HAX301X – Algèbre III

Réduction des Endomorphismes

Livret d'exercices

Piste verte.

Exercice 1. Soit f une application linéaire de E dans E telle que $\ker(f) \neq \{0_E\}$. Peut-on trouver une base de E dans laquelle la matrice de f est inversible ?

Exercice 2. Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables/conjuguées ?

Piste bleue.

Exercice 3. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère la matrice de taille $N \times N$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{N-2} & a_{N-1} \end{pmatrix}$$

où $a_0, \dots, a_{N-1} \in \mathbb{K}$ sont des scalaires. Quel est le rang de C ?
 [Indication : on pourra distinguer deux cas]

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(F_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante (pour l'inclusion) de sous-espaces vectoriels de E . Montrer que $\cup_{n \geq 0} F_n$ est un sous-espace vectoriel de E .

Piste rouge.

Exercice 5. Considérons la matrice $P \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ définie comme

$$P := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

- (1) Calculer que $P^2 = I_n$; puis calculer que pour tout $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$, PAP^{-1} est la matrice dont le coefficient (i, j) est $a_{n-i+1, n-j+1}$.
- (2) Écrire P comme une matrice de passage, et ré-interpréter la question précédente en termes de changement de base.

Exercice 6. L'objectif de cet exercice est de résoudre l'équation différentielle $f'' = f + f'$ (où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction inconnue deux fois dérivable) à la manière de ce que nous fait dans l'introduction avec la suite récurrente $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$. Posons $g := f'$.

- (1) Montrer que $\begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ si et seulement si $f'' = f + f'$.
- (2) En reprenant la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varphi & \psi \end{pmatrix}$ du §2.2 de l'introduction du cours, on pose $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} := P^{-1} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$. Montrer que $f'' = f + f'$ si et seulement si $h' = \varphi h$ et $k' = \psi k$.
- (3) En déduire que $f'' = f + f'$ si et seulement si il existe des constantes $C, D \in \mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} Ce^{\varphi x} \\ De^{\psi x} \end{pmatrix}$, cette dernière égalité étant équivalente à $f(x) = Ce^{\varphi x} + De^{\psi x}$.

Piste noire.

Exercice 7. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N} \in \text{Mat}_{N \times N}(\mathbb{K})$, $N \in \mathbb{N}$. On définit un endomorphisme A_E de E^N de la manière suivante :

$$A_E \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + \cdots + a_{1N}v_N \\ \vdots \\ a_{N1}v_1 + \cdots + a_{NN}v_N \end{pmatrix}.$$

Pour tout endomorphisme $\varphi : E \rightarrow E$ on définit une application linéaire $\Phi : E \rightarrow E^N$ et un endomorphisme $\varphi^{\times N} : E^N \rightarrow E^N$ comme suit :

$$\Phi(v) := \begin{pmatrix} v \\ \varphi(v) \\ \vdots \\ \varphi^{\circ(N-1)}(v) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi^{\times N} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \varphi(v_1) \\ \vdots \\ \varphi(v_N) \end{pmatrix}.$$

- (1) Montrer que Φ induit un isomorphisme entre $\ker(a_0 \text{id}_E + a_1 \varphi + \cdots + a_{N-1} \varphi^{\circ(N-1)} - \varphi^{\circ N})$ et $\ker(\varphi^{\times N} - A_C)$, où C est la matrice de l'Exercice 3.
- (2) Posons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\varphi(u)_n := u_{n+1}$. Déduire du point précédent que le sous-espace vectoriel des suites numériques $(u_n)_{n \geq 0}$ satisfaisant la relation de récurrence

$$u_{n+N} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \cdots + a_{N-1} u_{n+N-1}$$

s'identifie à l'espace vectoriel des suites $(X_n)_{n \geq 0}$ à valeur dans $\mathbb{R}^N$ satisfaisant la relation de récurrence $X_{n+1} = CX_n$.

