

D'après Ben-Zvi-Nadler

(G. Ginot).

Soit G un groupe réductif complexe. On note St la variété de Steinberg, définie ensemblistement comme l'ensemble des triplets (B_1, B_2, g) où B_1 et B_2 sont des sous-groupes de Borel et $g \in B_1 \cap B_2$.

Objectif = on cherche à interpréter le champ $[St/G]$ comme un champ de lacets $L(\mathcal{X})$, et à en déduire une équivalence de catégories dérivées.

Technologie utilisée = les champs dérivés (à la Toën, Lurie, ...).

Champs (supérieurs) : foncteurs $Alg\text{-}Comm \rightarrow (\infty\text{-})\text{groupoïdes}$

Champs dérivés : foncteurs $s(Alg\text{-}Comm) \rightarrow \infty\text{-groupoïdes}$.

Dans les champs dérivés "toutes" les opérations sont internes (quotients, produits fibrés, ...). Par exemple:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z} & \xrightarrow{h} & \mathcal{X} \\ \downarrow y & & \downarrow y \\ \mathcal{Y} & & \mathcal{Y} \end{array} \rightsquigarrow \mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}}^h \mathcal{Z} \quad (h = \text{"homotopique"}).$$

Si A est une algèbre commutative simpliciale, alors on a un champ dérivé affine $\mathbb{R}Spec(A)$.

$$\mathbb{R}Spec(A) \times_{\mathbb{R}Spec(B)}^h \mathbb{R}Spec(C) = \mathbb{R}Spec(A \underset{B}{\underset{\parallel}{\otimes}} C).$$

Si \mathcal{X} est un espace compact, alors $\mathbb{R}Hom(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ est un champ dérivé.

Les lacets d'un champ

On définit $S^1 := [\mathbb{R}/\mathbb{Z}] \cong \underbrace{[\ast/\mathbb{Z}]}_{B\mathbb{Z}}$. Pour un champ dérivé \mathcal{X} , son champ de lacets est $L\mathcal{X} := \mathbb{R}Hom(S^1, \mathcal{X})$.

Remarquons que $S^1 = \mathcal{O} = \mathbb{I} \underset{\mathbb{I}}{\underset{\parallel}{\otimes}} \mathbb{I} \simeq \mathbb{I} \underset{\mathbb{I}}{\underset{\parallel}{\otimes}}^h \mathbb{I}$.

Ainsi $L\mathcal{X} \cong \mathbb{R}Hom(\mathbb{I} \underset{\mathbb{I}}{\underset{\parallel}{\otimes}}^h \mathbb{I}, \mathcal{X}) = \mathcal{X} \underset{\mathcal{X} \underset{\mathcal{X}}{\parallel}}{\underset{\parallel}{\otimes}}^h \mathcal{X}$.

exemple : si $\mathcal{X} = \mathbb{R}Spec(A)$, alors $L\mathcal{X} \cong \mathbb{R}Spec(A \underset{A \otimes A}{\underset{\parallel}{\otimes}} A) = \mathbb{R}Spec(\underbrace{H_0(A, A)})$

homologie de Hochschild de A à coefficients dans A .

On sait aussi que $S^1 = \mathcal{O} = \mathbb{I} \underset{\mathbb{I}}{\underset{\parallel}{\otimes}} \mathbb{I}$. Ainsi, si $\mathcal{X} = [X_0/X_1]$ pour un groupoïde $X_1 \rightrightarrows X_0$, alors $L\mathcal{X} = \mathbb{R}Hom(\mathbb{I} \underset{\mathbb{I}}{\underset{\parallel}{\otimes}} \mathbb{I}, \mathcal{X}) = X_1 \underset{X_0 \times X_0}{\underset{\parallel}{\otimes}}^h X_1$.

Remarque = 1) le \times^h ne sera pas homotopique si le champ $L\mathcal{X}$ n'est pas dérivé.

2) on a une action naturelle de $S^1 = [\ast/\mathbb{Z}]$ sur $L\mathcal{X}$.

Troncation et champ d'inertie

Essayons de donner un sens à l'expression "n'est pas un champ dérivé".

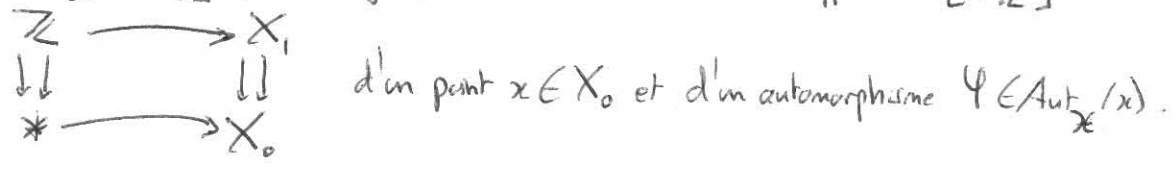
On a un foncteur "troncation" $t: \text{champs dérivés} \rightarrow \text{champs supérieurs}$ qui revient à prendre le π_0 (si $\mathcal{X}: \mathcal{S}(\text{Alg-Comm}) \rightarrow \infty\text{-groupoïdes}$ est un champ dérivé, alors $t(\mathcal{X}) := \mathcal{X} \circ \pi_0$).

ATTENTION = prendre le π_0 du groupoïde est une opération différentielle (i.e. $\pi_0 \circ \mathcal{X}$), qui revient à considérer l'"espace grossier" du champ.

