TRANCHES ET TUBES

Exposé introductif numéro $2^{1/2}$ du Groupe de Travail "Théorie de Lie et géométrie symplectique". Les notes des autres exposés sont disponibles à l'adresse url suivante : `http://math.univ-lyon1.fr/~iohara/gdt-Lie.html`

Table des matières

1. Le théorème de linéarisation de Bochner

Soit M une variété différentiable lisse et soit K un groupe topologique compact agissant sur M par des C^k-difféomorphismes. Notons $\Phi : K \times M \longrightarrow M$ l'action ; on écrit souvent $k \cdot x := \Phi(k, x)$ pour $k \in K$ et $x \in M$.

Théorème 1.1 (Thm. de linéarisation de Bochner)**.** *Soit $x_0 \in M$ un point fixe de l'action (i.e. $k \cdot x_0 = x_0$ quel que soit $k \in K$). Alors il existe*
- *un voisinage ouvert K-invariant U de x_0 dans M ;*
- *un voisinage ouvert V de 0 dans $T_{x_0}M$;*
- *un difféomorphisme K-équivariant $\chi : U \to V$ tel que $T_{x_0}\chi : T_{x_0}M \to T_{x_0}M$ est l'identité.*

Notation 1.2. Posons, pour tout $k \in K$, $\Phi_k : M \to M; x \mapsto k \cdot x$. Quel que soit $y \in T_{x_0}M$ on note $k \cdot y := (T_{x_0}\Phi_k)(y) \in T_{k\cdot x_0} = T_{x_0}M$ (autrement dit, on note $\cdot$ l'action de K sur $T_{x_0}M$ par transformations linéaires).

Démonstration du Théorème. On commence par démontrer le lemme suivant, bien utile :

Lemme 1.3. *Tout voisinage ouvert U' de x_0 dans M contient un voisinage ouvert K-invariant U de x_0 dans M.*

Démonstration du lemme. Soit U' un voisinage ouvert de x_0 dans M. Φ étant une application continue et x_0 un point fixe de l'action, quel que soit $k \in K$ il existe un voisinage ouvert W_k de k dans K et un voisinage ouvert U_k de x_0 dans M tel que $\Phi(W_k \times U_k) \subset U'$. K étant compact il existe un sous-ensemble fini $F \subset K$ tel que $k = \cup_{k\in F} W_k$; et ainsi $\Phi(K \times \tilde{U}) \subset U'$ pour $\widetilde{U} := \cap_{k\in F} U_k$ (qui est ouvert car l'intersection est finie). Par conséquent, $U := \Phi(K \times \widetilde{U}) = \cup_{k\in K}(k \cdot \widetilde{U})$ est un voisinage ouvert K-invariant de x_0, contenu dans U'. $\square$

Considérons une application $\widetilde{\chi}$ de classe C^k, d'un voisinage ouvert $\widetilde{U}$ de x_0 dans M vers $T_{x_0}M$, telle que $\widetilde{\chi}(x_0) = 0$ and $T_{x_0}\widetilde{\chi} = \mathrm{id}$. D'après le lemme précédent on peut supposer sans perte de généralité que $\widetilde{U}$ est K-invariant.

On applique maintenant le procédé très utile de **moyennisation** à $\widetilde{\chi}$ pour "le rendre équivariant". Plus précisément, on définit pour tout $x \in \widetilde{U}$

$$\chi(x) := \int_K \underbrace{k \cdot \Big(\widetilde{\chi}\big(k^{-1} \cdot x\big)\Big)}_{=:\chi_k(x)} \mathrm{d}k\,.$$

Remarque 1.4. Ici on intègre par rapport à la **mesure de Haar**. La mesure de Haar est l'unique mesure de probabilité μ (i.e. $\mu(K) = 1$) définie sur les Boréliens de K qui est K-invariante (i.e. pour tout Borélien B et tout $k \in K$, $\mu(k \cdot B) = \mu(B)$). Exemples :

- si K est un groupe fini, alors la mesure de Haar est simplement la mesure de comptage (normalisée par $\frac{1}{|K|}$) ;
- si $K = S^1 := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, alors la mesure de Haar est la mesure de longueur (i.e. la mesure induite par la mesure standard sur $\mathbb{R}$).

