Algèbres de factorisation et modèles de réseaux

Damien Calaque

Journée de rentrée I3M

11 octobre 2013

Algèbres de factorisation

Algèbres de factorisation - Définition

Definition

Une **algèbre de factorisation** E sur un espace topologique X consiste en

- pour chaque ouvert $U \subset X$, la donnée d'un espace vectoriel E_U.

Algèbres de factorisation - Définition

Definition

Une **algèbre de factorisation** E sur un espace topologique X consiste en

- pour chaque ouvert $U \subset X$, la donnée d'un espace vectoriel E_U.
- pour chaque inclusion d'ouverts 2 à 2 disjoints $\coprod_{i \in I} U_i \subset V$, la donnée d'une application linéaire $\bigotimes_{i \in I} E_{U_i} \longrightarrow E_V$.

Algèbres de factorisation - Définition

Definition

Une **algèbre de factorisation** E sur un espace topologique X consiste en

- pour chaque ouvert $U \subset X$, la donnée d'un espace vectoriel E_U.
- pour chaque inclusion d'ouverts 2 à 2 disjoints $\coprod_{i \in I} U_i \subset V$, la donnée d'une application linéaire $\bigotimes_{i \in I} E_{U_i} \longrightarrow E_V$.

satisfaisant les propriétés suivantes :

Algèbres de factorisation - Définition

Definition

Une **algèbre de factorisation** E sur un espace topologique X consiste en

- pour chaque ouvert $U \subset X$, la donnée d'un espace vectoriel E_U.
- pour chaque inclusion d'ouverts 2 à 2 disjoints $\coprod_{i \in I} U_i \subset V$, la donnée d'une application linéaire $\bigotimes_{i \in I} E_{U_i} \longrightarrow E_V$.

satisfaisant les propriétés suivantes :

- associativité :

Algèbres de factorisation - Définition

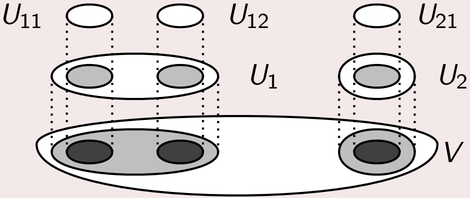
Definition

Une **algèbre de factorisation** E sur un espace topologique X consiste en

- pour chaque ouvert $U \subset X$, la donnée d'un espace vectoriel E_U.
- pour chaque inclusion d'ouverts 2 à 2 disjoints $\coprod_{i\in I} U_i \subset V$, la donnée d'une application linéaire $\bigotimes_{i\in I} E_{U_i} \longrightarrow E_V$.

satisfaisant les propriétés suivantes :

- associativité :



Algèbres de factorisation - Définition

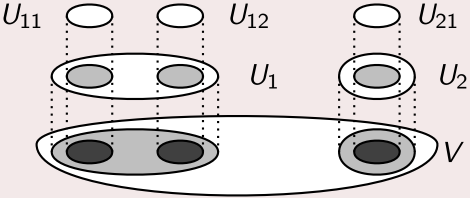
Definition

Une **algèbre de factorisation** E sur un espace topologique X consiste en

- pour chaque ouvert $U \subset X$, la donnée d'un espace vectoriel E_U.
- pour chaque inclusion d'ouverts 2 à 2 disjoints $\coprod_{i \in I} U_i \subset V$, la donnée d'une application linéaire $\bigotimes_{i \in I} E_{U_i} \longrightarrow E_V$.

satisfaisant les propriétés suivantes :

- associativité :



- recollement (on peut reconstruire E_U à partir d'un recouvrement $\mathcal{U}$ de U et de $E_{\mathcal{U}}$).

Algèbres de factorisation - Exemples en dimension 1

Un exemple sur $\mathbb{R}$

A algèbre associative.