FEUILLE DE TD NUMÉRO 2 : PERMUTATIONS

Piste verte.

Exercice 8. Dans $\mathfrak{S}_4$, quel est l'inverse du cycle (1234)?

Exercice 9. Effectuer les produits de permutations qui suivent :

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10. Calculer la signature de toutes les permutations qui apparaissent dans les Exercices 8 et 9.

Exercice 11. Factoriser la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ en produit de cycles à supports disjoints. Puis faire de même avec $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Piste bleue.

Exercice 12. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Montrer que pour tout $1 \leq i, j \leq n$ il n'y a que deux possibilités : soit $\mathcal{O}_\sigma(i) = \mathcal{O}_\sigma(j)$, soit $\mathcal{O}_\sigma(i) \cap \mathcal{O}_\sigma(j) = \emptyset$.

Exercice 13. Montrer que $\mathfrak{S}_n$ est abélien si et seulement si $n \in \{1, 2\}$.

Exercice 14. Montrer que la signature de toute transposition vaut -1 .

[Indication : on pourra montrer que le nombre d'inversions de la transposition (ij) est $2|i - j| - 1$.]

Exercice 15. Soient $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{S}_q \times \mathfrak{S}_r$. On définit alors $\alpha \sqcup \beta \in \mathfrak{S}_{q+r}$ de la manière suivante :

$$\alpha \sqcup \beta := \begin{pmatrix} 1 & \cdots & q & q+1 & \cdots & q+r \\ \alpha(1) & \cdots & \alpha(q) & q+\beta(1) & \cdots & q+\beta(r) \end{pmatrix}.$$

Démontrer que $\varepsilon(\alpha \sqcup \beta) = \varepsilon(\alpha)\varepsilon(\beta)$.

Piste rouge.

Exercice 16. On rappelle que le support d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est l'ensemble $\text{supp}(\sigma) := \{1 \leq i \leq n \mid \sigma(i) \neq i\}$.

(1) Déterminer le support de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, et montrer que c'est un cycle.

- (2) Montrer que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, si $i \in \text{supp}(\sigma)$ alors $\sigma(i) \in \text{supp}(\sigma)$.
- (3) Montrer que deux permutations à supports disjoints commutent. [Indication : on pourra calculer $\sigma\tau(i)$ et $\tau\sigma(i)$ dans les trois cas qui suivent : $i \in \text{supp}(\sigma)$, $i \in \text{supp}(\tau)$, et $i \notin \text{supp}(\sigma) \cup \text{supp}(\tau)$.]

Exercice 17.

- (1) Montrer que tout élément de $\mathfrak{S}_n$ peut s'écrire comme produit de k transpositions, avec $k < n$.
- (2) Soient $2 \leq i \neq j \leq n$. Calculer $(1\ i)(1\ j)(1\ i)$. En déduire que toute permutation peut s'écrire comme produit de transpositions $(1\ i)$ avec $i \geq 2$.
- (3) Soient $1 \leq i < j \leq n$. Écrire $(i\ j)$ comme produit de transpositions de la forme $(k\ k+1)$, avec $1 \leq k \leq n-1$. En déduire que toute permutation peut s'écrire comme produit de transpositions $(k\ k+1)$ avec $1 \leq k \leq n-1$.

Exercice 18. Soit σ une permutation d'ordre $\ell \in \mathbb{N}$. On note $\sigma = c_1 \cdots c_m$ sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints, et on note ℓ_i l'ordre de c_i . Montrer que $\ell = \text{ppcm}(\ell_1, \dots, \ell_m)$.

FEUILLE DE TD NUMÉRO 3 : DÉTERMINANT D'UNE MATRICE

Piste verte.

Exercice 19. Montrer que le déterminant de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ est nul de (au moins) deux manières différentes.

Piste bleue.

Exercice 20. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3} \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{K})$. Montrer que

$$a_{22} \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Piste rouge.

