Sujet de TIPE :
Billard rectangulaire, fractions continues et mots sturmiens

Maxime Guéry

Sous la direction de Damien Calaque

Table des matières

Introduction

Etre bon en mathématiques est une condition qui n'est ni nécessaire, ni suffisante pour être un excellent joueur de billard, mais cela peut être très utile. Outre le fait que la mathématique soit le seul langage universel, elle est à la base de nombreux domaines : « La mathématique, c'est la reine des sciences.», écrivait le mathématicien Gauss. [1] Ce sujet pourrait donc s'adresser à tous ceux qui pensent que les mathématiques sont une science peu utile voire ennuyeuse.

Le billard est apparu sous Louis XI sous forme de tables recouvertes de drap sur lequel on poussait des billes au moyen de bâtons recourbés à leur extrémité. Le général Mingaud, au XIXè siècle, fut le premier à réaliser des effets avec les boules, grâce notamment au bout cuivré de la queue. Cet homme inspira le mathématicien Gaspard Gustave Coriolis [2] qui rédigea un ouvrage intitulé « La Théorie Mathématique des Effets de Jeu de Billard ».

Pourquoi étudier le billard dans un sujet mathématique ? me demanderait-on. La réponse est évidente : le billard ne laisse rien au hasard, tout est prévisible. Par exemple, un rebond obéit aux mêmes lois que celles régissant la réflexion de la lumière sur un miroir. La boule rebondit sur la bande en faisant un angle égal à l'angle sous lequel elle l'a touchée. En d'autres termes, lorsqu'une boule rencontre une paroi, elle est réfléchie selon les lois définies

[1] Johann Carl Friedrich Gauss est allemand et est né en 1777. Il étudia les mathématiques, l'astronomie et la physique. Doté d'un grand génie et surnommé le "prince des mathématiques", il est considéré comme l'un des plus grands scientifiques et mathématicien de tous les temps. A la fin du XVIIIè siècle, il formula la méthode des moindres carrés et une conjecture sur la répartition des nombres premiers, conjecture qui fut prouvée par Jacques Hadamard en 1896. Il fut le premier à démontrer rigoureusement le théorème fondamental de l'algèbre ; en fait, il produisit quatre preuves entièrement différentes de ce théorème tout au long de sa vie, et clarifia considérablement le concept de nombre complexe. Il apporta aussi d'importantes contributions en théorie des nombres avec son livre publié en 1801, *Disquisitiones arithmeticae.* Gauss découvrit la possibilité de géométries non-euclidiennes mais ne publia jamais ce travail. Bien d'autres travaux plus intéressants les uns que les autres furent publiés. Il mourut à Hanovre, en Allemagne, en 1855. En hommage à son génie, son portrait figurait sur les billet de dix Marks allemands.

[2] Gaspard Gustave Coriolis, mathématicien et ingénieur français, est né en 1792 à Paris. Il devient enseignant à l'Ecole polytechnique en 1816, à l'âge de 24 ans. En 1829, Coriolis commence à enseigner l'analyse géométrique et la mécanique à l'Ecole Centrale des Arts et des Manufactures. Coriolis est avant tout connu du "grand public" grâce à la force qui porte son nom et qui correspond à une loi de la cinématique : *Toute particule en mouvement dans l'hémisphère nord est déviée vers sa droite (vers sa gauche, dans l'hémisphère sud).* Il mourut en 1843 suite à de nombreux problèmes de santé.

par Descartes. [3] Si, par exemple, nous voulons toucher une bille en utilisant une seule bande, il nous faudra donc viser le symétrique de la bille par rapport à la bande choisie. On aurait pu aussi étudier les cas de billard définis par des polygones, comme un triangle avec angles aigus, un pentagone ou octogone... Mais ceux-ci sont trop compliqués. Nous avons décidé de nous pencher sur un problème plus simple et non des moins intéressants : le cas d'un billard rectangulaire. On négligera les phénomènes dissipatifs (comme les frottements de l'air et de la table du billard) et on supposera que la boule de billard est réduite à un point sans dimension. Nous ferons ainsi de la géométrie analytique.

