EQUATIONS DE KZB UNIVERSELLES, TRESSES SUR LE TORE, ET ALGÈBRES DE CHEREDNIK

- travail en commun avec B. Enriquez & P. Etingof
- preprint math/0702670 (arXiv)

I Connexions plates, espaces de configuration, et formalité

- la connexion KZ universelle de Drinfeld.
- la connexion KZB universelle.
- formalité du groupe des tresses pures sur le tore.

II Réalisations et représentations

- pourquoi "universelle" ? (réalisations).
- un isomorphisme entre l'algèbre de Hecke affine double et l'algèbre de Cherednik.
- théorie des représentations

III Et après...

invariance modulaire, polylogs elliptiques, structures de niveau, genre supérieur...

La connexion KZ universelle de Drinfeld

→ t_n est l'algèbre de Lie ayant pour générateurs : t_{ij} $(1 \leq i \neq j \leq n)$

et pour relations : $t_{ij} = t_{ji}$, $[t_{ij}, t_{kl}] = 0$ $(\#\{i,j,k,l\} = 4)$,

$[t_{ij}, t_{ik} + t_{kj}] = 0$ $(\#\{i,j,k\} = 3)$.

→ on considère le $\exp(\hat{t}_n)$-fibré principal trivial $\mathcal{P} = X_n \times \exp(\hat{t}_n) \downarrow X_n$

sur l'espace de configurations $X_n := \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \,/\, \forall i \neq j,\ z_i \neq z_j\}$

de n points dans le plan.

→ la connexion de Knizhnik-Zamolodchikov est définie comme suit :

$$\boxed{\nabla_{KZ} = d - \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j \neq i} \frac{t_{ij}}{z_i - z_j} \Big) dz_i}$$

Proposition : ∇_{KZ} est une connexion plate : $\nabla_{KZ}^2 = 0$

On en déduit une représentation de monodromie du groupe des tresses pures à n brins : $\rho : PB_n := \pi_1(X_n, \bullet) \longrightarrow \exp(\hat{t}_n)$

$$\rightsquigarrow \mathrm{Lie}(PB_n) \xrightarrow{\mathrm{Lie}(\rho)} \hat{t}_n$$

Proposition : $\mathrm{Lie}(\rho)$ est un isomorphisme.

La connexion de KZB universelle

Objectif : remplacer $\mathbb{C}$ par une courbe elliptique $E_\tau = \mathbb{C}/_{\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}}$

→ l'algèbre de Lie est l'algèbre $t_{1,n}$ engendrée par $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ avec les relations : $[x_i, x_j] = 0 = [y_i, y_j]$ $(\forall i,j)$, $[x_i, y_j] = [x_j, y_i]$ $(i \neq j)$,

$$\Big[\sum_{j=1}^n x_j, y_i\Big] = 0 = \Big[\sum_{j=1}^n y_j, x_i\Big] \quad (\forall i),$$

$$[x_i, [x_j, y_k]] = 0 = [y_i, [y_j, y_k]] \quad (\#\{i,j,k\} = 3).$$

(variante : $\bar{t}_{1,n} := t_{1,n} / \langle \sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n y_i \rangle$)

→ le fibré principal $\mathcal{P}$ sur l'espace de configurations

$X_{\tau,n} := \{(u_1, \dots, u_n) \in E_\tau^n / \forall i \neq j,\ u_i \neq u_j\}$ est caractérisé par ses sections :

$f : \mathbb{C}^n \supset U \longrightarrow \exp(\hat{t}_{1,n})$ holomorphes telles que

$$f(z_1, \dots, z_j + 1, \dots, z_n) = f(z_1, \dots, z_n) \quad \text{et} \quad f(z_1, \dots, z_j + \tau, \dots, z_n) = e^{-2\pi i x_j} f(z_1, \dots, z_n).$$

(variante : $\bar{X}_{\tau,n} := X_{\tau,n} /_{(E_\tau)^{\mathrm{diag}}}$ et $\bar{\mathcal{P}} \downarrow \bar{X}_{\tau,n}$)

→ On définit $k(z,x) = \dfrac{\theta(z+x)}{\theta(z)\,\theta(x)} - \dfrac{1}{x} \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C} - (\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}))[[x]]$.

(normalisation : $\theta'(0) = 1$)

Puis $K_{ij}(z) := k(z, \mathrm{ad}(x_i))([x_i, y_j])$, et enfin

$$K_i(z_1, \dots, z_n) := -y_i + \sum_{j \neq i} K_{ij}(z_i - z_j)$$

→ La connection de Knizhnik-Zamolodchikov-Bernard est donnée par :

$$\boxed{\nabla_{KZB} = d - \sum_{i=1}^n K_i\, dz_i}$$

<u>Théorème</u> (C-Enriquez-Etingof) : la connexion ∇_{KZB} est plate.

