

Exercice 3

On effectue des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice.

[Rappel de HAX202X: ça ne change pas le rang]

On commence par $L_N \leftarrow L_N - \sum_{k=1}^{N-1} a_k L_k$, ce qui donne

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & 1 & \\ \hline a_0 & 0 & \dots & 0 & \end{pmatrix}$$

Si $a_0 = 0$, alors cette matrice a $N-1$ pivots : le rang est $N-1$.

Si non, on permute cycliquement les lignes, $L_N \leftarrow L_{N-1} \leftarrow \dots \leftarrow L_1 \leftarrow L_N$,

et on obtient la matrice diagonale $\begin{pmatrix} a_0 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ qui est de rang N
(car $a_0 \neq 0$)

1^{ère} méthode (calcul direct)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - (a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})(a_{12}a_{23} - a_{21}a_{13}) \\ = a_{11}a_{22}a_{22}a_{33} - a_{21}a_{12}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{22}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{22}a_{23} \\ - a_{21}a_{32}a_{12}a_{23} + a_{31}a_{22}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{22}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{22}a_{13} \\ = a_{22} (a_{11}a_{22}a_{33} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13}) \\ = \det(A)$$

2^{ème} méthode (avec les mineurs)

Rappel de cours: $A \times \text{com}(A)^T = \det(A) I_3$.

Notons C_1, C_2, C_3 les colonnes de $\text{com}(A)^T$, et posons $B := (C_1 \ C_2 \ C_3)$

$$\text{Concrètement } B = \begin{pmatrix} \det(A^{1,1}) & 0 & \det(A^{3,1}) \\ -\det(A^{1,2}) & 1 & -\det(A^{3,2}) \\ \det(A^{1,3}) & 0 & \det(A^{3,3}) \end{pmatrix}$$

$$A \times B = (AC_1 \ AC_2 \ AC_3) = \begin{pmatrix} \det(A) & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & \det(A) \end{pmatrix}$$

$$\text{D'un côté, } \det(A \times B) = \begin{vmatrix} \det(A) & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & \det(A) \end{vmatrix} = \det(A) \times \begin{vmatrix} a_{22} & 0 \\ a_{32} & \det(A) \end{vmatrix} = a_{22} \det(A)^2.$$

$$\text{De l'autre côté, } \det(A \times B) = \det(A) \times \det(B) = \det(A) \begin{vmatrix} 1 & -\det(A^{1,2}) & -\det(A^{3,2}) \\ 0 & \det(A^{1,1}) & \det(A^{3,1}) \\ 0 & \det(A^{1,3}) & \det(A^{3,3}) \end{vmatrix}$$

Vous devez savoir
comment justifier
cette égalité

$$= \det(A) \times \begin{vmatrix} \det(A^{1,1}) & \det(A^{3,1}) \\ \det(A^{1,3}) & \det(A^{3,3}) \end{vmatrix} = \det(A) \begin{vmatrix} \det(A^{3,3}) & \det(A^{3,1}) \\ \det(A^{1,3}) & \det(A^{3,3}) \end{vmatrix}$$

Pour conclure, il faut pouvoir simplifier par $\det(A)$. C'est un point hors-programme: l'égalité donnée

l'est entre polynômes en les 9 variables $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$, or (s) vu comme un bel polynôme $\det(A) \neq 0$ et

est un polynôme en les n^2 variables $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, or (1) vu comme un tel polynôme $\det(A) \neq 0$ et (2) l'anneau des polynômes en n^2 variables (à coeff. dans un corps k) est intègre. On peut donc simplifier par $\det(A)$.

Exercice 23

dimanche 20 octobre 2024 11:54

On pose $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

On remarque que $A_1 = (1)$ et $A_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \dots 0 \\ 1 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ A_n \end{matrix}$

On a donc $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A_{n+2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & & A_n \end{pmatrix}$

Par conséquent $f_1 = 1$, $f_2 = 1 \times 1 - 1 \times (-1) = 2$, et

$$f_{n+2} = |A_{n+2}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & A_n \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & & \end{vmatrix} = 1 \times |A_{n+1}| - 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 0 \dots 0 \\ 1 & \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ A_n \end{matrix}$$

on développe par rapport à la 1^{ère} colonne.

$$= |A_{n+1}| + (-1) \times (-1) \times |A_n| = f_{n+1} + f_n.$$

on développe par rapport à la 1^{ère} ligne.