Nous étudierons dans un premier temps les raisons nécessaires et suffisantes pour que la trajectoire d'une boule de billard, initialement mise en mouvement par un joueur, ait une trajectoire périodique. Ceci nous amènera à explorer certaines techniques simples de représentation d'une trajectoire dans un repère. Nous verrons que chaque trajectoire peut définir un mot mathématique, dit mot de billard, qui possède certaines particularités intéressantes à étudier. Nous ferons la correspondance entre ces mots de billard et certains autres mots, comme les mots de Christoffel. [4] Nous nous pencherons ensuite sur le cas de trajectoires non périodiques, qui nous mènera sur l'étude de fractions continues. Nous en verrons certaines particularités et propriétés, qui nous conduirons à démontrer que tout nombre irrationnel s'écrit sous la forme d'une unique fraction continue. Nous terminerons enfin notre travail par l'étude des mots sturmiens, qui tiennent leur nom d'un grand mathématicien du XIXème siècle, Charles Sturm. [5] Nous pourrons faire le parallèle

[3] René Descartes est né à La Haye en mars 1596. Il fut un grand mathématicien, physicien, et le principal fondateur de la philosophie moderne. Descartes appliqua les méthodes de l'algèbre aux problèmes de géométrie. Il établit la géométrie analytique comme étant l'application de l'algèbre à la géométrie. Descartes mourut en février 1650 à Stockholm.

[4] Elwin Bruno Christoffel a vécu au XIXème siècle, de 1829 à 1900. Il étudia les mathématiques et la physique. Il fut enseignant à l'Ecole polytechnique de Zurich, en Allemagne, son pays d'origine. Il fut notamment l'auteur de travaux sur les fonctions algébriques, sur les équations différentielles. Il contribua, avec un autre mathématicien, Lipschitz, à la théorie des formes différentielles quadratiques, nécessaire à l'étude des géométries riemanniennes.

[5] Charles Sturm est un mathématicien français d'origine suisse né à Genève en 1803. En 1827, ce mathématicien reçu le Prix de l'Académie des Sciences avec un autre mathématicien, Colladon, pour leurs recherches sur la compressibilité des liquides et pour leur mesure directe du son dans l'eau. En 1829, Sturm énonce un théorème qui permet de calculer le nombre de racines réelles différentes d'un polynôme, comprises dans un intervalle. Sept ans plus tard il devient membre de l'Académie des Sciences et professeur à l'Ecole

avec les mots équilibrés et les mots de billard, ce qui nous conduira à faire un lien entre plusieurs mondes, plusieurs constructions de mots différents.

Etant à l'origine un divertissement, le billard est vite devenu sujet de mathématique, prouvant que l'alliance entre la science des nombres et le loisir n'est pas impossible. C'est l'une des raisons pour lesquelles j'ai décidé, suite à la proposition de mon encadrant, d'étudier le billard rectangulaire, qui va nous ammener à explorer divers horizons.

Polytechnique. Il mourut en 1855, à Paris. Charles Sturm fait partie des 72 savants dont le nom est inscrit sur la Tour Eiffel.

1 Trajectoire périodique

Nous étudions dans ce chapitre la périodicité de la trajectoire d'une boule de billard en fonction de quelques paramètres intervenant dans sa mise en mouvement. Nous ne nous intéressons pas au cas où la boule percute un coin, ne connaissant pas sa trajectoire à la suite de ceci.

1.1 Définition mathématique d'un mot

On pose A un ensemble qu'on appelle *alphabet*. Les éléments de A sont des *lettres*.

Définition 1.1 *Un* mot *de longueur n est une application*

$$\varphi : [|1, n|] \longrightarrow A.$$

Un mot infini est une application

$$\phi : \mathbb{N}^* \longrightarrow A.$$

Par convention, on appelle ϵ le mot vide*, qui est l'unique mot de longueur 0.*

Remarque 1.2 On note $[|p, q|] := \{p, p+1, ..., q\}$ avec $p \leq q$. Si $p > q$, alors par convention, $[|p, q|] := \emptyset$.
Si u est un mot de longueur n, on note $u_k = u(k)$ la k-ième lettre de u. On écrira donc souvent u comme une suite de lettres :

$$u = u_1 u_2 u_3 ... u_n.$$

Un facteur d'un mot u, fini ou infini, est un sous-mot fini constitué de lettres consécutives de u.