On en déduit une représentation de monodromie du groupe des tresses pures à n brins sur le tore : $\rho_\tau : PB_{1,n} := \pi_1(X_{\tau,n},\cdot) \longrightarrow \exp(\hat{\mathfrak{t}}_{1,n})$.

$$\rightsquigarrow \mathrm{Lie}(\rho_\tau) : \mathrm{Lie}(PB_{1,n}) \xrightarrow{\mathrm{Lie}(\rho_\tau)} \hat{\mathfrak{t}}_{1,n}$$

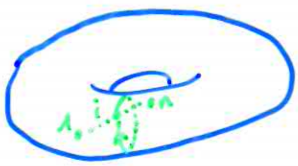
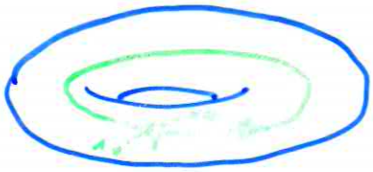
<u>Théorème</u> (C-Enriquez-Etingof) : $\mathrm{Lie}(\rho_\tau)$ est un isomorphisme.

<u>Idée de la démonstration</u> : on montre que le gradué associé est un iso.

Pour cela on construit un morphisme surjectif :

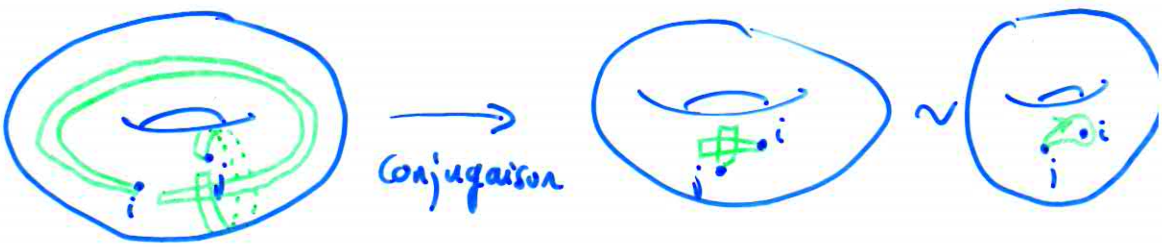
$$\begin{tikzcd} \mathfrak{t}_{1,n} \arrow[r, two heads] \arrow[rr, dashed, bend left, "\text{iso}"] & \mathrm{gr}(\mathrm{Lie}(PB_{1,n})) \arrow[r, "\mathrm{gr}(\mathrm{Lie}(\rho_\tau))"] & \mathfrak{t}_{1,n} \end{tikzcd}$$

$$X_i \longmapsto \sigma(A_i)$$
$$Y_i \longmapsto \sigma(B_i)$$

σ = symbole ; $A_i =$  ; $B_i =$ 

Il faut vérifier que les relations de $\mathfrak{t}_{1,n}$ sont préservées par $X_i \mapsto \sigma(A_i)$, $Y_i \mapsto \sigma(B_i)$.

$(A_i, B_j) =$ 

$(A_j, B_i) =$ 

<u>Variante</u> : l'isomorphisme $\mathrm{Lie}(PB_{1,n}) \xrightarrow{\sim} \hat{t}_{1,n}$ descend en un isomorphisme $\mathrm{Lie}(\overline{PB}_{1,n}) \xrightarrow{\sim} \hat{\bar{t}}_{1,n}$, où
$\overline{PB}_{1,n} := \pi_1(\overline{X}_{\mathcal{E},n}, \bullet)$

Réalisations

$\mathfrak{g}$ algèbre de Lie, $t_{\mathfrak{g}} \in S^2(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \rightsquigarrow (a,b) \mapsto \langle a,b\rangle$ forme bilinéaire invariante.

→ $D(\mathfrak{g})$ = algèbre des opérateurs différentiels algébriques sur $\mathfrak{g}$.

générateurs : $x_a, \partial_a \ (a \in \mathfrak{g})$

relations : $[x_a, x_b] = 0 = [\partial_a, \partial_b]$ et $[\partial_a, x_b] = \langle a,b\rangle$.

→ Notation : $t_{\mathfrak{g}} = \sum_\alpha e_\alpha \otimes e_\alpha$

On a une application moment quantique
$$\mu : \mathfrak{g} \longrightarrow D(\mathfrak{g})$$
$$a \longmapsto \sum_\alpha x_{[a,e_\alpha]} \partial_{e_\alpha}$$

D'où l'on déduit un morphisme
$$\mathfrak{g} \longrightarrow A_n := D(\mathfrak{g}) \otimes U\mathfrak{g}^{\otimes n}$$
$$a \longmapsto \mu(a) \otimes 1 + 1 \otimes \sum_{i=1}^{n} a^{(i)} =: Y_a$$

→ réduction quantique : on a une algèbre de Hecke $\mathcal{H}_n(\mathfrak{g}) := A_n /\!\!/ \mathfrak{g}$

i.e. $\mathcal{H}_n(\mathfrak{g}) := N(A_n \cdot \mathfrak{g}) / A_n \cdot \mathfrak{g}$.