Algèbres de factorisation - Exemples en dimension 1

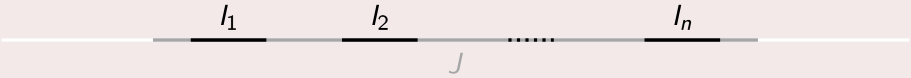
Un exemple sur $\mathbb{R}$

A algèbre associative. Pour tout intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ on pose $A_I := A$.

Algèbres de factorisation - Exemples en dimension 1

Un exemple sur $\mathbb{R}$

A algèbre associative. Pour tout intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ on pose $A_I := A$.
On associe la multiplication $A^{\otimes n} \to A$ à



Algèbres de factorisation - Exemples en dimension 1

Un exemple sur $\mathbb{R}$

A algèbre associative. Pour tout intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ on pose $A_I := A$.
On associe la multiplication $A^{\otimes n} \to A$ à

Cela définit une algèbre de factorisation sur $\mathbb{R}$.

Algèbres de factorisation - Exemples en dimension 1

Un exemple sur $\mathbb{R}$

A algèbre associative. Pour tout intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ on pose $A_I := A$.
On associe la multiplication $A^{\otimes n} \to A$ à

Cela définit une algèbre de factorisation sur $\mathbb{R}$.

Un exemple sur S^1

A algèbre associative.

Algèbres de factorisation - Exemples en dimension 1

Un exemple sur $\mathbb{R}$

A algèbre associative. Pour tout intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ on pose $A_I := A$. On associe la multiplication $A^{\otimes n} \to A$ à

Cela définit une algèbre de factorisation sur $\mathbb{R}$.

Un exemple sur S^1

A algèbre associative. La même construction induit une algèbre de factorisation sur S^1 (définie sur la base constituée des petits intervalles).

Algèbres de factorisation - Exemples en dimension 1

Un exemple sur $\mathbb{R}$

A algèbre associative. Pour tout intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ on pose $A_I := A$.
On associe la multiplication $A^{\otimes n} \to A$ à

Cela définit une algèbre de factorisation sur $\mathbb{R}$.

Un exemple sur S^1

A algèbre associative. La même construction induit une algèbre de factorisation sur S^1 (définie sur la base constituée des petits intervalles).
On peut montrer que $A_{S^1} = A \underset{A \otimes A^{op}}{\otimes} A = A/[A, A]$.

Mécanique quantique topologique

A une algèbre associative (e.g. $A = \mathbf{End}(V)$).

Mécanique quantique topologique

A une algèbre associative (e.g. $A = \mathbf{End}(V)$).

$(\Phi_t)_t$ un groupe à un paramètre d'automorphismes de A ($\Phi_t = e^{-\frac{it}{\hbar}H}$).

Mécanique quantique topologique

A une algèbre associative (e.g. $A = \mathbf{End}(V)$).
$(\Phi_t)_t$ un groupe à un paramètre d'automorphismes de A ($\Phi_t = e^{-\frac{it}{\hbar}H}$).
M_d A-module à droite (e.g. V^*) et $v_{init} \in M_d$.

Mécanique quantique topologique

A une algèbre associative (e.g. $A = \mathbf{End}(V)$).
$(\Phi_t)_t$ un groupe à un paramètre d'automorphismes de A ($\Phi_t = e^{-\frac{it}{\hbar}H}$).
M_d A-module à droite (e.g. V^*) et $v_{init} \in M_d$.
M_g A-module à gauche (e.g. V) et $v_{fin} \in M_g$.

Mécanique quantique topologique

A une algèbre associative (e.g. $A = \mathbf{End}(V)$).
$(\Phi_t)_t$ un groupe à un paramètre d'automorphismes de A ($\Phi_t = e^{-\frac{it}{\hbar}H}$).
M_d A-module à droite (e.g. V^*) et $v_{init} \in M_d$.
M_g A-module à gauche (e.g. V) et $v_{fin} \in M_g$.

Une algèbre de factorisation sur $[0,1]$

On pose $E_{[0,s[} = M_d$, $E_{]t,u[} = A$ et $E_{]v,1]} = M_g$.