Définition 1.3 *Soit u un mot de longueur n. Un* facteur *ou* sous-mot *de u est un mot v que l'on obtient à partir de la restriction $u_{[|p,q|]}$ de u à $[|p, q|]$, avec $p \leq q \leq n$, de la manière suivante : pour tout k dans $[|1, q-p|]$,*

$$v_k = u_{p+k-1}.$$

Exemple 1.4 Prenons par exemple le mot $u = aabaaabaaba$. Il a comme facteurs le sous-mot $f_1 = aab$, ainsi que $f_2 = abaaa$ etc...

Définition 1.5 *Soit u un mot de longueur n et k un entier, tel que $1 \leq k \leq n$. Conformément aux notations de la définition 1.3, le préfixe de u de longueur k est le facteur $p_k(u)$ tel que $p = 1$ et $q = k$.*
De même, le suffixe de longueur k est le facteur $s_k(u)$ obtenu en prenant $p = n + 1 - k$ et $q = n$. On a en particuler

$$p_0(u) = s_0(u) = \epsilon.$$

Exemple 1.6 Considérons le mot $u = aabaaabaaba$. On a donc comme préfixe de longueur 2 : $p_2(u) = aa$ et de longueur 5 : $p_5(u) = aabaa$.
On a aussi comme suffixe de longueur 2 : $s_2(u) = ba$ et de longueur 5 : $s_5(u) = baaba$.

Définition 1.7 *On parle de* langage *d'un mot pour définir l'ensemble des facteurs de ce mot.*

Définition 1.8 *La* complexité *d'un mot u est la suite numérique $(P_n(u))_{n \in \mathbb{N}}$, où $P_n(u)$ désigne le nombre de facteurs distincts de u de longueur n.*

1.2 Mot de billard

Les mots de billard sont des mots infinis constitués d'un alphabet $A = \{a, b\}$ composé seulement de deux lettres a et b. Ces mots sont décrits à partir de la trajectoire d'une boule de billard qui se déplace sur une table rectangulaire. On choisit de manière arbitraire un repère orthonormé dont l'origine soit un des quatre sommets du rectangle, et que ce dernier soit situé dans le cadrant supérieur droit du plan. En effet, chaque choc de la boule de billard avec une paroi verticale (resp. avec une paroi horizontale) se traduit par un a (resp. par un b). L'enchaînement des rebonds entraîne une succession de lettres, formant un mot.
Sur notre exemple de la figure 1, le premier rebond et le troisième rebond se trouvent sur la paroi horizontale supérieure (b), le deuxième s'effectue au niveau de la paroi horizontale inférieure (b), le quatrième contre la paroi verticale de droite (a), etc.

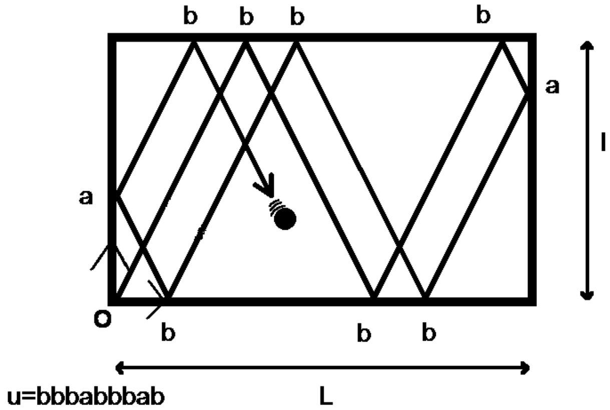

Figure 1

Ici, notre mot de billard est donc $u = bbbabbbab...$

Notation 1.9 On appelle $\mathcal{B}$ l'ensemble des mots de billard. On note $u(\alpha, y)$ le mot de billard correspondant à une droite de pente α et d'ordonnée à l'origine y.