Exercice 34

• La 1^{ère} colonne de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ étant nulle, $A \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot e_1$.

Donc $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A , de valeur propre associée 0.

• On remarque aussi que $A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A , de valeur propre associée 1.

• Par ailleurs $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & -1 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = x^2(x-1)$

Donc $m_A(0) = 2 \neq 1 = 3 - \text{rg}(A) = m_A(0)$ en effet: $m_A(0) = \dim(\text{Ker}(A - 0I_3)) = \dim(\text{Ker}(A))$
théorème du rang $\rightarrow = 3 - \text{rg}(A)$

Par conséquent, A n'est pas diagonalisable. On ne peut donc pas compléter $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ en une base de vecteurs propres. La réponse est donc **NON**.

Alternative

On fait une recherche systématique de vecteurs propres : on cherche $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ satisfaisant $A \cdot v = \lambda v$ (*).

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} y+z = \lambda x \\ z = \lambda y \\ z = \lambda z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z = \lambda x \\ z = \lambda y \\ (\lambda-1)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \text{ et } \lambda=y=0 \\ \text{ou} \\ \lambda=1 \text{ et } y=z \text{ et } x=2z \end{cases}$$

Donc $\text{Sp}(A) = \{0, 1\}$, $E_0(A) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $E_1(A) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Tout vecteur propre de A est soit colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ soit colinéaire à $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La réponse est **NON**.

Exercice 36

Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- Commençons par remarquer que $\text{Im}(A) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc A est de rang 1.

Ainsi, par le théorème du rang, $\text{Ker}(A)$ est de dimension 2.

Par conséquent $0 \in \text{Sp}(A)$ et $E_0(A) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ker}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$. En effet $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- On remarque également que $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Par conséquent $3 \in \text{Sp}(A)$ et $1 \leq \dim(E_3(A)) \leq 3 - m_g(0) = 1$

↑
car 3 est
valeur propre.

↑
car la somme des multiplicités
géométriques est ≤ 3 .

Ainsi: $E_3(A) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Conclusion: $m_g(0) + m_g(3) = 2 + 1 = 3$, donc A est diagonalisable et $\text{Sp}(A) = \{0, 3\}$.

De plus, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ forme une base de vecteurs propres.

Exercice 39

Fixons une suite de scalaires $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$.

Posons $C_n = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ 1 & & 0 & -a_{n-2} \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & -a_0 \end{array} \right)$

⚠ j'ai changé les matrices par rapport à l'énoncé. Ça permet de simplifier la notation dans la résolution de l'exercice.

Nous allons montrer par récurrence sur $n \geq 1$ que $\chi_{C_n}(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^{n-k-1}$.

• Initialisation : $n=1$

$C_1 = (-a_0)$ et $\chi_{C_1}(X) = |X + a_0| = X + a_0$.

• Hérité : supposons que $\chi_{C_n}(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^{n-k-1} = X^n + a_0 X^{n-1} + \dots + a_{n-2} X + a_{n-1}$.

$$\chi_{C_{n+1}}(X) = \begin{vmatrix} X & 0 & \dots & 0 & +a_n \\ -1 & X & & 0 & +a_{n-1} \\ & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & & X & +a_1 \\ & & & -1 & X+a_0 \end{vmatrix} = X \cdot \begin{vmatrix} X & 0 & \dots & 0 & +a_{n-1} \\ -1 & X & & 0 & +a_{n-2} \\ & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & & X & +a_1 \\ & & & -1 & X+a_0 \end{vmatrix} + (-1)^n a_n \begin{vmatrix} -1 & X & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & X & \\ & & -1 & X+a_0 \end{vmatrix}$$

on développe le déterminant par rapport à la 1^{ère} ligne

$$= X \chi_{C_n}(X) + (-1)^n a_n (-1)^n$$

par hypothèse de récurrence

$$= X \left(X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^{n-k-1} \right) + a_n$$

$$= X^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^{n-k} + a_n = X^{n+1} + \sum_{k=0}^n a_k X^{n-k}$$

Exercice 41

Notons $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

• $\chi_D(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 4 & X-4 & 0 \\ 2 & -1 & X-2 \end{vmatrix} \overset{\text{on développe par rapport à la dernière colonne.}}{=} (X-2) \begin{vmatrix} X & -1 \\ 4 & X-4 \end{vmatrix} = (X-2) (X(X-4) + 4)$
 $= (X-2) (X^2 - 4X + 4) = (X-2)^3$

χ_D est scindé donc D est trigonalisable, et $\text{sp}(D) = \{2\}$.