Si A est une algèbre commutative, alors $t(\mathbb{R}_{\text{Spec}}(A \overset{\mathbb{L}}{\otimes} A)) = \mathbb{R}_{\text{Spec}}(A)$

Plus généralement, $t(L\mathcal{X}) = t(\mathbb{R}\text{Hom}(S', \mathcal{X})) = \text{Hom}(S', \mathcal{X}) = \text{Hom}([*/\mathbb{Z}], \mathcal{X})$.

Si $\mathcal{X} = [X_0/X_1]$ pour un groupoïde $X_1 \rightrightarrows X_0$, alors une application $[*/\mathbb{Z}] \rightarrow \mathcal{X}$ est la donnée



On peut voir que deux tels morphismes sont équivalents si ils sont conjugués :

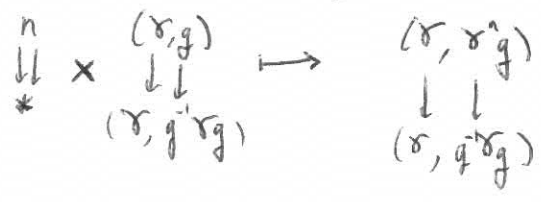
$$(x, \varphi) \sim (y, \psi) \iff \exists \alpha: x \xrightarrow{\sim} y \text{ t.q. } \psi = \alpha \circ \varphi \circ \alpha^{-1}$$

Dans ce cas $t(L\mathcal{X}) = [\text{Aut}(X_0) / X_1]$ est le champ d'inertie de $X_1 \rightrightarrows X_0$, noté $I\mathcal{X}$.

Proposition = si $\dim(\text{Aut}(X_0)) = \dim(X_1) - \dim(X_0)$, alors $L\mathcal{X} \cong I\mathcal{X}$.

exemple = si $\mathcal{X} = [*/G]$ alors $L\mathcal{X} \cong I\mathcal{X} = [G/G]$ où G agit par conjugaison.

Ici l'action de $S' = [*/\mathbb{Z}]$ sur $L\mathcal{X}$ est donnée par



autre exemple = Notons $\mathcal{B} = \{ B \mid B \subset G \text{ est un sous-groupe de Borel} \}$ la variété des Borel, et considérons

le groupoïde de l'action de G donnée par conjugaisons simultanées. On cherche à décrire le champ des bouts du champ quotient $[\mathcal{B} \times \mathcal{B} / G]$. On a:

$$\begin{aligned}
 L([\mathcal{B} \times \mathcal{B} / G]) &\cong I([\mathcal{B} \times \mathcal{B} / G]) \cong [\{ (B_1, B_2, g) \mid B_1, B_2 \subset G \text{ Borel}, g \in B_1 \cap B_2 \} / G] \\
 &= [S^t / G].
 \end{aligned}$$

Une équivalence de catégories dérivées

Soit $X = \text{spec}(A)$ une variété algébrique affine.

$$L(X) \simeq \text{spec}(H_0(A, A))$$

\uparrow
S'-action

\uparrow S'-action donnée par la structure de complexe mixte

$$C_n(A, A) \begin{matrix} \xrightarrow{b} \\ \xleftarrow{B} \end{matrix} C_{n-1}(A, A) \quad \begin{matrix} b = \text{différentiels de Hochschild} \\ B = \text{bord de Connes} \end{matrix}$$

$b \circ B + B \circ b = 0$.

D'après H-K-R, $H_0(A, A) \simeq \Omega_A$ et le bord de Connes est envoyé sur la différentielle de de Rham d_{DR} . De plus il y a une dualité de type Koszul entre $(\Omega_A, d_{\text{DR}})$ et \mathcal{D}_A l'algèbre des opérateurs différentiels sur A . Ainsi on peut espérer avoir une équivalence (d'après G-K-McP)

$$D(\text{Coh}(H_0(A, A))^{S'})_{\text{Per}} \simeq D(\mathcal{D}\text{-mod}(A))_{\text{Per}} \otimes_{\mathbb{C}[u, u^{-1}]}$$

D'après Beilinson-Drinfeld, c'est toujours vrai pour un champ à diagramme affine.

Dans le cas où $\mathcal{X} = [X_0/X_1]$ on sait que $\mathcal{X} \simeq (X_0 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow X_2 \hookrightarrow \dots)$, par conséquent

$$D(\mathcal{D}\text{-mod}(\mathcal{X})) \simeq (D(\mathcal{D}\text{-mod}(X_0)) \hookrightarrow D(\mathcal{D}\text{-mod}(X_1)) \hookrightarrow \dots)$$

Problème = pour $L\mathcal{X}$ cela ne fonctionne pas; on n'a pas de bonne propriété de descente.

On remplace alors $L\mathcal{X}$ par $H\mathcal{X}$, sa complétion formelle le long de $\mathcal{X} \hookrightarrow L\mathcal{X}$.
H \mathcal{X} vérifie la propriété de descente.

Par exemple, $H([*/G]) \simeq [\hat{G}/G]$.

Proposition: $D(\text{Coh}(L([\hat{S}^1/G]))^{S'})_{\text{Per}} \simeq D(\mathcal{D}\text{-mod}([\mathcal{D} \times \mathcal{D}/G]))_{\text{Per}}$

Espace des paramètres de Langlands

On voudrait refaire l'histoire pour les groupes réels. On munit donc G d'une involution σ .

$$L([\mathcal{D} \times \mathcal{D}/G^{\sigma}]_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}) \simeq I([\mathcal{D} \times \mathcal{D}/G^{\sigma}]_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}) \simeq I([\mathcal{D} \times \mathcal{D}/G]) \amalg \underbrace{(\text{espace des paramètres de Langlands})}_{\amalg}$$

On peut répéter l'histoire dans cette situation.

$$\{(B, \sigma) / B \text{ Bord}, \sigma(g)g \in B\}$$