1.3 Simplifications

L'étude de la trajectoire d'une boule de billard devrait être réalisée à partir d'un billard de forme rectangulaire. Or de manière intuitive il est plus aisé de se placer dans un billard carré, dont les quatres côtés sont identiques. On peut en effet passer, par une suite de diverses transformations, d'une table rectangulaire à une table carrée, sans modifier le mot de billard associé. Ceci est illustré par la figure 2. On étudie donc la trajectoire d'une boule de billard dans un billard de forme carée.

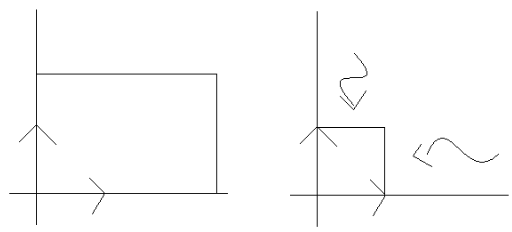

Figure 2

De plus, on choisit, sans perte de généralités, de prendre une ordonnée à l'origine comprise entre 0 et 1. Par conséquent, le mot de billard engendré

par la trajectoire d'une boule de billard débute nécessairement par un a (la boule se situe sur le bord verticale de gauche).
Par symétrie par rapport à l'axe (Ox), on choisit d'étudier le cas d'une pente α positive. De plus, par symétrie par rapport à la première bissectrice, on choisit de prendre $\alpha < 1$.

1.4 La rationnalité au coeur de la périodicité

Définition 1.10 *Une trajectoire est dite* périodique *si elle se répète identiquement à elle même au bout d'un certain temps.*

Proposition 1.11 *La trajectoire de la boule de billard est périodique si et seulement si α est rationnel. De plus, si $\alpha = p/q$ est rationnel, la boule se retrouve au point de départ lors du (2p+2q) i-ème rebond et boucle sa trajectoire qui se repète.*

Exemple 1.12 Pour illustrer cette proposition, appuyons nous sur un exemple. Je choisis de manière arbitraire de prendre $\alpha = 1/2$.
Si la proposition définie précédemment est correcte, on devrait obtenir une trajectoire périodique telle que la boule se retrouve à son point de départ au 6ème rebond et referme sa boucle. On constate sur la figure 3 qu'effectivement la trajectoire de la boule de billard est périodique et qu'au 6ème rebond elle revient au point de départ et boucle sa trajectoire. On remarque une certaine symétrie de celle-ci, ce qui expliquerait pourquoi on multiplie par 2, dans l'expression (2p+2q), pour revenir au point initial. Le mot de billard associé à cette trajectoire est le suivant : u = *babbabbabbabbabbab...*
La période de la trajectoire (nombre de rebonds de la boule avant de revenir au point initial) a pour longueur le double de celle du facteur ou sous mot *bab*, qui définit la moitié de la période. Par symétrie, il suffit de six rebonds pour que la boule revienne à son point de départ et boucle sa trajectoire.

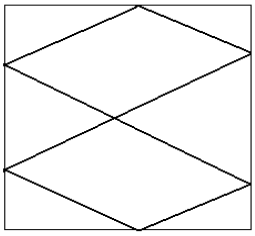

Figure 3

Démonstration : La démonstration qui suit va se dérouler en deux étapes. Je rappelle que nous devons montrer une équivalence. Je commencerai par démontrer que la rationnalité de α implique la périodicité de la trajectoire, puis dans un second temps, nous montrerons la réciproque par le principe de contre-apposition, c'est-à-dire que l'irrationnalité de α implique que la trajectoire est non périodique. Pour cela, nous allons analyser la trajectoire de la boule comme une ligne droite grâce au système de dépliage. En effet, lorsque notre boule de billard rencontre une paroi de notre carré, nous prolongeons sa trajectoire en ligne droite, dans la même direction, au lieu de faire réfléchir cette boule dans le sens opposé, conformément aux lois de Descartes. Cette trajectoire se prolonge dans un carré qui est le symétrique de notre carré de départ par rapport au côté que la boule a rencontré. Cette méthode s'illustre de la manière suivante.