• $E_2(D) = \ker(D - 2I_3) = \ker\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$

$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 1 donc $\dim(E_2(D)) = 3 - 1 = 2$ (d'après le thm. du rang)

On peut déjà conclure que D n'est pas diagonalisable, car $m_g(2) = 2 \neq 3 = m_a(2)$.

Décrivons néanmoins $E_2(D)$ comme demandé dans l'énoncé: $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_2(D)$,

et on remarque aussi que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_2(D)$ (la troisième colonne de la matrice $D - 2I_3$ est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$)
 (la 1^{ère} colonne + la 2^{ème} = $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$)

Ainsi: $E_2(D) = \text{Vect}\left(e_3, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$
 $\uparrow \quad \uparrow$
 $\text{d.f. } v_1 \quad \text{d.f. } v_2$

• Pour trigonaliser D , complétons la famille (v_1, v_2) en une base. Prenons par exemple $v_3 \stackrel{\text{d.f.}}{=} e_1$.

$D \cdot v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -2v_1 - 2v_2 + 2v_3$

Par conséquent l'expression de D dans la base $\mathcal{V}$ est $D_{\mathcal{V}, \mathcal{V}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Pour simplifier les coeff, on peut remplacer v_1 par $u_1 = -2v_1$ et v_2 par $u_2 = -2v_2$.

Nouvelle base $\mathcal{U} = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right|$

Nouvelle base $\underline{u} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

Ainsi $D \cdot u_1 = 2u_1$, $D \cdot u_2 = 2u_2$ et $D \cdot u_3 = u_1 + u_2 + 2u_3$, de sorte que

$$D_{\underline{u}, \underline{u}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 42

Notons $F = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

• $\chi_F(X) = \begin{vmatrix} X-3 & -1 & -1 \\ 0 & X-2 & 0 \\ 1 & 1 & X-1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{on développe par rapport à la 2^{ème} ligne}}{=} (X-2) \begin{vmatrix} X-3 & -1 \\ 1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-2) \left((X-3)(X-1) + 1 \right)$
 $= (X-2) (X^2 - 4X + 4) = (X-2)^3.$

Donc F est trigonalisable et $\text{sp}(F) = \{2\}.$

• $E_2(F) = \ker(F - 2I_3) = \ker \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$

Ainsi $m_g(2) = 2 \neq 3 = m_a(2)$, donc F n'est pas diagonalisable.

• On complète la famille $(w_1, w_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ en une base, à l'aide de $w_3 = e_3.$

$$F \cdot e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1w_1 + 1w_2 + 2w_3$$

Donc dans la base $\underline{w} = (w_1, w_2, w_3)$ l'expression de F est

$$F_{\underline{w}, \underline{w}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D_{\underline{u}, \underline{u}}$$

où $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est la base de l'exercice 41.

• On rappelle (MAX202X) que $P_{\underline{w}}^C F P_{\underline{c}}^W = F_{\underline{w}, \underline{w}} = D_{\underline{u}, \underline{u}} = P_{\underline{u}}^C D P_{\underline{c}}^u,$

où $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique. Donc $F = P_{\underline{e}}^W P_{\underline{y}}^{\underline{e}} D P_{\underline{e}}^u P_{\underline{w}}^{\underline{e}}$.

Ainsi: F et D sont conjuguées par la matrice $P = P_{\underline{e}}^u P_{\underline{w}}^{\underline{e}}$ que nous calculons

maintenant: $\rightarrow$ d'une part $P_{\underline{e}}^u = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ d'autre part $e_1 = w_1 + w_2 + w_3$, $e_2 = w_2 + w_3$ et $e_3 = w_3$

de sorte que $P_{\underline{w}}^{\underline{e}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ conclusion: $P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -4 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

[Remarque: on peut en effet vérifier que $DP = PF$:

$\rightarrow DP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -4 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -12 & -12 & -4 \\ -6 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

$\rightarrow PF = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -4 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -12 & -12 & -4 \\ -6 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad]$

(1) $\Rightarrow$ (3)

χ_f est un polynôme annulateur de f . (c'est le théorème de Cayley-Hamilton)

Donc si χ_f est scindé, alors il existe un polynôme scindé et annulateur de f (c'est χ_f).