<u>Proposition</u> (C-Enriquez-Etingof) : $x_i \longmapsto \sum_\alpha x_{e_\alpha} \otimes e_\alpha^{(i)}$;
$y_i \longmapsto -\sum_\alpha \partial_{e_\alpha} \otimes e_\alpha^{(i)}$ définit un morphisme d'algèbres de Lie
$$t_{1,n} \longrightarrow \mathcal{H}_n(\mathfrak{g})$$

Algèbres de Hecke affine double et de Cherednik

→ L'algèbre de Cherednik rationnelle $H_n(k)$ (de type A_{n-1} et niveau $k \in \mathbb{C}$) est le quotient de $\mathbb{C}[S_n] \ltimes \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \rangle$ par les relations $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 = \sum_{i=1}^{n} y_i$, $[x_i, x_j] = 0 = [y_i, y_j]$,

$$[x_i, y_j] = \frac{1}{n} - k(ij). \quad (i \neq j)$$

<u>Proposition</u> : $\forall a, b \in \mathbb{C}$, on a un morphisme d'algèbres de Lie

$$\xi_{a,b} : \bar{t}_{1,n} \longrightarrow H_n(k)$$
$$x_i \longmapsto a x_i$$
$$y_i \longmapsto b y_i$$

→ L'algèbre de Hecke affine double $H_n(q,t)$ (de type A_{n-1}) est le quotient de l'algèbre du groupe $\bar{B}_{1,n} := \pi_1^{\text{orbifold}}(X_{\tau,n}/S_n)$ par

$$\boxed{(T - q^{-1}t)(T + q^{-1}t^{-1}) = 0}$$

où T est n'importe quel "petit lacet" autour du diviseur (dans le sens des aiguilles d'une montre).

→ Pour V une représentation de $H_n(k)$ et pour a, b paramètres formels, la représentation de monodromie et le morphisme $\xi_{a,b}$ induisent une représentation de $H_n(q,t)$ sur V pour $q = e^{-2i\pi ab/n}$ et $t = e^{-2ik\pi ab}$

En prenant $a = b$ et $V = H_n(k)$ on obtient un isomorphisme

$$H_n(q,t) \xrightarrow{\sim} H_n(k)[[a]][a^{-1}].$$

Théorie des représentations

$\rightarrow$ Soit $N | n$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_N(\mathbb{C})$ et $V_N = \left(S\mathfrak{g} \otimes (\mathbb{C}^N)^{\otimes n}\right)^{\mathfrak{g}}$

On a une représentation :

$$\begin{tikzcd} U(\bar{\mathfrak{t}}_{1,n}) \rtimes S_n \arrow[r] \arrow[dr] & H_n(\mathfrak{g}) \rtimes S_n \arrow[r] & \mathrm{End}(V_N) \\ & H_n(N/n) \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

La première application se factorise et V_N devient un $H_n(N/n)$-module.

$H_n(N/n) \longrightarrow H_n(\mathfrak{g}) \rtimes S_n$ est donnée par :

$$\sigma \in S_n \longmapsto \sigma \ ; \quad x_i \longmapsto \sum_\alpha x_{e_\alpha} \otimes e_\alpha^{(i)} \ ; \quad y_i \longmapsto \frac{N}{n} \sum_\alpha \partial_{e_\alpha} \otimes e_\alpha^{(i)}$$

où $(e_\alpha)_\alpha$ est une base orthonormée pour $\langle x, y \rangle = \mathrm{tr}(xy)$.

$\rightarrow$ On a un théorème de PBW : $H_n(k) \simeq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \otimes \mathbb{C}[S_n] \otimes \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]$

comme e.-v.

$\rightsquigarrow$ $\forall \pi \in \mathrm{Rep}(S_n)$, on a un module de plus bas poids $L(\pi)$ de poids π.

<u>Théorème</u> (C-Enriquez-Etingof) : $V_N \simeq L\Big(\underbrace{\boxplus}_{n/N} \Big\} N\Big)$

$\rightarrow$ $\forall \mu$ partition : $V(\mu) \in \mathrm{Rep}(\mathfrak{g})$ et $\pi(\mu) \in \mathrm{Rep}(S_n)$.

$F^\bullet(V(\mu)[0])$ filtration principale $\rightsquigarrow$ $P_\mu(q) = \sum_{j \geq 0} \dim\left(F^j / F^{j-1}\right) q^j$.

<u>Proposition</u> :

$$\mathrm{Tr}\big|_{L(\boxplus)}(w \cdot q^h) = q^{(N^2-1)} \frac{\sum_\mu \chi_{\pi(\mu)} P_\mu(q)}{(1-q^2) \cdots (1-q^N)}$$

où $w \in S_n$, $\chi_{\pi(\mu)}$ est le caractère de $\pi(\mu)$, la "$\sum$" est sur les partitions de n de au plus N parties, et $h = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i + y_i x_i)$