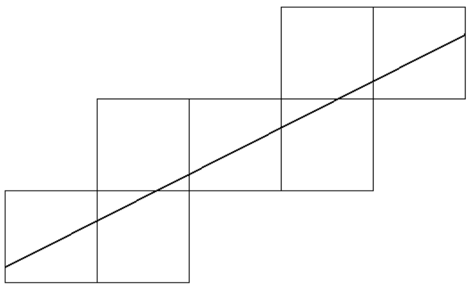

Figure 4

A partir de cette nouvelle vision de la trajectoire, il faut traduire sa périodicité en langage géométrique. En effet, si on se place dans un repère orthonormé et qu'on étudie la droite représentant la trajectoire issue du dépliage, dire que la trajectoire est périodique signifie que pour une certaine abscisse entière, l'ordonnée du point correspondant sur la droite a une partie décimale égale à y.

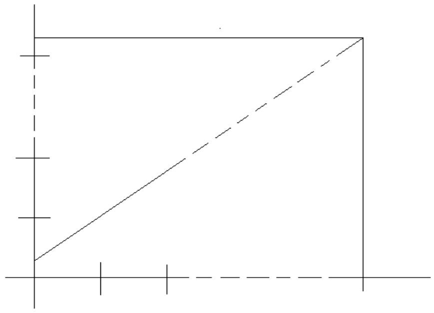

Figure 5

α rationnel implique que la trajectoire est périodique

Supposons α rationnel. On peut donc écrire $\alpha = p/q$, avec p et q deux entiers naturels ($q \neq 0$). L'ordonnée d d'un point d'abscisse entière n est de la forme

$$d = y + \alpha n,$$

c'est-à-dire

$$d = y + (p/q)n.$$

On a vu que pour que la trajectoire soit périodique, il suffit de trouver une ordonnée d dont la partie décimale est y. En posant $n = q$, on obtient $d = y + p$, dont la partie décimale est y. Par conséquent, si α est rationnel, alors la trajectoire de la boule de billard est périodique.

α irrationnel implique que la trajectoire est non périodique

Supposons maintenant que α est irrationnel. On ne peut donc pas l'écrire comme le quotient de deux entiers. Comme pour la première partie de la démonstration, il faut que l'on trouve un point tel que la partie décimale de son ordonnée soit égale à y. Comme $d = y + \alpha n$, il faut que αn soit un entier. Or α est irrationnel, et un produit dont l'un des facteurs est irrationnel ne peut être un nombre entier. Donc αn n'appartient pas à l'ensemble des entiers naturels. Par conséquent, si α n'est pas rationnel, alors il n'existe aucune valeur entière de n telle que le produit αn soit entier. Donc l'irrationnalité de α implique que la trajectoire est non périodique.

Ces deux implications démontrent bien notre équivalence :

$$\alpha \text{ rationnel} \Longleftrightarrow \text{ trajectoire périodique.} \square$$

Remarque 1.13 Pour que la trajectoire soit périodique, il suffit que $\alpha = p/q$. On a ainsi $n = q$ et $[d] = p$. Or, un rebond contre une paroi verticale correspond à $n = 1$, deux rebonds contre une paroi verticale correspondent à $n = 2$ etc... et un rebond contre une paroi horizontale correspond à $d = 1$ etc... Il y a donc au total, par symétrie, $2n + 2[d]$ rebonds (le nombre de rebonds contre les parois verticales plus le nombre de rebonds contre les parois horizontales) avant que la boule ne revienne au point de départ et boucle sa trajectoire. Ainsi, il y a $2p + 2q$ rebonds entre le moment où la boule est mise en mouvement et le moment où elle revient au même endroit et termine la boucle de sa trajectoire !

2 Mots de billard, mots mécaniques et mots de Christoffel

2.1 Définition des mots de Christoffel

On peut lier les mots de billard vus précédemment aux mots de Christoffel. Ces derniers portent le nom d'un grand mathématicien et physicien franco-allemand du XIXè siècle, Elwin Bruno Christoffel. Les mots qu'il définit correspondent à l'approximation d'une droite par des points à coordonnées entières. On considère une droite dont la pente est positive et le but est de l'approcher par une suite de points dont les abscisses sont des entiers successifs, et dont les ordonnées sont les entiers les plus grands possibles, de manière à ce que les points correspondant restent sous la droite. Ceci est illustré sur la figure 6.