Exercice 21. Soient $A \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{K})$ et $v, w \in \mathbb{K}^3$. Montrer que

$$(Av) \wedge (Aw) = \text{com}(A)(v \wedge w).$$

Exercice 22. Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$. On note $X \cdot M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}[X])$ la matrice dont le coefficient (i, j) est $m_{ij}X$. Montrer que $\det(I_n + X \cdot M) \equiv 1 + X \text{tr}(M) \pmod{X^2}$.

Exercice 23. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère le déterminant $n \times n$

$$f_n := \begin{vmatrix} +1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ +1 & +1 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & +1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & +1 & +1 \end{vmatrix}.$$

Montrer que f_n est le terme numéro n de la suite de Fibonacci (définie par $f_0 = f_1 = 1$ et la relation de récurrence $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$).

[Indication : pour montrer que la relation de récurrence est satisfaite, on pourra commencer par développer le déterminant suivant la première colonne.]

Exercice 24. On considère le déterminant des matrices de taille $n \times n$ à coefficients réels comme une fonction de n^2 variables $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Montrer que

$$\frac{\partial \det(A)}{\partial a_{ij}} = (-1)^{i+j} |A^{i,j}|.$$

[Indication : on pourra développer le déterminant suivant la j -ième colonne ou bien suivant la i -ième ligne.]

Piste noire.

Exercice 25. Le déterminant de Vandermonde est défini par

$$V(x_0, \dots, x_n) := \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

quel que soient $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$. C'est l'évaluation en $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ d'un polynôme en $n+1$ variable $V \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$.

- (1) Fixons $x_0, \dots, x_{n-1}$, et considérons le polynôme $Q(Y) := V(x_0, \dots, x_{n-1}, Y) \in \mathbb{K}[Y]$. Montrer que Q est un multiple de $\prod_{i=0}^{n-1} (Y - x_i)$.
- (2) Montrer que Q est de degré $\leq n$ et que le coefficient de Y^n est $V(x_0, \dots, x_{n-1})$. En déduire que $Q(Y) = V(x_0, \dots, x_{n-1}) \prod_{i=0}^{n-1} (Y - x_i)$.
- (3) Démontrer que

$$V(x_0, \dots, x_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

- (4) En déduire que $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ sont distincts deux à deux si et seulement si l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{K}[X]_{\leq n} &\longrightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P &\longmapsto (P(x_0), \dots, P(x_n)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

On suppose désormais que nous sommes dans cette situation, de sorte que la matrice A définissant le déterminant de Vandermonde est inversible. On note L_i l'unique polynôme de degré $\leq n$ tel que $L_i(x_j) = \delta_{ij}$.

- (5) Montrer que si $A^{-1} = (b_{ij})_{0 \leq i, j \leq n}$ alors $L_i(X) = b_{0i} + b_{1i}X + \cdots + b_{ni}X^n$.
- (6) Montrer que

$$L_i(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{X - x_j}{x_i - x_j}.$$

- (7) En déduire une formule pour l'inverse de la matrice de Vandermonde lorsque $n = 2$ (lorsque celle-ci est inversible). [On pourra utiliser a, b, c plutôt que x_0, x_1, x_2 .]

FEUILLE DE TD NUMÉRO 4 : DÉTERMINANT D'UN ENDOMORPHISME ET FORMES
ALTERNÉES

Piste verte.

Exercice 26. Calculer $\det(\phi)$, pour $\phi : \mathbb{K}[X]_{\leq 3} \rightarrow \mathbb{K}[X]_{\leq 3}$ l'application linéaire donnée par la dérivée. Même question avec l'application linéaire $\psi : \mathbb{K}[X]_{\leq 3} \rightarrow \mathbb{K}[X]_{\leq 3}$ définie par $\psi(P)(X) = P(X + 1)$.

Piste bleue.