Mécanique quantique topologique

A une algèbre associative (e.g. $A = \mathbf{End}(V)$).
$(\Phi_t)_t$ un groupe à un paramètre d'automorphismes de A ($\Phi_t = e^{-\frac{it}{\hbar}H}$).
M_d A-module à droite (e.g. V^*) et $v_{init} \in M_d$.
M_g A-module à gauche (e.g. V) et $v_{fin} \in M_g$.

Une algèbre de factorisation sur $[0,1]$

On pose $E_{[0,s[} = M_d$, $E_{]t,u[} = A$ et $E_{]v,1]} = M_g$.

$t_0 \quad t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad t_4 \quad t_5$

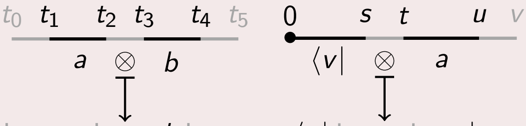
$$a \otimes b \longmapsto \Phi_{t_1 - t_0}\, a\, \Phi_{t_3 - t_2}\, b\, \Phi_{t_5 - t_4}$$

Mécanique quantique topologique

A une algèbre associative (e.g. $A = \mathbf{End}(V)$).
$(\Phi_t)_t$ un groupe à un paramètre d'automorphismes de A ($\Phi_t = e^{-\frac{it}{\hbar}H}$).
M_d A-module à droite (e.g. V^*) et $v_{init} \in M_d$.
M_g A-module à gauche (e.g. V) et $v_{fin} \in M_g$.

Une algèbre de factorisation sur $[0,1]$

On pose $E_{[0,s[} = M_d$, $E_{]t,u[} = A$ et $E_{]v,1]} = M_g$.



$\Phi_{t_1-t_0} a \Phi_{t_3-t_2} b \Phi_{t_5-t_4}$ $\qquad$ $\langle v|\Phi_{t-s} a \Phi_{v-u}|$

Mécanique quantique topologique

A une algèbre associative (e.g. $A = \mathbf{End}(V)$).
$(\Phi_t)_t$ un groupe à un paramètre d'automorphismes de A ($\Phi_t = e^{-\frac{it}{\hbar}H}$).
M_d A-module à droite (e.g. V^*) et $v_{init} \in M_d$.
M_g A-module à gauche (e.g. V) et $v_{fin} \in M_g$.

Une algèbre de factorisation sur $[0,1]$

On pose $E_{[0,s[} = M_d$, $E_{]t,u[} = A$ et $E_{]v,1]} = M_g$.

$t_0 \quad t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad t_4 \quad t_5$ $\qquad$ $0 \quad s \quad t \quad u \quad v$ $\qquad$ $s \quad t \quad u \quad 1$

$$a \otimes b \longmapsto \Phi_{t_1-t_0}\, a\, \Phi_{t_3-t_2}\, b\, \Phi_{t_5-t_4}$$

$$\langle v| \otimes a \longmapsto \langle v|\Phi_{t-s}\, a\, \Phi_{v-u}|$$

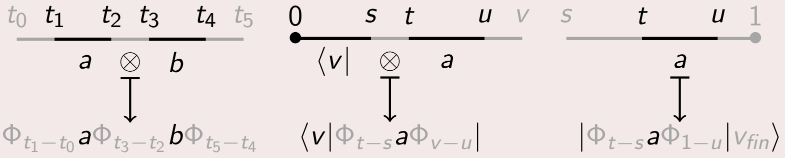
$$a \longmapsto |\Phi_{t-s}\, a\, \Phi_{1-u}|v_{fin}\rangle$$

Mécanique quantique topologique

A une algèbre associative (e.g. $A = \mathbf{End}(V)$).
$(\Phi_t)_t$ un groupe à un paramètre d'automorphismes de A ($\Phi_t = e^{-\frac{it}{\hbar}H}$).
M_d A-module à droite (e.g. V^*) et $v_{init} \in M_d$.
M_g A-module à gauche (e.g. V) et $v_{fin} \in M_g$.