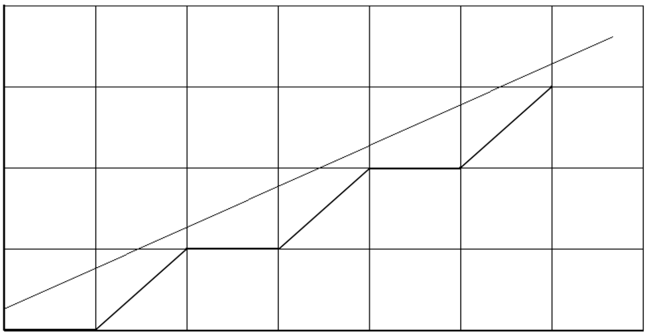

Figure 6

Avec cela, on construit un mot infini, composé lui aussi de deux lettres distinctes : on écrit un a lorsque deux points successifs ont la même ordonnée, et on écrit un b lorsque l'ordonnée varie entre deux points d'abscisses successives.

Remarque 2.1 Cette question d'approximer une droite se pose lorsqu'on souhaite tracer une droite sur un écran d'ordinateur par exemple.

Notation 2.2 On appelle $\mathcal{C}$ l'ensemble des mots de Christoffel. On note $c(\alpha, y)$ le mot de Christoffel correspondant à une droite de pente α et d'ordonnée à l'origine y.

On définit de même ce qu'on appelle les mots *mécaniques*, dérivant des mots de Christoffel. Ces derniers ont aussi pour but d'approximer une droite. Tous les points de la courbe, à coordonnées entières, se situent sous la droite à approximer, comme pour les mots de Christoffel. En réalité, la courbe représentant les mots mécaniques ressemble à un escalier. Si, pour une abscisse donnée, la différence entre les ordonnées du point de la droite et du point de la courbe est supérieure à 1, alors on prolnge notre courbe d'approximation sur l'axe des ordonnées. Si cette différence est inférieure à 1, on prolonge notre courbe sur l'axe des abscisses, comme indiqué sur la figure ci-dessous.

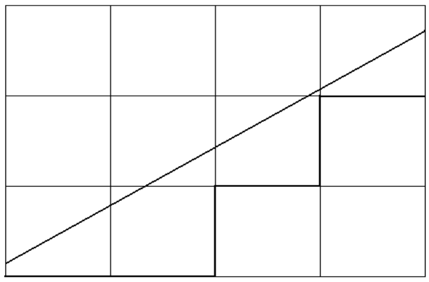

Figure 7

On peut donc, d'une façon analogue à celle des mots de Christoffel, définir un mot mécanique. Lorsqu'on prolonge la courbe sur l'axe des abscisses, on ajoute un b, et on définit un a quand on prolonge la courbe sur l'axe des ordonnées. Par exemple, le mot mécanique associé à la courbe précédente est $m = aababa$.

Notation 2.3 On note

$$m(\alpha, y)$$

le mot mécanique engendré par une droite de pente α et dont l'ordonnée à l'origine est y.

2.2 Relations entre mots de billard, mots mécaniques et mots de Christoffel

2.2.1 Lien avec les mots mécaniques

Proposition 2.4 *Les mots de billards et les mots mécaniques sont identiques, c'est-à-dire que pour tout α et pour tout y :*

$$u(\alpha, y) = m(\alpha, y).$$

Exemple 2.5 Prenons pour exemple les courbes de la figure 7. Dans ce paragraphe, on compte la paroi contre laquelle se trouve la boule de billard. Ici, le mot du billard commence donc par a car la boule, à sa position initiale, se trouve contre une paroi verticale. Sur la figure 7, le mot de billard représentant la droite est donc

$$u = aababaa...$$

Si on regarde maintenant le mot mécanique associé à cette même droite, on trouve :

$$m = aababa...$$

On remarque donc que les deux mots sont identiques.