Exercice 27. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}$ et $f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ une application. Montrer que si f est antisymétrique et linéaire en le premier argument, alors f est n -linéaire.

Exercice 28. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme n -linéaire alternée alors pour toute famille liée $(u_1, \dots, u_n)$ de longueur n , $f(u_1, \dots, u_n) = 0$.

Exercice 29. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n . Supposons que $E = F \oplus G$, pour F et G des sous-espaces vectoriels de dimension respective q et r (ainsi $n = q + r$). On se donne une base $v = (v_1, \dots, v_q)$ de F et une base $w = (w_1, \dots, w_r)$ de G , de sorte que $u := v \sqcup w = (v_1, \dots, v_q, w_1, \dots, w_r)$ est une base de E . Soit $\phi \in \text{End}(E)$ un endomorphisme.

- (1) Démontrer que F est stable par ϕ si et seulement si $M_{u,u}(\phi)$ est une matrice triangulaire supérieure par blocs de type (q, r) ;
- (2) Démontrer que G est stable par ϕ si et seulement si $M_{u,u}(\phi)$ est une matrice triangulaire inférieure par blocs de type (q, r) ;
- (3) En déduire que F et G sont stables par ϕ si et seulement si $M_{u,u}(\phi)$ est diagonale par blocs de type (q, r) .
- (4) Notons $\pi_F : E \rightarrow F$ l'application définie par $\pi_F(f + g) := f$ lorsque $f \in F$ et $g \in G$. De la même manière on définit $\pi_G : E \rightarrow G$ par $\pi_G(f + g) := g$ lorsque $f \in F$ et $g \in G$. Montrer que dans les situations des questions (1), (2) et (3) ci-dessus, on a $\det(\phi) = \det(\pi_F \circ \phi|_F) \det(\pi_G \circ \phi|_G)$.

Exercice 30. Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , $\pi : E \rightarrow E$ une projection (c'est-à-dire que $\pi \circ \pi = \pi$), et $\sigma : E \rightarrow E$ une symétrie (c'est-à-dire que $\sigma \circ \sigma = \text{id}_E$)

- (1) Montrer que $\det(p) \in \{0, 1\}$.
- (2) Montrer que $\det(p) = 1$ si et seulement si $p = \text{id}_E$.
- (3) Montrer que $\det(\sigma) \in \{-1, +1\}$.

Piste rouge.

Exercice 31. Soient $k > 0$ et $n > 0$ deux entiers naturels, et soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n . L'objectif de cet exercice est de montrer que $\dim(\text{Alt}_k(E)) = \binom{n}{k}$.

- (1) Commencer par montrer que si $k > n$ alors $\dim(\text{Alt}_k(E)) = 0$.
- (2) Montrer que pour $k = 1$, $\dim(\text{Alt}_1(E)) = n$.
- (3) Supposons que $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de E . Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \text{Alt}_k(E) &\longrightarrow \mathbb{K}^{\binom{n}{k}} \\ f &\longmapsto (f(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}))_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels¹.

1. Vous pouvez vous inspirer de la démonstration de la Proposition 3.6 et du Lemme 3.7 dans le Chapitre 1 du cours.

Piste verte.

Exercice 32. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, et soit $\pi : E \rightarrow E$ une projection. On note $q = \dim(\ker(\pi))$ et $r = \dim(\text{im}(\pi))$. Donner le spectre et le polynôme caractéristique $\chi_\pi(X)$ en fonction de q et r .

Exercice 33. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, et soit $\sigma : E \rightarrow E$ une symétrie. On suppose que la caractéristique de $\mathbb{K}$ est différente de 2. On note $q = \dim(\ker(\sigma - \text{id}))$ et $r = \dim(\ker(\sigma + \text{id}))$. Donner le spectre et le polynôme caractéristique $\chi_\sigma(X)$ de σ en fonction de q et r .