Une algèbre de factorisation sur $[0,1]$

On pose $E_{[0,s[} = M_d$, $E_{]t,u[} = A$ et $E_{]v,1]} = M_g$.



On peut montrer que $E_{[0,1]} = M_d \underset{A}{\otimes} M_g$ ($\mathbb{C}$ dans l'exemple).

Mécanique quantique topologique

A une algèbre associative (e.g. $A = \mathbf{End}(V)$).
$(\Phi_t)_t$ un groupe à un paramètre d'automorphismes de A ($\Phi_t = e^{-\frac{it}{\hbar}H}$).
M_d A-module à droite (e.g. V^*) et $v_{init} \in M_d$.
M_g A-module à gauche (e.g. V) et $v_{fin} \in M_g$.

Une algèbre de factorisation sur $[0, 1]$

On pose $E_{[0,s[} = M_d$, $E_{]t,u[} = A$ et $E_{]v,1]} = M_g$.

t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 t_5

$$a \otimes b \longmapsto \Phi_{t_1-t_0} a \Phi_{t_3-t_2} b \Phi_{t_5-t_4}$$

0 s t u v

$$\langle v| \otimes a \longmapsto \langle v|\Phi_{t-s} a \Phi_{v-u}|$$

s t u 1

$$a \longmapsto |\Phi_{t-s} a \Phi_{1-u}|v_{fin}\rangle$$

On peut montrer que $E_{[0,1]} = M_d \underset{A}{\otimes} M_g$ ($\mathbb{C}$ dans l'exemple). On interprète

0 s t 1

$$a \longmapsto \langle v_{init}|\Phi_s a \Phi_{1-t}|v_{fin}\rangle$$ comme une amplitude de probabilité.

Modèles de Réseaux

Modèles à sommets (dimension 1)

$V = \oplus_i \mathbf{k} e_i$ espace vectoriel d'états.

Modèles à sommets (dimension 1)

$V = \oplus_i \mathbf{k} e_i$ espace vectoriel d'états.

$R \in GL(V)$ matrice d'interactions : $R_i^j = \exp\left(-\frac{1}{kT}\epsilon_i^j\right)$

Modèles à sommets (dimension 1)

$V = \oplus_i \mathbf{k} e_i$ espace vectoriel d'états.

$R \in GL(V)$ matrice d'interactions : $R_i^j = \exp\left(-\frac{1}{kT}\epsilon_i^j\right)$

Calcul d'une somme d'états = multiplication matricielle

Modèles à sommets (dimension 1)

$V = \bigoplus_i \mathbf{k} e_i$ espace vectoriel d'états.

$R \in GL(V)$ matrice d'interactions : $R_i^j = \exp\left(-\frac{1}{kT}\epsilon_i^j\right)$

Calcul d'une somme d'états = multiplication matricielle

Exemple

$\longmapsto (R^4)_i^j = R_i^k R_k^l R_l^m R_m^j$

Modèles à sommets (dimension 1)

$V = \oplus_i \mathbf{k} e_i$ espace vectoriel d'états.

$R \in GL(V)$ matrice d'interactions : $R_i^j = \exp\left(-\frac{1}{kT}\epsilon_i^j\right)$

Calcul d'une somme d'états $=$ multiplication matricielle

Exemple

$\longmapsto (R^4)_i^j = R_i^k R_k^l R_l^m R_m^j$

Une algèbre de factorisation sur $\mathbb{R}$

On pose $E_I = \mathbf{End}(V)$ pour tout intervalle ouvert I. Ensuite:

Modèles à sommets (dimension 1)

$V = \bigoplus_i \mathbf{k} e_i$ espace vectoriel d'états.