Démonstration : Nous montrons la proposition énoncée ci-dessus par récurrencee. Il faut montrer que pour tout n entier strictement positif, $u_n = m_n$.
-Nous avons choisi, sans perte de généralités, que la boule se trouvait au point de départ sur la paroi verticale de gauche. On en avait déduit que le mot de billard commençait par un a. De plus l'ordonnée à l'origine est inférieure à 1. Ainsi, le mot mécanique associé au mot de billard débute lui aussi par un a. Donc les deux mots commencent par la première lettre : a. La propriété est ainsi vérifiée au premier rang.
-On suppose que la proposition est vraie pour un n fixé, c'est-à-dire que $u_n = m_n$. Montrons que cette proposition est vraie au rang $n + 1$.
Trois cas sont possibles. Le premier d'entre eux est le cas où $u_n = m_n = a$ et on suppose que $u_{n+1} = a$. Il suffit de montrer que $m_{n+1} = a$. On voit à partir de la figure 8 que si $u_{n+1} = a$, alors la droite ne coupe pas de ligne horizontale. Ainsi, la courbe d'approximation de la droite n'est prolongeable que suivant l'axe des abscisses. Ainsi, $m_{n+1} = a$.
Le deuxième cas consiste à supposer de même que $u_n = m_n = a$, mais en prenant cette fois $u_{n+1} = b$. Il suffit donc de montrer que $m_{n+1} = b$. On voit encore une fois sur la figure 8 que si $u_{n+1} = b$, alors la droite traverse une ligne horizontale, ce qui impose à la courbe d'approximation correspondante d'être prolongeable de manière unique selon l'axe des ordonnées. On en conclut que $m_{n+1} = b$.
Le troisième et dernier cas consiste à étudier le cas où $u_n = m_n = b$. Comme on avait choisit de prendre $\alpha < 1$, on ne peut avoir deux b consécutifs dans un mot de billard engendré par une droite de pente α. Par conséquent, $u_{n+1} = a$.

Il suffit de montrer que $m_{n+1} = a$. Par le même procédé de raisonnement que pour le premier cas, on remarque avec la figure que la courbe n'est prolongeable que selon l'axe des abscisses. Ainsi, $m_{n+1} = a$.
En étudiant tous les cas possibles, on a montré que si $u_n = m_n$ pour un n fixé, alors la propriété est vérifiée au rang suivant. Comme au premier rang cette proposition est aussi vérifiée, on en conclut, par récurrence que $u_n = m_n$ pour tout n entier naturel strictement positif. Ainsi, mot de billard et mot mécanique associé sont identiques.

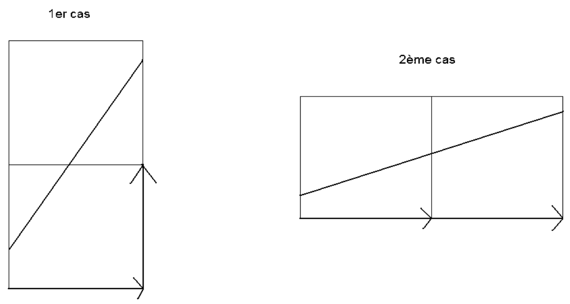

Figure 8

La figure 9 résume graphiquement la démonstration énoncée ci-dessus.

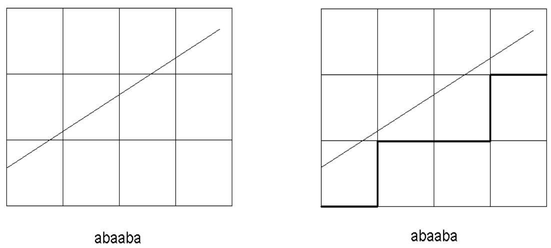

Figure 9

On pourra donc utiliser l'une ou l'autre expression pour désigner le même mot. □

2.2.2 Bijection entre mots de billard et de Christoffel

On rappelle qu'avec nos conventions d'écriture, on note $u(\alpha, y)$ (respectivement $c(\alpha, y)$) le mot de billard (respectivement le mot de christoffel) engendré par une droite de pente α et d'ordonnée à l'origine y.

Proposition 2.6 *Il existe une bijection ψ entre l'ensemble des mots de billard (ou mots mécaniques) et l'ensemble des mots de Chistoffel, définies par :*

$$\psi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$$

$$u(\alpha, y) \longmapsto c(\frac{\alpha}{\alpha+1}, \frac{\alpha+y}{\alpha+1}).$$

Nous allons montrer l'existence d'une bijection entre les deux ensembles mais nous ne démontrerons pas l'expression de celle-ci. Pour démontrer cette proposition, nous allons avoir besoin de définir certains outils mathématiques.