(3) $\Rightarrow$ (2)

Soit P un polynôme scindé annulateur de f .

Comme P est annulateur de f , μ_f divise P . (d'après le cours)

Tout polynôme qui divise un polynôme scindé est scindé, donc μ_f est scindé.

(2) $\Rightarrow$ (1) C'est la partie la plus difficile de l'exercice. On propose 2 démonstrations.

1^{ère} démonstration

On choisit une base $\mathcal{B}$ de E et on considère $M \stackrel{\text{def}}{=} M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$.

On suppose que $\mu_f = \mu_M$ est scindé: $\mu_f(x) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(f)} (x - \lambda)^{q(\lambda)}$.

On sait que $\mu_f \mid \chi_f$ et que μ_f et χ_f ont les mêmes racines, donc:

$$\chi_f(x) = \chi_M(x) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(f)} (x - \lambda)^{k(\lambda)} Q(x) \text{ avec } q(\lambda) \leq k(\lambda) \text{ et } Q \text{ unitaire n'ayant aucune racine dans } \mathbb{K}.$$

On considère maintenant $\mathbb{L} \supset \mathbb{K}$ un corps sur lequel Q est scindé, et on regarde M comme une matrice à coefficients dans $\mathbb{L}$. χ_M et μ_M ayant les mêmes racines dans $\mathbb{L}$, Q n'a toujours aucune racine dans $\mathbb{L}$.

Comme Q est unitaire et scindé dans $\mathbb{L}$, $Q = 1$. Ainsi, $\chi_f(x) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(f)} (x - \lambda)^{k(\lambda)}$ est scindé sur $\mathbb{K}$.

2^{ème} démonstration

On suppose que μ_f est scindé: $\mu_f(x) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(f)} (x - \lambda)^{q(\lambda)}$.

D'après le lemme des noyaux, $E = \text{Ker}(0) = \text{Ker}(\mu_f/f) = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \text{Ker}((f - \lambda \text{id}_E)^{q(\lambda)})$.
car $\mu_f/f = 0$ lemme des noyaux

On a vu en cours, comme conséquence du lemme des noyaux emboîtés, que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}((f - \lambda \text{id}_E)^{q(\lambda)})$ est stable par f et de dimension $k(\lambda) = m_\lambda(\lambda)$.

Conséquence: $\chi_f(x) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(f)} (x - \lambda)^{k(\lambda)} Q(x)$, avec Q unitaire.

Or $\deg(\chi_f) = \dim(E) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} k(\lambda)$. Donc Q est de degré 0 et ainsi $Q = 1$.

Ainsi $\chi_f(x) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(f)} (x - \lambda)^{k(\lambda)}$ est scindé.

Exercice 60

(1) Chaque bloc de Jordan étant triangulaire supérieure, la matrice M est triangulaire supérieure.

Donc $\chi_M(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$, où $n = n_1 + n_2 + n_3$ est la taille de M et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les éléments diagonaux de M .

Or, sur la diagonale, on a λ qui apparaît $n_1 + n_2$ fois et μ qui apparaît n_3 fois.

Ainsi, $\chi_M(x) = (x - \lambda)^{n_1 + n_2} (x - \mu)^{n_3}$.

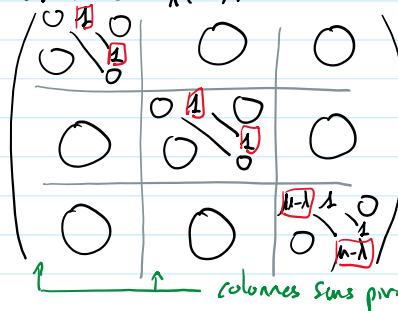
(2) • J_1 est un bloc de Jordan de taille n_1 et de valeur propre λ , donc $(J_1 - \lambda I_{n_1})^{n_1} = 0$ et $(J_1 - \lambda I_{n_1})^{n_1-1} \neq 0$.

• De la même manière $(J_2 - \lambda I_{n_2})^{n_2} = 0$ et $(J_2 - \lambda I_{n_2})^{n_2-1} \neq 0$.

Et $(J_3 - \mu I_3)^3 = 0$ et $(J_3 - \mu I_3)^{3-1} \neq 0$.

• Par conséquent, $\mu_M(x) = (x - \lambda)^{\max(n_1, n_2)} (x - \mu)^{n_3}$.

(3) • Commençons par calculer la dimension de $E_\lambda(M)$.

