DÉFORMATIONS HOMOGÈNES (P. Polesello)

I Variétés de Jacobi complexes

Définition : [Kirillov-Lichnerowicz] Soit Y une variété complexe. La donnée d'une structure de Jacobi sur Y est la donnée d'un fibré en droites $\mathcal{L}$ et d'un crochet de Lie sur les sections de $\mathcal{L}$ qui est donné par un opérateur bidifférentiel.

Remarque : * l'opérateur bidifférentiel B qui donne le crochet est d'ordre ≤ 1. Autrement dit, localement si on trivialise $\mathcal{L}$ (i.e. $\mathcal{L}(U) \cong \mathcal{O}(U)$) alors $B = \Lambda + \mathrm{Id} \wedge E$ avec $\Lambda \in \Gamma(U, \Lambda^2 TY)$ et $E \in \Gamma(U, TY)$.

* plus précisément, si $\mathcal{L} \overset{loc}{=} \mathcal{O}_Y \cdot \tau$ (avec τ inversible) alors

$$[f,g]\tau = \frac{1}{\tau}[f\tau, g\tau] = \langle \Lambda_\tau, df \wedge dg \rangle + \langle E_\tau, f dg - g df \rangle.$$

* si $\mathcal{L} \overset{loc}{=} \mathcal{O}_Y \cdot \tau'$ alors $\tau' = h\tau$ avec $h \in \mathcal{O}_Y^\times$ et on a

$$\Lambda_{\tau'} = h\Lambda_\tau \text{ et } E_{\tau'} = hE_\tau + [\Lambda_\tau, h] \quad (\rightsquigarrow [\,,\,]_{\tau'} = Ad(h) \circ [\,,\,]_\tau).$$

Poissonification

Notons $\tilde{Y}$ l'espace total du $\mathbb{C}^\times$-fibré principal associé à $\mathcal{L}^{\otimes -1}$. $\tilde{Y} \xrightarrow{\pi} Y$.

$\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(1) \cong \mathcal{L}$. Ainsi $[\,,\,]$ s'étend en un crochet de Poisson sur $\tilde{Y}$, homogène de degré -1.

II Exemples

a) Variétés de contact complexes

Une variété de contact (Y, α) est une variété Y (ici complexe) munie d'une section

$\alpha : Y \longrightarrow \mathbb{P}(T^*Y)$ du cotangent projectif (i.e. une 1-forme projective) qui est

non dégénérée : i.e. $d\alpha|_{\ker(\alpha)}$ non dégénérée ($\Leftrightarrow \dim(Y) = 2n+1$ et $\alpha \wedge (d\alpha)^n$ non dégénérée).

On définit alors $\mathcal{L} := \alpha^*(\underbrace{T^*Y^{\otimes -1}}_{\text{fibré tautologique sur } \mathbb{P}(T^*Y)})$.

On a ainsi des isomorphismes $TY \underset{H = "\alpha^{-1}"}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} \mathcal{L}$.

Cela nous permet de définir le <u>crochet de Lagrange</u> : $\forall s_1, s_2$ sections de $\mathcal{L}$,

$$[s_1, s_2] := \alpha\left(\left[H(s_1), H(s_2)\right]\right).$$

<u>Exemples</u> : * $Y = \mathbb{P}^{2n+1}$, $\alpha = \sum_{i=0}^{n} \left(x_{2i}\, dx_{2i+1} - x_{2i+1}\, dx_{2i}\right)$, $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(2)$.

* $Y = \mathbb{P}(T^*X) \xrightarrow{\alpha = \lambda} \mathbb{P}(T^*(\mathbb{P}(T^*X)))$
$\mathcal{L} = \mathcal{O}(1)$.

* $Y = \mathbb{I}_n$ variétés d'Iwasawa de dimension $2n+1$.

<u>Remarques</u> : les seules variétés de contact projectives sont $\mathbb{P}(T^*X)$ ou Fano.

b) Variétés localement conformément symplectique

(Y, ω) avec ω 2-forme projective ND et fermée

Posons $\mathcal{L} = \omega^*\left(\left(\Lambda^2 T^* Y\right)^{\otimes -1}\right)$. ω induit $\Lambda^2 TY \xrightarrow{\omega} \mathcal{L}$

ω ND $\iff \dim(Y) = 2n$ et $\omega^{\wedge n}$ ND.

ω fermée $\iff \exists \nabla$ connexion plate sur $\mathcal{L}$ telle que $\nabla(\omega) = 0$.

<u>exemples</u> : * $Y = \mathbb{P}^2$ (toute 2-forme projective est fermée)

* variétés de Hopf complexes de dimension paire.

III Quantification (par déformation)

On se donne une variété de Jacobi complexe et on rappelle que $\pi_*\left(\mathcal{O}_{\tilde{Y}}(j)\right) = \mathcal{L}^{\otimes j}$

[On peut donc définir les choses directement en termes de Y et $\mathcal{L}$ ou de manière intrinsèque à partir de $\tilde{Y}$]

Notons $S_Y := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}^{\otimes n}$, qui est une algèbre de Poisson graduée (en étendant le $[,]$ sur $\mathcal{L}$).

On définit $\widehat{S}_Y := \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \left(\prod_{j \leq m} \mathcal{L}^{\otimes j}\right)$ le $\mathbb{C}$-module filtré des symboles formels.

<u>Définition</u> : un $\star$-produit homogène sur $\tilde{Y}$ est un produit $\star$ sur $\widehat{S}_Y$, local, associatif, filtré, tel que $gr(\widehat{S}_Y, \star) = S_Y$.

Un $\star$-produit homogène induit naturellement (en prenant les symboles des commutateurs) un crochet de Poisson sur S_Y, le gradué associé.

<u>Problème</u> : trouver $\star$ tel que le crochet de Poisson obtenu soit celui de départ.

Plus généralement, on cherche des $\star$-algèbres ou des $\star$-algébroïdes t.q. $A \overset{loc}{\cong} (\widehat{S}_Y, \star)$.

Ce problème de déformation est contrôlé par un faisceau de DGLA filtrées

$$\widehat{\mathcal{L}}_{hom} := \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \left(\prod_{j \leq m} \pi_* \mathcal{L}_{poly}\tilde{Y}(j) \right)$$

<u>Conjecture</u> : [formalité homogène] $\widehat{\mathcal{L}}_{hom}$ est quasi-isomorphe à $\widehat{T}_{hom} := \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \left(\prod_{j \leq m} \pi_* T_{poly}\tilde{Y}(j) \right)$

L comme faisceau de DGLA filtrées.

<u>Corollaire de la conjecture</u> : classification + existence de quantifications.

Le problème a été résolu par Kashiwara (76) pour les variétés de contact (pour $Y = P(T^*X)$ c'est Sato-Kawai-Kashiwara en 70). Dans ce cas la classification des $\star$-algébroïdes qui donnent lieu à la forme de contact α est donnée par $H^1(Y, \pi_* \Omega^{1,closed}_{\tilde{Y}}(0))$