$R \in GL(V)$ matrice d'interactions : $R_i^j = \exp\left(-\frac{1}{kT}\epsilon_i^j\right)$

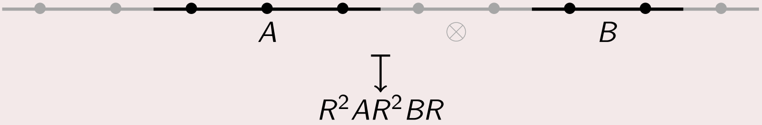
Calcul d'une somme d'états = multiplication matricielle

Exemple

$\longmapsto (R^4)_i^j = R_i^k R_k^l R_l^m R_m^j$

Une algèbre de factorisation sur $\mathbb{R}$

On pose $E_I = \mathbf{End}(V)$ pour tout intervalle ouvert I. Ensuite:



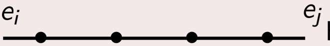
Modèles à sommets (dimension 1)

$V = \oplus_i \mathbf{k} e_i$ espace vectoriel d'états.

$R \in GL(V)$ matrice d'interactions : $R_i^j = \exp\left(-\frac{1}{kT}\epsilon_i^j\right)$

Calcul d'une somme d'états = multiplication matricielle

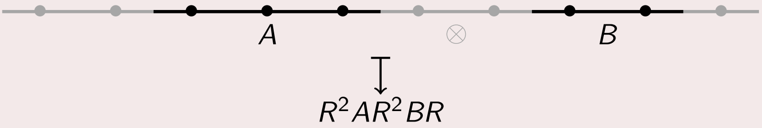
Exemple



$\longmapsto (R^4)_i^j = R_i^k R_k^l R_l^m R_m^j$

Une algèbre de factorisation sur $\mathbb{R}$

On pose $E_I = \mathbf{End}(V)$ pour tout intervalle ouvert I. Ensuite:



Cette algèbre de factorisation est localement constante : pour tout $I \subset J$, $E_I \to E_J$ est un isomorphisme.

Modèles à sommets (dimension 2 et plus)

V et H espaces d'états (verticaux et horizontaux).

Modèles à sommets (dimension 2 et plus)

V et H espaces d'états (verticaux et horizontaux).
$R \in GL(V \otimes H)$ matrice d'interactions : $R_{ik}^{jl} = \exp\left(-\frac{1}{kT}\epsilon_{ik}^{jl}\right)$

Modèles à sommets (dimension 2 et plus)

V et H espaces d'états (verticaux et horizontaux).
$R \in GL(V \otimes H)$ matrice d'interactions : $R_{ik}^{jl} = \exp\left(-\frac{1}{kT}\epsilon_{ik}^{jl}\right)$
Calcul d'une somme d'états = calcul tensoriel

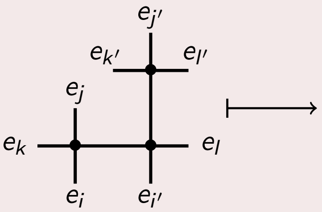
Modèles à sommets (dimension 2 et plus)

V et H espaces d'états (verticaux et horizontaux).

$R \in GL(V \otimes H)$ matrice d'interactions : $R_{ik}^{jl} = \exp\left(-\frac{1}{kT}\epsilon_{ik}^{jl}\right)$

Calcul d'une somme d'états = calcul tensoriel

Exemple



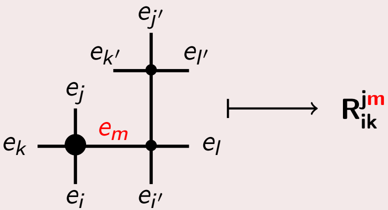
Modèles à sommets (dimension 2 et plus)

V et H espaces d'états (verticaux et horizontaux).

$R \in GL(V \otimes H)$ matrice d'interactions : $R_{ik}^{jl} = \exp\left(-\frac{1}{kT}\epsilon_{ik}^{jl}\right)$

Calcul d'une somme d'états = calcul tensoriel

Exemple



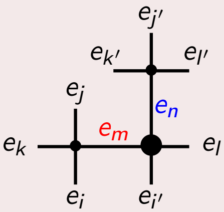
Modèles à sommets (dimension 2 et plus)

V et H espaces d'états (verticaux et horizontaux).