Par définition, quels que soient $k \in K$ et $x \in \widetilde{U}$, $k \cdot \big(\chi(k^{-1} \cdot x)\big) = \chi(x)$. Autrement dit, χ est K-équivariant. Rappelons que $\chi_k = T_{x_0}\Phi_k \circ \widetilde{\chi} \circ \Phi_k^{-1}$; ainsi $T_{x_0}\chi_k = T_{x_0}\Phi_k \circ T_{x_0}\widetilde{\chi} \circ T_{x_0}\Phi_k^{-1} =$ id. Donc $T_{x_0}\chi = \mathrm{id}$ (car $\chi = \int_K \chi_k dk$).

D'après le Théorème d'Inversion Locale on peut, quitte à restreindre $\widetilde{U}$, supposer que χ est un difféomorphisme. On peut également supposer, quitte à restreindre de nouveau, que l'ouvert est K-invariant. □

Remarque 1.5. Considérons un produit scalaire $(\cdot,\cdot)$ arbitraire sur $T_{x_0}M$. Alors

$$\langle u, v\rangle := \int_K (k \cdot u, k \cdot v) dk$$

définit un produit scalaire K-invariant sur $T_{x_0}M$. Ainsi $K' := \{T_{x_0}\Phi_k | k \in K\}$ est un sous-groupe fermé (car compact) du groupe orthogonal de l'espace vectoriel Euclidien $\big(T_{x_0}M, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$. Si $B \subset V$ est une boule ouverte, alors B est K'-invariante, donc K-invariante, et $\chi^{-1}(B)$ est un ouvert K-invariant contenant x_0. Ainsi, dans le Théorème de linéarisation de Bochner, on peut exiger que V soit une boule ouverte dans $T_{x_0}M$.

2. Tranches (ou *"slices"*)

Soit G un groupe de Lie compact agissant de manière C^k sur une variété lisse M. On garde les mêmes notations que dans le paragraphe précédent (avec G à la place de K).

Définition 2.1. *Une* **tranche** *S en $x_0 \in M$ est une sous-variété C^k de M contenant x_0 et telle que*

1. *pour tout $x \in M$, $T_xM = \alpha_x(\mathfrak{g}) + T_xS$, où $\alpha_x = T_e\Phi(\cdot, x) : \mathfrak{g} := T_eG \to T_xM$, et $T_{x_0}M = \alpha_{x_0}(\mathfrak{g}) \oplus T_{x_0}S$;*
2. *S est G_{x_0}-invariant ;*
3. *si $x \in S$ et $g \in G$ sont tels que $g \cdot x \in S$, alors $g \in G_{x_0}$.*

Le théorème suivant donne une condition suffisante pur l'existence d'une tranche en un point donné.

Théorème 2.2 (Thm. de la tranche)**.** *Si l'action est propre en x_0, alors il existe une tranche en x_0.*

On rappelle que l'action est dite **propre** en x_0 si pour toute suite $(x_n)_{n\geq 1}$ qui converge vers x_0 dans M et toute suite $(g_n)_{n\geq 1}$ dans G telle que $g_n \cdot x_n \to x_0$, il existe une sous-suite $(g_{k(n)})_{n\geq 1}$ qui converge.

Démonstration du Théorème. Commençons par remarquer que le stabilisateur $K := G_{x_0}$ de x_0 dans G est compact (car l'action est propre). D'après le Théorème de linéarisation de Bochner (voir la discussion au paragraphe précédent), il existe un C^k-difféomorphisme $\chi : U \to B_\epsilon$ K-équivariant entre un voisinage ouvert K-invariant U de x_0 et une boule ouverte B_ϵ centrée en 0 dans $T_{x_0}M$, tel que $T_{x_0}\chi = \mathrm{id}$ et $\chi(x_0) = 0$.

Ensuite, quels que soient $k \in K$ et $g \in G$, $(kgk^{-1}) \cdot x_0 = k \cdot (g \cdot x_0)$. Ainsi en différentiant cette dernière égalité p/r à g, en $g = e$ et dans la direction de $u \in \mathfrak{g} = T_eG$, on obtient que

$$\alpha_{x_0}\big(\mathrm{Ad}_k(u)\big) = k \cdot \big(\alpha_{x_0}(u)\big) .$$

En particulier $k \cdot \big(\alpha_{x_0}(\mathfrak{g})\big) \subset \alpha_{x_0}(\mathfrak{g})$ pour tout $k \in K$. Ainsi, son complément orthogonal $\alpha_{x_0}(\mathfrak{g})^\perp$ dans $T_{x_0}M$ p/r à un produit scalaire K-invariant donné est également stable par K. De cette manière $S_\epsilon := \chi^{-1}\Big(\alpha_{x_0}(\mathfrak{g})^\perp \cap B_\epsilon\Big)$ est K-invariant, et vérifie donc (2).

