ESPACES DE LACETS ET PARAMÈTRES DE LANGLANDS

D'après Ben Zvi-Nadler (G. Ginot).

Soit G un groupe réductif complexe. On note St la variété de Steinberg, définie ensemblistement comme l'ensemble des triplets (B_1, B_2, g) où B_1 et B_2 sont des sous-groupes de Borel et $g \in B_1 \cap B_2$.

<u>Objectif</u> : on cherche à interpréter le champ $[St/G]$ comme un champ de lacets $L(\mathcal{X})$, et à en déduire une équivalence de catégories dérivées.

<u>Technologie utilisée</u> : les champs dérivés (à la Toën, Lurie, ...).

Champs (supérieurs) : foncteurs Alg.Comm $\longrightarrow$ (∞-)groupoïdes

Champs dérivés : foncteurs s(Alg.Comm) $\longrightarrow$ ∞-groupoïdes.

Dans les champs dérivés "toutes" les opérations sont internes (quotients, produits fibrés, ...). Par exemple :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z} & & \mathcal{X} \\ & \searrow \ \swarrow & \\ & \mathcal{Y} & \end{array} \rightsquigarrow \mathcal{X} \times^h_{\mathcal{Y}} \mathcal{Z}$$

(h = "homotopique"). Si A est une algèbre commutative simpliciale, alors on a un champ dérivé <u>affine</u> $\mathbb{R}spec(A)$.

$$\mathbb{R}spec(A) \times^h_{\mathbb{R}spec(B)} \mathbb{R}spec(C) = \mathbb{R}spec(A \overset{\mathbb{L}}{\underset{B}{\otimes}} C).$$

Si $\mathcal{X}$ est un espace compact, alors $\mathbb{R}Hom(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ est un champ dérivé.

Les lacets d'un champ

On définit $S^1 := [\mathbb{R}/\mathbb{Z}] \cong \underbrace{[*/\mathbb{Z}]}_{= B\mathbb{Z}}$. Pour un champ dérivé $\mathcal{X}$, son champ de lacets est $L\mathcal{X} := \mathbb{R}Hom(S^1, \mathcal{X})$.

Remarquons que $S^1 = \bigcirc = I \coprod_{\bullet \amalg \bullet} \bullet \simeq \bullet \coprod^h_{\bullet \amalg \bullet} \bullet$.

Ainsi $L\mathcal{X} \cong \mathbb{R}Hom(\bullet \coprod^h_{\bullet \amalg \bullet} \bullet, \mathcal{X}) = \mathcal{X} \coprod_{\mathcal{X} \amalg \mathcal{X}} \mathcal{X}$.

<u>exemple</u> : si $\mathcal{X} = \mathbb{R}spec(A)$, alors $L\mathcal{X} \cong \mathbb{R}spec(A \overset{\mathbb{L}}{\underset{A \otimes A}{\otimes}} A) = \mathbb{R}spec(\underline{H_\bullet(A,A)})$

homologie de Hochschild de A à coefficients dans A.

On sait aussi que $S^1 = \bigcirc = I \coprod_{\bullet \amalg \bullet} I$. Ainsi, si $\mathcal{X} = [X_0/X_1]$ pour un groupoïde $X_1 \rightrightarrows X_0$, alors $L\mathcal{X} = \mathbb{R}Hom(I \coprod_{\bullet \amalg \bullet} I, \mathcal{X}) = X_1 \times^h_{X_0 \times X_0} X_1$.

<u>Remarques</u> : 1) le $\times^h$ ne sera pas homotopique ssi le champ $L\mathcal{X}$ n'est pas dérivé.

2) on a une action naturelle de $S^1 = [\bullet/\mathbb{Z}]$ sur $L\mathcal{X}$.

Troncation et champ d'inertie

Essayons de donner un sens à l'expression "n'est pas un champ dérivé".

On a un foncteur "troncation" t : champs dérivés $\longrightarrow$ champs supérieurs qui revient à prendre le π_0 (si $\mathcal{X} : s(\mathrm{Alg.Comm}) \to \infty$-groupoïdes est un champ dérivé, alors $t(\mathcal{X}) := \mathcal{X} \circ \pi_0$).

ATTENTION : prendre le π_0 du groupoïde est une opération différente (i.e. $\pi_0 \circ \mathcal{X}$), qui revient à considérer l'"espace grossier" du champ.

Si A est une algèbre commutative, alors $t\left(\mathbb{R}\mathrm{spec}\left(A \overset{\mathbb{L}}{\underset{A\otimes A}{\otimes}} A\right)\right) = \mathbb{R}\mathrm{spec}(A)$

Plus généralement, $t(L\mathcal{X}) = t(\mathbb{R}\mathrm{Hom}(S^1, \mathcal{X})) = \mathrm{Hom}(S^1, \mathcal{X}) = \mathrm{Hom}([*/\mathbb{Z}], \mathcal{X})$.

Si $\mathcal{X} = [X_0/X_1]$ pour un groupoïde $X_1 \rightrightarrows X_0$, alors une application $[*/\mathbb{Z}] \longrightarrow \mathcal{X}$ est la donnée

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & X_1 \\ \downarrow\downarrow & & \downarrow\downarrow \\ * & \longrightarrow & X_0 \end{array}$$

d'un point $x \in X_0$ et d'un automorphisme $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{X}}(x)$.

