \oplus k & 2 \\ \downarrow + & \\ k & \\ \downarrow 0 & \\ k & \end{array}$$