Exercice 34. Dans $\mathbb{R}^3$, donner deux vecteurs propres non colinéaires de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Peut-on en trouver un troisième qui ne soit pas combinaison linéaire des deux autres ?

Exercice 35. Montrer que si $A \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{K})$ alors $\chi_A(X) = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A)$.

Piste bleue.

Exercice 36. Trouver les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$. Montrer qu'elle est diagonalisable et donner une base de vecteurs propres.

Exercice 37. Calculer le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et en déduire que cette matrice est diagonalisable. Donner une base de vecteurs propres.

Exercice 38. Même chose avec $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. En déduire qu'elle est semblable/conjuguée à la matrice de l'exercice précédent.

Exercice 39. Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ des scalaires. On considère

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}).$$

Montrer que $\chi_C(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$. [Indication : on pourra développer le déterminant selon la dernière colonne.]

On dit que C est la **matrice compagnon** de ce polynôme unitaire.

Piste rouge.

Exercice 40. Soient $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ et $B \in \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{K})$. On considère les matrices par bloc qui suivent :

$$M := \begin{pmatrix} X \cdot I_m & -A \\ \mathbf{0} & I_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N := \begin{pmatrix} I_m & A \\ B & X \cdot I_n \end{pmatrix}$$

- (1) Calculer MN et NM .
- (2) En déduire que $X^n \chi_{AB}(X) = X^m \chi_{BA}(X)$.
- (3) Conclure que si $m = n$ alors $\chi_{AB}(X) = \chi_{BA}(X)$.
- (4) Soit $C = (a_i b_j)_{1 \leq i, j \leq n} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$, où les a_i et les b_j sont des scalaires quelconques. Montrer que $\chi_C(X) = X^n - (\sum_{i=1}^n a_i b_i) X^{n-1}$.

Exercice 41. Calculer le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et en déduire que cette matrice est trigonalisable. Décrire ses sous-espaces propres et en déduire qu'elle n'est pas diagonalisable. Trigonaliser la matrice.

Exercice 42. Même chose avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. En déduire qu'elle est semblable/conjuguée à la matrice de l'exercice précédent. Par quelle matrice ?

Piste noire.

Exercice 43. Soit $E \subset C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des fonctions qui sont 2π -périodiques. On considère l'endomorphisme $\phi : E \rightarrow E$ défini par $\phi(f) = f''$.

- (1) Montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $-n^2$ est une valeur propre de ϕ , dont on donnera un vecteur propre associé.
- (2) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, donner une base du sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ défini comme

$$E_\lambda := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'' = \lambda f\}.$$

[Indication : on pourra distinguer 3 cas: $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ et $\lambda > 0$.]

- (3) En déduire que ϕ n'a pas d'autre valeur propre que celles de la question (1).
- (4) Pour chaque valeur propre $\lambda = -n^2$ de ϕ donner la dimension de $\ker(\phi + n^2 \text{id}_E)$.
[Attention : il y a 2 situations possibles.]

FEUILLE DE TD NUMÉRO 6 : DIAGONALISATION, TRIGONALISATION, POLYNÔMES
D'ENDOMORPHISMES

Piste verte.

Exercice 44. Soit $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ et soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P(A) = \text{diag}(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n))$.

Exercice 45. Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal des trois matrices qui suivent :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Piste bleue.

Exercice 46. Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E vérifiant $f^{\circ 3} = 4f$. Montrer que la trace de f est un entier pair.

Exercice 47. Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \text{End}(E)$ tel que $f^{\circ 2}$ soit une projection.

- (1) Montrer que $\text{Sp}(f) \subset \{-1, 0, 1\}$.
- (2) Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $f^{\circ 3} = f$.

Exercice 48. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in \text{End}(E)$. Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :

- (1) χ_f est scindé.
- (2) μ_f est scindé.
- (3) Il existe un polynôme scindé annulateur de f .

