COMPARAISON D'INVARIANTS QUANTIQUES (A. Virelizier)

Introduction

Principe général

Présentation combinatoire des variétés de dimension 3 + Donnée algébrique $\rightsquigarrow$ Invariant

Deux exemples principaux

* Chirurgie le long d'entrelacs + $U_q(sl_2)$, $q^n = 1$ $\overset{(90)}{\rightsquigarrow}$ RT_q (Reshetikhin-Turaev)
  (plus généralement $\mathcal{E}$ catégorie modulaire) $\overset{(93)}{\rightsquigarrow}$ $RT_{\mathcal{E}}$ $\rightsquigarrow$ 2+1 TQFT.
* Triangulation + 6j-symboles de $U_q(sl_2)$ $\overset{(91)}{\rightsquigarrow}$ TV_q (Turaev-Viro)
  (plus généralement $\mathcal{E}$ catégorie semi-simple sphérique) $\rightsquigarrow$ $TV_{\mathcal{E}}$

Remarque : si $\mathcal{E}$ est une catégorie modulaire, alors elle est sphérique et semi-simple.

Dans ce cas $TV_{\mathcal{E}}(M) = RT_{\mathcal{E}}(M) \cdot RT_{\mathcal{E}}(\underset{\text{orientation opposée}}{-M}) \underset{\text{si } \mathcal{E} \text{ est hermitienne}}{=} |RT_{\mathcal{E}}(M)|^2$.

Théorème [Müger, 94] : si $\mathcal{E}$ est sphérique semi-simple, alors $Z(\mathcal{E})$ est modulaire.

Conjecture : $TV_{\mathcal{E}}(M) = RT_{Z(\mathcal{E})}(M)$

Conjecture $\Rightarrow$ Remarque (car si $\mathcal{E}$ est modulaire alors $Z(\mathcal{E}) \cong \mathcal{E}^{op} \boxtimes \mathcal{E}$).

Rappel : le centre $Z(\mathcal{E})$ d'une catégorie tensorielle $(\mathcal{E}, \otimes)$ est une catégorie tensorielle tressée ayant pour objets les paires (X, σ) où X est un objet de $\mathcal{E}$ et $\sigma : X \otimes \bullet \longrightarrow \bullet \otimes X$ un demi-tressage.

Schéma de la démonstration de la conjecture

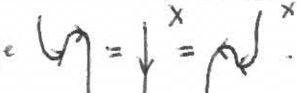
Etape 1 : on étend $TV_{\mathcal{E}}(M)$ en une TQFT $\mathcal{L}$ entre surfaces munies de squelettes et cobordismes munis d'entrelacs coloriés par $Z(\mathcal{E})$. [point clef : définition des 6j-symboles géométriques]

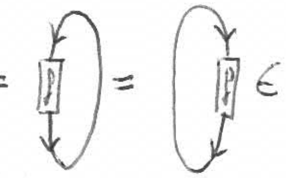
Etape 2 : on exprime $TV_{\mathcal{E}}(M)$ par chirurgie en utilisant la TQFT $\mathcal{L}$, puis on compare à $RT_{Z(\mathcal{E})}(M)$ [point clef : trouver une base de $\mathcal{L}(S^1 \times S^1)$]

6j-symboles géométriques

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie sphérique : $\overset{X}{\cap} = ev_X : X^* \otimes X \to 1$ $\quad \overset{X}{\cap} = \widetilde{ev}_X : X \otimes X^* \to 1$.

$\underset{X}{\cup} = coev_X : 1 \to X \otimes X^*$ $\quad \underset{X}{\cup} = \widetilde{coev}_X : 1 \to X^* \otimes X$.

On a des relations du type  .

On suppose de plus $\mathcal{C}$ k-linéaire et telle que $End_{\mathcal{C}}(1) = k$. Ainsi $tr(f) :=$  $\in k$.

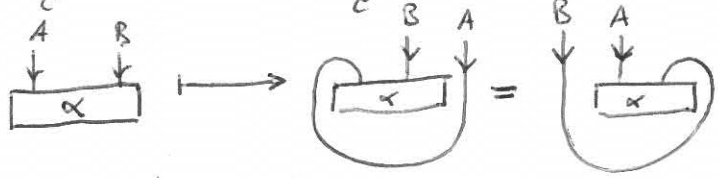
Soit (E, c, ε) la donnée d'un ensemble E cycliquement ordonné, d'une application $c : E \to Obj(\mathcal{C})$ et d'une application $\varepsilon : E \to \{\pm\}$.

Notons $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ avec $e_1 < e_2 < \dots < e_n < e_1$. On définit alors

$$H_{e_i} := Hom_{\mathcal{C}}\left(1, c(e_i)^{\varepsilon(e_i)} \otimes c(e_{i+1})^{\varepsilon(e_i)} \otimes \dots \otimes c(e_{i-1})^{\varepsilon(e_{i-1})}\right).$$

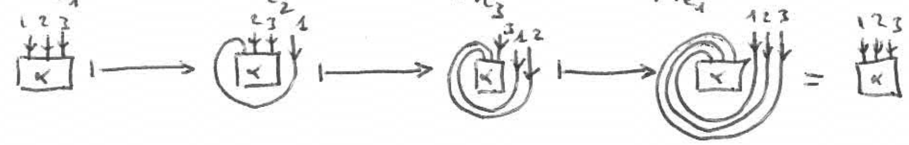
On a des isomorphismes $P_{e_i,e_j} : H_{e_i} \to H_{e_j}$ définis comme $P_{e_i,e_j} = \tau_{A,B}$ avec $A = c(e_i)^{\varepsilon(e_i)} \otimes \dots \otimes c(e_{j-1})^{\varepsilon(e_j)}$ et $B = c(e_j)^{\varepsilon(e_j)} \otimes \dots \otimes c(e_{i-1})^{\varepsilon(e)}$