La seconde partie de (1) est également vérifiée : comme $T_{x_0}S_\epsilon = \alpha_{x_0}^\perp$, on a bien que $T_{x_0}M = \alpha_{x_0}(\mathfrak{g}) \oplus T_{x_0}S_\epsilon$. De plus, l'ensemble $\{x \in S_\epsilon | T_xM = \alpha_x(\mathfrak{g}) + T_xS_\epsilon\}$ est ouvert dans S_ϵ ; de telle sorte que, quitte à choisir $\epsilon > 0$ suffisament petit, on peut supposer que (1) est vérifiée. Reste à démontrer (3).

Notons $\mathfrak{k} := \ker(\alpha_{x_0})$ l'algèbre de Lie du stabilisateur $K = G_{x_0}$ de x_0 dans G.

Lemme 2.3. *Soit S une sous-variété de M contenant x_0 et telle que $T_{x_0}M = \alpha_{x_0}(\mathfrak{g}) \oplus T_{x_0}S$, et soit C une sous-variété de G contenant e et telle que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus T_eC$. Alors il existe*
- *S_0 un voisinage ouvert de x_0 dans S ;*
- *C_0 un voisinage ouvert de e dans C ;*
- *M_0 un voisinage ouvert de x_0 dans M ;*

tels que l'action Phi se restreint en un difféomorphisme $C_0 \times S_0 \to M_0$.

Démonstration du lemme. Considérons l'application tangente

$$T_{(e,x_0)}\Big(\Phi_{|C\times S}\Big) \,:\, T_eC \times T_{x_0}S \longrightarrow T_{x_0}M\,;$$

elle est donnée par $(u, v) \longmapsto \alpha_{x_0}(u) + v$.

Cette application est injective. En effet, si $\alpha_{x_0}(u) + v = 0$ alors $\alpha_{x_0}(u) = 0 = v$ (car $T_{x_0}M = \alpha_{x_0}(\mathfrak{g}) \oplus T_{x_0}S$). De plus, étant donné que $u \in T_eC$ et que $\alpha_{x_0}(u) = 0$, alors $u = 0$ (car $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus T_eC$).

Finalement, la dimension de $T_eC \times T_{x_0}S$ est égale à

$$\dim\big(T_eC\big)+\dim\big(T_{x_0}S\big) = \Big(\dim(\mathfrak{g})-\dim(\mathfrak{k})\Big)+\Big(\dim\big(T_{x_0}M\big)-\dim\big(\alpha_{x_0}(\mathfrak{g})\big)\Big) = \dim\big(T_{x_0}M\big)\,.$$

$T_{(e,x_0)}\Big(\Phi_{|C\times S}\Big)$ est donc bijective et le lemme suit par le théorème d'inversion locale. □

Supposons maintenant par l'absurde que (3) n'est vérifiée pour aucun $\epsilon > 0$. Alors pour tout $n \geq 1$, il existe $x_n \in S_{1/n}$ et $g_n \in G$ tels que $g_n \cdot x_n \in S_{1/n}$ et $g_n \notin K$. En particulier $x_n \to x_0$, et alors par propreté on peut supposer (quitte à prendre une sous-suite) que $(g_n)_{n\geq 1}$ converge vers un élément g (qui appartient à K). Quitte à remplacer g_n par g_ng^{-1} on peut également supposer que $g_n \to e$ (toujours avec $g_n \notin K$).

Considérons maintenant une sous-variété C de G contenant e et telle que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus T_eC$. D'après le théorème d'inversion locale, il existe C_0, resp. V et W, un voisinage ouvert de e dans C, resp. K et G, tels que la multiplication dans G se restreigne en un difféomorphisme $C_0 \times V \to W$. Pour n assez grand on peut ainsi écrire $g_n = c_nk_n$ avec $c_n \in C$ et $k_n \in K$. Comme $g_n \notin K$, en particulier $c_n \neq e$.