$R \in GL(V \otimes H)$ matrice d'interactions : $R_{ik}^{jl} = \exp\left(-\frac{1}{kT}\epsilon_{ik}^{jl}\right)$

Calcul d'une somme d'états = calcul tensoriel

Exemple



$\longmapsto \quad R_{ik}^{jm}\mathbf{R}_{\mathbf{i'm}}^{\mathbf{nl}}$

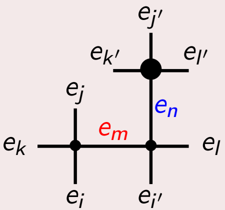
Modèles à sommets (dimension 2 et plus)

V et H espaces d'états (verticaux et horizontaux).

$R \in GL(V \otimes H)$ matrice d'interactions : $R_{ik}^{jl} = \exp\left(-\frac{1}{kT}\epsilon_{ik}^{jl}\right)$

Calcul d'une somme d'états = calcul tensoriel

Exemple



$$\longmapsto \quad R_{ik}^{jm} R_{i'm}^{nl} \mathbf{R}_{\mathbf{nk'}}^{\mathbf{j'l'}}$$

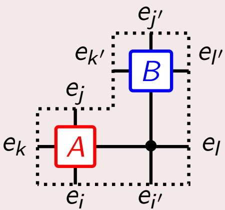
Modèles à sommets (dimension 2 et plus)

V et H espaces d'états (verticaux et horizontaux).

$R \in GL(V \otimes H)$ matrice d'interactions : $R_{ik}^{jl} = \exp\left(-\frac{1}{kT}\epsilon_{ik}^{jl}\right)$

Calcul d'une somme d'états = calcul tensoriel

Algèbre de factorisation sur $\mathbb{R}^2$



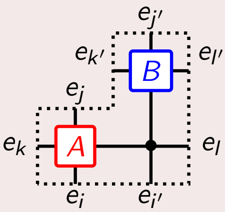
Modèles à sommets (dimension 2 et plus)

V et H espaces d'états (verticaux et horizontaux).

$R \in GL(V \otimes H)$ matrice d'interactions : $R_{ik}^{jl} = \exp\left(-\frac{1}{kT}\epsilon_{ik}^{jl}\right)$

Calcul d'une somme d'états $=$ calcul tensoriel

Algèbre de factorisation sur $\mathbb{R}^2$



$\longmapsto$ $\quad A \otimes B \mapsto \left(A_{ik}^{jm} R_{i'm}^{nl} B_{nk'}^{j'l'}\right)_{ii'kk'}^{jj'll'}$

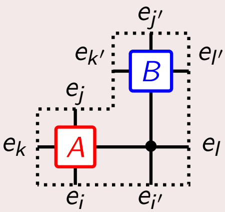
Modèles à sommets (dimension 2 et plus)

V et H espaces d'états (verticaux et horizontaux).

$R \in GL(V \otimes H)$ matrice d'interactions : $R_{ik}^{jl} = \exp\left(-\frac{1}{kT}\epsilon_{ik}^{jl}\right)$

Calcul d'une somme d'états = calcul tensoriel

Algèbre de factorisation sur $\mathbb{R}^2$



$$\longmapsto \quad A \otimes B \mapsto \left(A_{ik}^{jm} R_{i'm}^{nl} B_{nk'}^{j'l'} \right)_{ii'kk'}^{jj'll'}$$

Cette algèbre de factorisation n'est pas localement constante.

Une conjecture de Kontsevich

$E_{\mathbb{R}^2}$ possède une action de $\mathbb{Z}^2$.

Une conjecture de Kontsevich

$E_{\mathbb{R}^2}$ possède une action de $\mathbb{Z}^2$.

Conjecture (Kontesvich)

$C^*(\mathbb{Z}^2, E_{\mathbb{R}^2})$ possède une action naturelle de l'opérade des petits disques.

Une conjecture de Kontsevich

$E_{\mathbb{R}^2}$ possède une action de $\mathbb{Z}^2$.