On rappelle la définition de $\tau_{A,B} : Hom_{\mathcal{C}}(1, A \otimes B) \to Hom_{\mathcal{C}}(1, B \otimes A)$



<u>Remarque</u> : Tous les isomorphismes $H_e \to H_f$ construits comme composées de P_{e_i,e_j}'s sont égaux à $P_{e,f}$ (cette condition de cohérence se démontre aisément à l'aide du calcul graphique). Par exemple :

$$H_{e_1} \xrightarrow{\tau_{1,23}} H_{e_2} \xrightarrow{\tau_{2,31}} H_{e_3} \xrightarrow{\tau_{3,12}} H_{e_1}$$



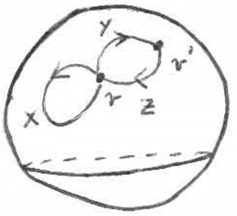
<u>Application</u> : Soit G un graphe orienté dont les arêtes sont coloriées par des objets de $\mathcal{C}$.
Pour tout sommet v de G on note $E_v := \{\tfrac{1}{2}\text{-arêtes issues de } v\}$, c la fonction "couleur", et $\varepsilon : E_v \to \{\pm\}$ l'orientation (+ = "entrant" et − = "sortant").
On note H_v l'espace vectoriel associé (défini à un unique isomorphisme près, d'après la remarque précédente). On définit alors $H(G) := \bigotimes_{v \text{ sommet}} H_v$.

Prenons maintenant un graphe orienté G plongé dans S^2 et choisissons un point $pt \in S^2$. Ainsi $G \subset S^2 \setminus pt \cong \mathbb{R}^2$. On a également un coloriage de G par des objets de $\mathcal{C}$. On définit alors une forme linéaire $F_{\mathcal{C}}(G) \in H(G)^*$ qui associe à tout élément $\bigotimes_{v\text{-sommet}} x_v \in H(G)$ le scalaire donné par la procédure de calcul graphique suivante :

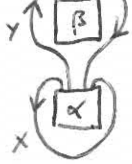
On remplace chaque sommet v du graphe par le morphisme $x_v \in H_v$

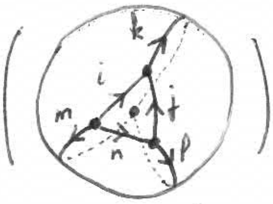
Le résultat obtenu ne dépend que de la classe d'isotopie de G

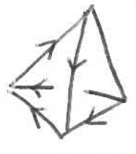
<u>exemple</u> :



$$H(G) = H_v \otimes H_{v'}$$
$$H_v \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathbb{1}, X^* \otimes Y^* \otimes Z \otimes X)$$
$$H_{v'} \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathbb{1}, Y \otimes Z^*)$$

$F_{\mathcal{E}}(G)(\alpha \otimes \beta) =$  $\in \mathrm{End}_{\mathcal{E}}(\mathbb{1}) = \Bbbk$.

<u>Définition</u> [6j-symboles] : $\begin{vmatrix} (i,+) & (j,+) & (k,+) \\ (l,+) & (m,+) & (n,+) \end{vmatrix} := F_{\mathcal{E}}\Bigg($  $\Bigg)$.

Plus généralement, on peut prendre en compte des graphes tressés (par exemple ) colorés par des objets de $Z(\mathcal{E})$ (les ½-tressages apparaissent donc naturellement).

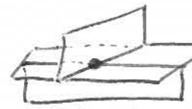
<u>Construction de la TQFT</u>

On suppose $\mathcal{E}$ semi-simple et $I := \{$classes d'isomorphismes d'objets simples$\}$ fini.

A toute paire (Σ, Γ) d'une surface Σ et d'un graphe orienté Γ on associe $\mathcal{L}(\Sigma,\Gamma) = \bigoplus_{c : \{\text{arêtes de } \Gamma\} \to I} \overset{H(\Gamma^c)}{\overset{\shortparallel}{\mathcal{L}(\Sigma, \Gamma^c)}}$.

Soit (M, P) un cobordisme $(\Sigma, \Gamma) \to (\Sigma', \Gamma')$:

M est une variété à bord de dimension 3 telle que $\partial M = (-\Sigma) \amalg \Sigma'$ et P un squelette de M (dual d'une triangulation) de bord $\Gamma^{op} \amalg \Gamma'$.

Localement, un squelette est de la forme  ou  ou 

Il n'y a qu'un nombre fini de points au voisinage duquel le squelette ressemble à la 3^e situation (si on suppose M compacte bien sûr). Si on colore maintenant le squelette avec des objets de $\mathcal{E}$ (ou même $Z(\mathcal{E})$) alors l'intersection du squelette au voisinage d'un tel point avec une sphère donne exactement un 6j-symbole géométrique ! Ainsi on définit

$$\mathcal{L}(M) := \sum_{\substack{\Delta \text{ coloriage} \\ \text{du squelette}}} \overset{\text{facteur de normalisation}}{V} \underset{\text{contraction}}{*} \otimes \underbrace{|\Delta|}_{\text{6j-symbole géométrique}}$$

(on somme sur l'ensemble des points du type 3).