Exercice 49. Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, et soit $\phi : E \rightarrow E$ un endomorphisme tel que $\phi^n = \text{id}_E$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que ϕ est diagonalisable. Est-ce toujours le cas si on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$?

Exercice 50. Soit C la matrice compagnon de l'Exercice 39.

- (1) Montrer par récurrence sur $1 \leq k \leq n - 1$ que la première colonne de la matrice C^k est le vecteur e_{k+1} de la base canonique de $\mathbb{K}^n$, de sorte que la famille $(e_1, C e_1, \dots, C^{n-1} e_1)$ est exactement la base canonique.
- (2) En déduire que si $P \in \mathbb{K}[X]_{\leq n-1}$ est un polynôme annulateur de C alors $P = 0$.
- (3) En déduire que le polynôme minimal de C est égal à son polynôme caractéristique, et donc que $\mu_C(X) = \chi_C(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$.

Piste rouge.

Exercice 51. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, et soient $f, g \in \text{End}(E)$ deux endomorphismes qui commutent : $f \circ g = g \circ f$.

- (1) Montrer que pour toute valeur propre λ de g , le sous-espace vectoriel $E_\lambda(g)$ est stable par f . En déduire que si f est diagonalisable alors la restriction $f|_{E_\lambda(g)}$ est diagonalisable comme endomorphisme de $E_\lambda(g)$.
- (2) Montrer que si f et g sont diagonalisables alors il existe une base commune de diagonalisation de f et g (autrement dit, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ et $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g)$ sont toutes les deux diagonales).
- (3) En déduire que si f et g sont diagonalisables alors $f \circ g$ et $g \circ f$ sont diagonalisables.
- (4) Illustrer ce résultat avec les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associés à $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Piste noire.

Exercice 52. Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel complexe de dimension finie non nulle. Soient f et g des endomorphismes de E .

- (1) On suppose f et g commutent. Montrer que qu'il existe une base commune de trigonalisation pour f et g (on dit que f et g sont *cotrigonalisables*).
- (2) On suppose que $f \circ g - g \circ f = \lambda f$, avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Montrer que f est nilpotent, et que f et g sont cotrigonalisables.
- (3) On suppose que $f \circ g - g \circ f = \lambda f + \mu g$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Montrer que f et g sont cotrigonalisables.

Piste verte.

Exercice 53. Soit $f : E \rightarrow E$ un endomorphisme et $v \in E$ un vecteur tel que $f^{oq}(v) = 0_E$ et $f^{o(q-1)}(v) \neq 0_E$, pour un certain entier $q \geq 1$.

- (1) Montrer que la famille $\mathcal{B}_v := (f^{ok}(v))_{0 \leq k \leq q-1}$ est libre.
- (2) Montrer que $H_v := \text{Vect}\{f^{ok}(v) \mid 0 \leq k \leq q-1\}$ est stable par f .
- (3) Donner la matrice de $f|_{H_v}$ dans la base $\mathcal{B}_v$.

Exercice 54.

- (1) Soit $M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ une matrice annulée par le polynôme $(X - a)^m$, avec $1 \leq m \leq n$ et $a \in \mathbb{K}$. Trouver la décomposition de Dunford de M .
- (2) En déduire la décomposition de Dunford des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \lambda & \alpha & \gamma \\ 0 & \lambda & \beta \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (\lambda, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}).$$

Piste bleue.**Exercice 55.**

Donner la décomposition de Dunford de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{K})$.

Exercice 56.

- (1) Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
- (2) Montrer que A est trigonalisable mais pas diagonalisable (sur $\mathbb{R}$).
- (3) En déduire une forme de Jordan de A (c'est-à-dire une matrice de Jordan J semblable à A).
- (4) Déterminer le changement de base permettant de passer de A à J .

Exercice 57. Mettre la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sous forme de Jordan.

Exercice 58. Mettre la matrice de l'exercice 55 sous forme de Jordan.

Piste rouge.

Exercice 59.