Conjecture (Kontesvich)

$C^*(\mathbb{Z}^2, E_{\mathbb{R}^2})$ possède une action naturelle de l'opérade des petits disques.

Stratégie (avec Giovanni Felder)

1. Construire une algèbre de factorisation F telle que $F_{\mathbb{R}^2} = C^*(\mathbb{Z}^2, E_{\mathbb{R}^2})$ qui soit localement constante *"à partir d'une certaine échelle"*.

Une conjecture de Kontsevich

$E_{\mathbb{R}^2}$ possède une action de $\mathbb{Z}^2$.

Conjecture (Kontesvich)

$C^*(\mathbb{Z}^2, E_{\mathbb{R}^2})$ possède une action naturelle de l'opérade des petits disques.

Stratégie (avec Giovanni Felder)

1. Construire une algèbre de factorisation F telle que $F_{\mathbb{R}^2} = C^*(\mathbb{Z}^2, E_{\mathbb{R}^2})$ qui soit localement constante *"à partir d'une certaine échelle"*.
2. On peut montrer que les algèbres de factorisation qui sont localement constantes à partir d'une certaine échelle donnent lieu à des algèbres de factorisation localement constantes.

Une conjecture de Kontsevich

$E_{\mathbb{R}^2}$ possède une action de $\mathbb{Z}^2$.

Conjecture (Kontesvich)

$C^*(\mathbb{Z}^2, E_{\mathbb{R}^2})$ possède une action naturelle de l'opérade des petits disques.

Stratégie (avec Giovanni Felder)

1. Construire une algèbre de factorisation F telle que $F_{\mathbb{R}^2} = C^*(\mathbb{Z}^2, E_{\mathbb{R}^2})$ qui soit localement constante *"à partir d'une certaine échelle"*.
2. On peut montrer que les algèbres de factorisation qui sont localement constantes à partir d'une certaine échelle donnent lieu à des algèbres de factorisation localement constantes. On "oublie" ce qui se passe à petite échelle et on le remplace par un *rescaling* de ce qui se passe à grande échelle.

Une conjecture de Kontsevich

$E_{\mathbb{R}^2}$ possède une action de $\mathbb{Z}^2$.

Conjecture (Kontesvich)

$C^*(\mathbb{Z}^2, E_{\mathbb{R}^2})$ possède une action naturelle de l'opérade des petits disques.

Stratégie (avec Giovanni Felder)

1. Construire une algèbre de factorisation F telle que $F_{\mathbb{R}^2} = C^*(\mathbb{Z}^2, E_{\mathbb{R}^2})$ qui soit localement constante *"à partir d'une certaine échelle"*.
2. On peut montrer que les algèbres de factorisation qui sont localement constantes à partir d'une certaine échelle donnent lieu à des algèbres de factorisation localement constantes. On "oublie" ce qui se passe à petite échelle et on le remplace par un *rescaling* de ce qui se passe à grande échelle.

On espère pouvoir dire des choses sur des modèles particuliers comme la percolation ou le modèles d'Ising...

Une conjecture de Kontsevich

$E_{\mathbb{R}^2}$ possède une action de $\mathbb{Z}^2$.

Conjecture (Kontesvich)

$C^*(\mathbb{Z}^2, E_{\mathbb{R}^2})$ possède une action naturelle de l'opérade des petits disques.

Stratégie (avec Giovanni Felder)

1. Construire une algèbre de factorisation F telle que $F_{\mathbb{R}^2} = C^*(\mathbb{Z}^2, E_{\mathbb{R}^2})$ qui soit localement constante *"à partir d'une certaine échelle"*.
2. On peut montrer que les algèbres de factorisation qui sont localement constantes à partir d'une certaine échelle donnent lieu à des algèbres de factorisation localement constantes. On "oublie" ce qui se passe à petite échelle et on le remplace par un *rescaling* de ce qui se passe à grande échelle.

On espère pouvoir dire des choses sur des modèles particuliers comme la percolation ou le modèles d'Ising... mais on en est loin.

MeRcI pOuR vOtRe AtTeNtIoN !