Dualité de Van den Bergh et quantification par déformation (d'après V. Dolgushev)

Référence : V. Dolgushev, "The Van den Bergh duality and the modular symmetry of a Poisson variety", arXiv:math/0612288v3

I Quantification par déformation

Soit A_0 une algèbre associative commutative $/k$

Soit A une $k[[\hbar]]$-déformation plate de A_0 comme algèbre associative.

(plate $\Leftrightarrow$ $A \simeq A_0[[\hbar]]$ comme $k[[\hbar]]$-module).

Proposition : A_0 hérite naturellement d'une structure de Poisson définie comme suit :

$\forall a,b \in A_0, \quad \{a,b\} := \overline{\frac{1}{2\hbar}(\tilde{a}\bullet\tilde{b}-\tilde{b}\bullet\tilde{a})} \in A_0$ (où $\tilde{a},\tilde{b}$ sont des relevés de a et b dans A).

À travers $A \simeq A_0[[\hbar]]$, pour $a,b \in A_0$ on a $a\bullet b = ab + \hbar B_1(a,b) + \hbar^2 B_2(a,b) + \cdots$

$\{a,b\} = \frac{1}{2}\left(B_1(a,b) - B_1(b,a)\right)$ On parle de limite semi-classique.

Question : étant donnée une algèbre de Poisson $(A_0, \cdot, \{,\})$, existe-t-il une déformation de $(A_0,\cdot)$ dont la limite semi-classique est précisément $\{,\}$.

Réponse : NON en général (contre-exemple dû à Olivier Mathieu).

OUI si $A = C^\infty(X)$ ou $A = k[X]$ (Maxim Kontsevich).
X variété différentielle — X variété affine lisse

Mieux, dans les deux cas où cela fonctionne, on a des isomorphismes

$$* \quad \underbrace{H^\bullet\left(\Gamma(X,\Lambda TX)[[\hbar]], \hbar[\pi,-]_{SN}\right)}_{\overset{\text{def}}{=}\ HP^\bullet(X,\hbar\pi)} \xrightarrow{\sim} HH^\bullet(A,A)$$

(Kontsevich, Manchon-Torossian) iso d'algèbres

$$* \quad \underbrace{H_\bullet\left(\Omega(X)[[\hbar]], \hbar L_\pi\right)}_{\overset{\text{def}}{=}\ HP_\bullet(X,\hbar\pi)} \xleftarrow{\sim} HH_\bullet(A,A)$$

(Shoikhet) iso d'esp-vect. — (C-Rossi) iso de modules

Exemples :

- $HP^0(X,\hbar\pi) = \left\{ f \in A_0[[\hbar]] \,/\, \forall g \in A_0, \{f,g\}=0 \right\} = ZP(A_0)[[\hbar]]$.
- $HP^1(X,\hbar\pi) = $ Champs de vecteurs de Poisson formels $/$ $\hbar$ (Champs hamiltoniens formels)

En réalité on a une application $\mathcal{D} : \underbrace{\Gamma(X,TX)[[\hbar]] \cap \ker([\hbar\pi,-])}_{\text{Champs de vecteurs de Poisson}} \longrightarrow \mathrm{Der}(A)$ telle que

$$\mathcal{D}_v = v \bmod \hbar \quad \text{et} \quad [\mathcal{D}_v, \mathcal{D}_w] = \mathcal{D}_{[v,w]} + \text{dérivation intérieures.}$$

II Dualité de Van den Bergh

Théorème [Van den Bergh] : Soit A une algèbre finiment engendrée qui est "bimodule-cohérente" (i.e. tout morphisme entre bimodules libres de rang fini a un noyau finiment engendré) et telle que

$$HH^{\bullet}(A, A\otimes A) = \begin{cases} U_A & \text{si } \bullet = d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{pour un bimodule inversible } U_A.$$

Alors pour tout bimodule M, $HH^{\bullet}(A,M) \cong HH_{d-\bullet}(A, U_A \otimes_A M)$.

U_A est appelé "(bi)module dualisant".

exemples : 1) $A_0 = k[X]$, X variété affine lisse. $U_A = \Gamma(X, \Lambda^d T^* X)$.

2) Supposons X est telle que son fibré canonique est trivial. (i.e. $U_A \simeq k[X]$).
Soit A une déformation de $k[X] = A_0$. Les hypothèses du thm. de Van den Bergh restent vérifiées.
De plus, dans ce cas le module dualisant est de la forme $U_A = A\nu$
où $\nu \in \mathrm{Aut}(A)$ est tel que $\nu = \mathrm{id} \bmod \hbar$.

Remarque que ν est défini à automorphisme intérieur près. $\nu = \exp(\mathcal{X})$, où $\mathcal{X} \in \hbar \left(\mathrm{Der}(A)/A\right)$.