- (1) Montrer que deux matrices de taille 2×2 à coefficients complexes ont le même polynôme minimal si et seulement si elles sont semblables (=conjuguées).
- (2) Montrer que deux matrices de taille 3×3 à coefficients complexes ont le même polynôme minimal si et seulement si elles sont semblables.
- (3) Trouver deux matrices carrées qui ont le même polynôme minimal et ne sont pas semblables.

FEUILLE DE TD NUMÉRO 8 : APPLICATIONS À L'ANALYSE

Exercice 60. Décrire le terme général des suites à valeurs réelles $(u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ satisfaisant la relation de récurrence

$$u_{n+3} = u_n - u_{n+1} + u_{n+2}.$$

[Indication : pour la formule du terme général, on pourra faire une disjonction de cas en fonction de la parité de n .]

Exercice 61. Même question que l'exercice précédent, avec la relation de récurrence

$$u_{n+4} = 2u_{n+2} - u_n.$$

Exercice 62. Pour $t \in \mathbb{R}$, on considère la matrice

$$M_t = t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Calculer explicitement M_t^n pour tout $n \geq 0$.

[Indication : distinguer deux cas, en fonction de la parité de n .]

(2) Diagonaliser M_t sur $\mathbb{C}$.

(3) Montrer que $\exp(M_t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$.

(4) En déduire une formule et la convergence des séries de Taylor de $\cos$ et $\sin$.

Exercice 63. On cherche à résoudre l'équation différentielle $f''' + f'' + f' + f = 0$, pour $f \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(1) Ré-écrire cette équation sous la forme d'un système d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 qui lui est équivalent : $V' = AV$, avec $V \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$.

(2) Montrer que la matrice $A \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ est semblable à

$$B := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(écrire la matrice de changement de base).

(3) Résoudre le système d'équations différentielles linéaires $V' = BV$.

(4) Conclure.

Exercice 64. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

(1) Montrer que $\chi_M(X) = \mu_M(X) = (X - 1)(X - 2)^2$.

- (2) Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $1 = a \frac{\mu_M(X)}{X-1} + (b+cX) \frac{\mu_M(X)}{(X-2)^2}$.
- (3) Montrer que $\left(a \frac{\mu_M(X)}{X-1} \right) (M)$ est la matrice Π_1 de la projection π_1 sur $K_1(M)$ parallèlement à $K_2(M)$, et que $\left((b+cX) \frac{\mu_M(X)}{(X-2)^2} \right) (M)$ est la matrice Π_2 de la projection π_2 sur $K_2(M)$ parallèlement à $K_1(M)$.
- (4) Calculer $\exp(tM)$.
- (5) Résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} x_1'(t) &= x_1(t) - 3x_3(t) \\ x_2'(t) &= x_1(t) - x_2(t) - 6x_3(t) \\ x_3'(t) &= -x_1(t) + 2x_2(t) + 5x_3(t) \end{cases}$$

avec la condition initiale $x_1(0) = x_2(0) = 1$ et $x_3(0) = 0$.

Exercice 65. On cherche à résoudre l'équation différentielle $y'' = ay + by'$, avec des constantes $a, b \in \mathbb{R}$ telles que $a \neq 0$ et $b^2 - 4ac < 0$, et une fonction inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- (1) Ré-écrire cette équation sous la forme d'un système d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 qui lui est équivalent : $V' = CV$, avec $V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$.
- (2) Montrer que $C \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ est semblable à une matrice de la forme $\tilde{C} := \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$ avec $c, d \in \mathbb{R}$ et $d \neq 0$.
- (3) Montrer que

$$\exp \left(t \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} e^{ct} \cos(dt) & -e^{ct} \sin(dt) \\ e^{ct} \sin(dt) & e^{ct} \cos(dt) \end{pmatrix}.$$

- (4) Résoudre le système d'équations différentielles linéaires $V' = \tilde{C}V$.
- (5) Conclure.