La matrice $M - \lambda I_n =$  $\leftarrow$ ligne sans pivot est échelonnée et $\leftarrow$ ligne sans pivot

a exactement 2 lignes (et donc 2 colonnes) sans pivot donc $E_\lambda(M)$ est de dimension 2.

De plus, on voit aisément les colonnes $n_1 + 1$ et $n_2 + 1$ sont nulles. Donc $E_\lambda(M) = \text{Vect}(e_1, e_{n_1+1})$.

• Un raisonnement similaire montre que $E_\mu(M) = \text{Vect}(e_{n_1+n_2+1})$.

(4) D'après la question (2), $q(\lambda) = \max(n_1, n_2)$ et $q(\mu) = n_3$.

• $(M - \lambda I_n)^{q(\lambda)} = \begin{pmatrix} J_1^{q(\lambda)} & 0 & 0 \\ 0 & J_2^{q(\lambda)} & 0 \\ 0 & 0 & J_3^{q(\lambda)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} n_1 \\ \} n_2 \\ \} n_3 \end{matrix}$ avec $\mu - \lambda \neq 0$.

Donc $K_\lambda(M) = \text{Ker}((M - \lambda I_n)^{q(\lambda)}) = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_{n_1+n_2})$

• $(M - \mu I_n)^{q(\mu)} = \begin{pmatrix} (\lambda - \mu)^{q(\mu)} & * & \\ 0 & (\lambda - \mu)^{q(\mu)} & \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} n_1+n_2 \\ \} n_3 \end{matrix}$ donc $K_\mu(M) = \text{Ker}((M - \mu I_n)^{q(\mu)}) = \text{Vect}(e_{n_1+n_2+1}, e_n)$

On aurait directement pu observer que, d'après la question (2) et le cours, $\dim(K_\lambda(M)) = k(\lambda) = m_\lambda(\lambda) = n_1 + n_2$ et $\dim(K_\mu(M)) = k(\mu) = m_\mu(\mu) = n_3$.

Exercice 62

Le polynôme caractéristique associé à la relation de récurrence

$$U_{n+3} = U_n - U_{n+1} + U_{n+2} \quad (*)$$

$$\text{est } X^3 - X^2 + X - 1 = (X-1)(X^2+1) = (X-1)(X-i)(X+i).$$

D'après un résultat du cours, l'ensemble des suites **complexes** $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ satisfaisant $(*)$ est l'ensemble des suites de terme général $a1^n + bi^n + c(-i)^n$, avec $a, b, c \in \mathbb{C}$.

$$\text{On calcule : } a1^n + bi^n + c(-i)^n = \begin{cases} a+b+c & \text{si } n \equiv 0[4] \\ a+(b-c)i & \text{si } n \equiv 1[4] \\ a-b-c & \text{si } n \equiv 2[4] \\ a-(b-c)i & \text{si } n \equiv 3[4] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Une telle suite est donc réelle si et seulement si : } & a+b+c \in \mathbb{R} \quad (1) \\ & a+(b-c)i \in \mathbb{R} \quad (2) \\ & a-(b+c)i \in \mathbb{R} \quad (3) \\ & a-(b-c)i \in \mathbb{R} \quad (4) \end{aligned}$$

On observe que : $(1) \& (3) \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \text{ et } b+c \in \mathbb{R}$.

Sachant que $a \in \mathbb{R}$: $(2) \Leftrightarrow (4) \Leftrightarrow b-c \in i\mathbb{R}$

Par conséquent : $(1) \& (2) \& (3) \& (4) \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}, b+c \in \mathbb{R} \text{ et } b-c \in i\mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow a \in \mathbb{R}, b = \bar{c}$.

Conclusion : l'ensemble des suites **réelles** $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ satisfaisant $(*)$

est l'ensemble des suites de terme général $u_n = a + \frac{1}{2}(\beta - \gamma i)i^n + \frac{1}{2}(\beta + \gamma i)(-i)^n$, avec $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &= \begin{cases} a+\beta & \text{si } n \equiv 0[4] \\ a+\gamma & \text{si } n \equiv 1[4] \\ a-\beta & \text{si } n \equiv 2[4] \\ a-\gamma & \text{si } n \equiv 3[4] \end{cases} \\ &= \begin{cases} a+(-1)^k \beta & \text{si } n = 2k \\ a+(-1)^k \gamma & \text{si } n = 2k+1 \end{cases} \end{aligned}$$