On peut voir que deux tels morphismes sont équivalents si ils sont conjugués :

$$(x, \varphi) \sim (y, \psi) \iff \exists\, \alpha : x \xrightarrow{\sim} y \text{ t.q. } \varphi = \alpha^{-1} \circ \psi \circ \alpha .$$

Dans ce cas $t(L\mathcal{X}) = \left[\mathrm{Aut}(X_0)/X_1\right]$ est le champ d'inertie de $X_1 \rightrightarrows X_0$, noté $I\mathcal{X}$.

Proposition : si $\dim(\mathrm{Aut}(X_0)) = \dim(X_1) - \dim(X_0)$, alors $L\mathcal{X} \cong I\mathcal{X}$.

exemple : si $\mathcal{X} = [*/G]$ alors $L\mathcal{X} \cong I\mathcal{X} = [G/G]$ où G agit par conjugaison.

Ici l'action de $S^1 = [*/\mathbb{Z}]$ sur $L\mathcal{X}$ est donnée par

$$\begin{array}{ccccc} n & & (\gamma, g) & & (\gamma, \gamma^n g) \\ \downarrow\downarrow & \times & \downarrow\downarrow & \longmapsto & \downarrow\downarrow \\ * & & (\gamma, g^{-1}\gamma g) & & (\gamma, g^{-1}\gamma g) \end{array}$$

autre exemple : Notons $\mathcal{B} = \{B \mid B \subset G \text{ est un sous-groupe de Borel}\}$ la variété des Borel, et considérons le groupoïde de l'action de G donnée par conjugaisons simultanées. On cherche à décrire le champ des lacets du champ quotient $[\mathcal{B}\times\mathcal{B}/G]$. On a :

$$L\left(\left[\mathcal{B}\times\mathcal{B}/G\right]\right) \cong I\left(\left[\mathcal{B}\times\mathcal{B}/G\right]\right) \cong \left[\left\{(B_1, B_2, g) \mid B_1, B_2 < G \text{ Borel}, g \in B_1 \cap B_2\right\}/G\right]$$

$$= [St/G].$$

Une équivalence de catégories dérivées

Soit $X = \mathrm{spec}(A)$ une variété algébrique affine.

$$\underset{\substack{\circlearrowleft \\ S^1\text{-action}}}{L(X)} \simeq \mathrm{spec}\big(\underset{\circlearrowleft}{H_\bullet(A,A)}\big)$$

S^1-action donnée par la structure de complexe mixte

$$C_n(A,A) \underset{B}{\overset{b}{\rightleftarrows}} C_{n-1}(A,A) \qquad b = \text{différentielle de Hochschild}$$

$$b\circ B + B\circ b = 0. \qquad B = \text{bord de Connes}.$$

D'après H-K-R, $H_\bullet(A,A) \simeq \Omega_A$ et le bord de Connes est envoyé sur la différentielle de de Rham d_{dR}.
De plus il y a une dualité de type Koszul entre (Ω_A, d_{dR}) et $\mathcal{D}_A$ l'algèbre des opérateurs différentiels sur A.
Ainsi on peut espérer avoir une équivalence (d'après G-K-McP)

$$\mathcal{D}\left(\mathrm{Coh}(H_\bullet(A,A))^{S^1}\right)_{Per} \simeq \mathcal{D}(\mathcal{D}\text{-mod}(A)) \underset{\mathbb{C}[u]}{\otimes} \mathbb{C}[u,u^{-1}]$$

D'après Beilinson-Drinfeld, c'est toujours vrai pour un champ à diagonale affine.
Dans le cas où $\mathcal{X} = [X_0/X_1]$ on sait que $\mathcal{X} \simeq (X_0 \leftleftarrows X_1 \Lleftarrow X_1 \times_{X_0} X_1 \cdots)$, par conséquent

$$\mathcal{D}(\mathcal{D}\text{-mod}(\mathcal{X})) \simeq \left(\mathcal{D}(\mathcal{D}\text{-mod}(X_0)) \leftleftarrows \mathcal{D}(\mathcal{D}\text{-mod}(X_1)) \Lleftarrow \cdots\right)$$

Problème = pour $L\mathcal{X}$ cela ne fonctionne pas ; on n'a pas de bonne propriété de descente.
On remplace alors $L\mathcal{X}$ par $\hat{L}\mathcal{X}$, sa complétion formelle le long de $\mathcal{X} \hookrightarrow L\mathcal{X}$.
$\hat{L}\mathcal{X}$ vérifie la propriété de descente.

Par exemple, $\hat{L}([*/G]) \simeq [\hat{G}/G]$.

Proposition : $\mathcal{D}\left(\mathrm{Coh}\left(L([S^1/G])\right)^{S^1}\right)_{Per} \simeq \mathcal{D}\left(\mathcal{D}\text{-mod}\left([\mathcal{B}\times\mathcal{B}/G]\right)\right)_{Per}$

Espace des paramètres de Langlands

On voudrait refaire l'histoire pour les groupes réels. On munit donc G d'une involution η.
On considère alors

$$L\left(\left[\mathcal{B}\times\mathcal{B}/G\rtimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right]\right) \simeq I\left(\left[\mathcal{B}\times\mathcal{B}/G\rtimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right]\right)$$

$$\simeq I\left(\left[\mathcal{B}\times\mathcal{B}/G\right]\right) \amalg \underbrace{(\text{espace des paramètres de Langlands})}_{=\ \{(B,\, g\cdot\eta)\ /\ B \text{ Borel},\ \eta(g)g \in B\}}$$

On peut répéter l'histoire dans cette situation.