Finalement, on a d'une part $c_n \cdot x_n \in S_{1/n}$ (par invariance) et $c_n \cdot (k_n \cdot x_n) = g_n \cdot x_n \in S_{1/n}$ (par hypothèse). Ainsi d'après le lemme précédent on a $c_n = e$ pour n assez grand. CONTRADICTION. □

Exemple 2.4. Prenons l'exemple de l'action de $S^1 := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ par rotations sur $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$: $k \cdot z := e^{2\pi ik}z$. Toute boule ouverte centrée en 0 est une tranche en 0. Tout segment ouvert d'un rayon est une tranche en chacun de ses points (en réalité, tout segment ouvert ne contenant pas l'origine et n'étant pas tangent à un cercle centré en 0 est une tranche en chacun de ses points).

3. Tubes

On conserve les notations du paragraphe précédent.

Définition 3.1. *Un* **tube** *autours d'une orbite $G \cdot x_0$ est un voisinage ouvert G-invariant U de cette orbite muni d'un difféomorphisme $G \times_K A \longrightarrow U$, où A est une variété sur laquelle K agit.*

Théorème 3.2 (Thm. du tube)**.** *Si l'action est propre en x_0, alors il existe un tube autours de $G \cdot x_0$, avec A un ouvert K-invariant de $T_{x_0}M/\alpha_{x_0}(\mathfrak{g})$.*

Démonstration. On sait qu'il existe une tranche S en x_0.

Commençons par montrer que pour tout $g \in G$ et tout $x \in S$,

$$T_{(g,x)}\Big(\Phi_{|G\times S}\Big) \,:\, T_gG \times T_xS \longrightarrow T_xM$$

est surjective. D'une part nous savons que c'est vrai pour $g = e$ (car $T_xM = \alpha_x(\mathfrak{g}) + T_xS$ pour tout $x \in S$). D'autre part on en déduit que c'est vrai pour tout g en différentiant l'égalité $\Phi(gh, x) = g \cdot \Phi(h, x)$ en $(h, x) = (e, x)$, obtenant ainsi

$$T_{(g,x)}\Big(\Phi_{|G\times S}\Big) = \underbrace{T_x\Phi_g}_{biject.} \circ T_{(e,x)}\Big(\Phi_{|G\times S}\Big)\,.$$

Ainsi $U := G \cdot S = Im\Big(\Phi_{|G\times S}\Big)$ est un voisinage ouvert G-invariant de $G \cdot x_0$.

Ensuite, $\Phi_{|G\times S} : G \times S \to U$ descend en une bijection différentiable $\varphi : G \times_K S \to U$. En effet, quels que soient (g, x) et (h, y) deux couples dans $G \times S$ tels que $g \cdot x = h \cdot y$, $(h^{-1}g) \cdot x = y$ et donc $k := h^{-1}g \in K$ (et réciproquement, $((gk^{-1}) \cdot (k \cdot x) = g \cdot x)$.

Pour montrer que φ est un difféomorphisme, il suffit de montrer que $T_{[g,x]}\varphi$ est bijective (ici $[g, x] \in G \times_K S$ est la classe d'un couple $(g, x) \in G \times S$). D'une part, si on définit $\pi : G \times S \twoheadrightarrow G \times_K S\,; (g, x) \mapsto [g, x]$, alors

$$\underbrace{T_{(g,x)}\Big(\Phi_{|G\times S}\Big)}_{surject.} = T_{[g,x]}\varphi \circ T_{(g,x)}\pi\,;$$

donc $T_{[g,x]}\varphi$ est une surjection. D'autre part, $\dim(G \times_K S)$ est égale à

$$\dim\big(G/K\big) + \dim\big(S\big) = \dim\big(\alpha_{x_0}(\mathfrak{g})\big) + \dim\big(S\big) = \dim\big(M\big)\,;$$

donc $T_{[g,x]}\varphi$ est bijective.

Pour conclure, on remarque que S est difféomorphe à un ouvert de $\alpha_{x_0}(\mathfrak{g})^\perp \cong T_{x_0}M/\alpha_{x_0}(\mathfrak{g})$, sur lequel l'action de K est linéaire. □

Références

[1] J.J. Duistermat et J.A.C. Kolk, *Lie groups* (Springer), chapître 2.

[2] J.P. Ortega et T. Ratiu, *Momentum maps and Hamiltonian reduction* (Birkhauser), chapître 2.