Définition : On dit que $\nu \in \mathrm{Out}(A)$ est l'automorphisme modulaire de A.

Version semi-classique

Soit (X,π) une variété de Poisson. Supposons qu'il existe $\omega \in \Gamma(X, \Lambda^d T^* X)$ jamais nulle.

Définition : Un champ de vecteur modulaire est un champ de vecteur $v \in \Gamma(X, TX)$ tel que $i_v(\omega) = L_\pi(\omega)$.

Comme ω est définie à multiplication près par $f \in C^\infty(X)^\times$, alors v est défini à transformation près par $v \longmapsto v - f^{-1}[\pi, f] = v - [\pi, \log(f)]$.

On s'intéresse à la classe modulaire $[v] \in HP^1(X,\pi)$.

Remarque : dans le cas algébrique ($A_0 = k[X]$), $\log(f) \notin k[X]$ mais $[\pi, \log(f)]$ est bien un champ de vecteur sur X. Dans ce cas la classe modulaire $[v]$ vit dans une log-version de HP^1:

$[v] \in$ Champs de Poisson / Champs log-hamiltoniens

Définition : une structure de Poisson π est unimodulaire si $[\gamma]=0$ (sa classe modulaire est nulle).

III Quantification de la classe modulaire

Théorème [Dolgushev] : Si v est un représentant de la classe modulaire de (X,π), où X est une variété affine lisse dont le fibré canonique est trivial, alors l'automorphisme modulaire de A (A étant une quantification) est donné par $\exp(\mathcal{D}_{\hbar v})$ (modulo un automorphisme intérieur).

Corollaire : si π est unimodulaire, alors le bimodule dualisant de la quantification A est A (i.e. l'automorphisme modulaire est l'identité).

Théorème [Dolgushev] : La réciproque est vraie !

IV Conséquences

Plaçons-nous dans le cas unimodulaire, algébrique, et à fibré canonique trivial.

Ici le bimodule dualisant est A lui-même ; ainsi la dualité de Van den Bergh donne un isomorphisme

$$V : HH^\bullet(A,A) \xrightarrow{\sim} HH_{d-\bullet}(A,A).$$

D'un autre côté, Ping Xu a également démontré que dans le cas unimodulaire on a un isomorphisme

$$HP^\bullet(X,\pi) \xrightarrow{\sim} HP_{d-\bullet}(X,\pi)$$

Que l'on peut améliorer en un isomorphisme $HP^\bullet(X,\hbar\pi) \xrightarrow{\sim} HP_{d-\bullet}(X,\hbar\pi)$.

Quel lien entre ces isomorphismes ?

Ginzburg : $V(\gamma_1 \cup \gamma_2) = \gamma_1 \cap V(\gamma_2)$.

Notons $\mathbb{D} = V(1)$ où $1 \in HH^0(A,A) = Z(A)$

Ainsi $V(\gamma) = \gamma \cap \mathbb{D}$.

Rappel : On a des isomorphismes d'algèbres et leurs modules (C-Rossi)

$$\begin{tikzcd} HP^\bullet(X,\hbar\pi) \arrow[r, "F"] & HH^\bullet(A,A) \\ HP_\bullet(X,\hbar\pi) & HH_\bullet(A,A) \arrow[l, "G"] \end{tikzcd}$$

Autrement dit : $i_\gamma(G(c)) = G(F(\gamma) \cap c)$

Finalement on pose $\Delta := G(\mathbb{D}) \in HP_d(X, \hbar\pi)$

On a ainsi
$$\begin{aligned} \Xi : HP^\bullet(X,\hbar\pi) &\longrightarrow HP_{d-\bullet}(X,\hbar\pi) \\ \gamma &\longmapsto i_\gamma \Delta \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
HH^\bullet(A,A) \arrow[r, "\sim", "V"'] & HH_{d-\bullet}(A,A) \arrow[d, "G", "\wr"'] \\
HP^\bullet(X,\hbar\pi) \arrow[u, "F"', "\wr"] \arrow[r, "\sim", "\Xi"'] & HP_{d-\bullet}(X,\pi)
\end{tikzcd}$$

<u>Remarque finale</u> : l'isomorphisme de P. Xu est donné par $\gamma \longmapsto i_\gamma \omega$, où $\omega \in \Gamma(X, \Lambda^d T^*X)$ ne s'annule jamais. D'un autre côté Δ admet un représentant $\omega_\hbar \in \Gamma(X, \Lambda^d T^*X)[[\hbar]]$ dont le premier terme (le terme constant ne s'annule jamais).

Par conséquent $\omega_\hbar = f\omega$, où $f \in \Bbbk[X][[\hbar]]$ est inversible.