Définition 2.7 *Un ensemble E est un* monoïde *lorsqu'il est muni d'une loi de composition interne associative et d'un élément neutre. Autrement dit, on dit que (E,*,e) est un monoïde si :*

$$1)\forall (x,y) \in E^2, \quad x * y \in E$$

$$2)\forall (x,y,z) \in E^3, \quad (x*y)*z = x*(y*z)$$

$$3)\exists e \in E \quad \textit{tel que} \quad \forall x \in E, \; x*e = e*x = x$$

Exemple 2.8 Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des mots de longueur finie. $\mathcal{M}$ est un monoïde lorsqu'il est muni de la concaténation pour loi de composition et du mot vide ϵ pour élément neutre. Par exemple, si $u = u_1...u_k$ et $v = v_1...v_l$ alors $uv = u_1...u_kv_1...v_l$

Définition 2.9 *Soient (E,*,e) et (F,.,f) deux monoïdes. On dit que l'application φ de E dans F est un* morphisme de monoïde *si les propriétés suivantes sont vérifiées :*

$$\forall (x,y) \in E, \quad \varphi(x*y) = \varphi(x).\varphi(y)$$

$$\varphi(e) = f.$$

Démonstration : On rappelle que nous démontrons ici l'existence d'une telle bijection entre les deux ensembles, mais nous ne démontrons pas son expression.
Nous avons vu dans l'exemple précédent que l'ensemble des mots finis noté $\mathcal{M}$ était un monoïde. Soit ϕ le morphisme de monoïde telle que :

$$\phi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$$

$$a \mapsto a$$
$$b \mapsto ab.$$
$$\forall u \text{ et } \forall v, \quad \phi(uv) = \phi(u)\phi(v),$$
$$\phi(\epsilon) = \epsilon.$$

Commençons par montrer que ϕ est injective.
Soient u et v deux mots finis distincts. On pose $k = max\{i \in \mathbb{N}^*/p_i(u) = p_i(v)\}$. On a donc $p_k(u)$ le préfixe le plus long commun à u et v. Ainsi, on a :

$$u = p_k(u)u' \text{ et } v = p_k(u)v'.$$

u' et v' sont des mots finis, tels que :

$$u' = XU \text{ et } v' = YV,$$

avec U et V deux mots finis et X et Y deux lettres distinctes de A.
Pour montrer que $\phi(u) \neq \phi(v)$, il suffit de montrer que $\phi(u') \neq \phi(v')$.
Supposons que $u' = aU$ et $v' = bV$. On a donc

$$\phi(u') = \phi(a)\phi(U) = a\phi(U).$$

Montrons désormais que la deuxième lettre de $\phi(u')$ ne peut-être qu'un a, c'est-à-dire que $\phi(U)$ débute par un a. En effet, l'image de a par ϕ est a et l'image de b par ϕ est ab. Donc

$$\phi(u') = aa...$$

De plus,
$$\phi(v') = \phi(b)\phi(V) = ab\phi(V).$$

Donc
$$\phi(v') = ab...$$

On en conclut que $\phi(u') \neq \phi(v')$.
Ainsi, ϕ est injective.

Cette application s'étend en une application ϕ, telle que :

$$\phi : M_\infty \longrightarrow M_\infty.$$

ϕ est également injective. On prend désormais la restriction de cette application aux mots de Christoffel :

$$\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow M_\infty.$$

Cette restriction est évidemment injective. On a donc $\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}$.
Pour montrer que $\varphi(\mathcal{C}) = \mathcal{B}$, il suffit de montrer maintenant que φ est surjective. On a vu qu'un mot de billard codait une unique droite. Celle-ci peut-être approximée par une courbe définissant un mot de Christoffel. Ainsi, à un mot de billard correspond un unique mot de Christoffel. Ce mot de billard est en réalité l'image du mot de Christoffel correspondant par l'application φ. Donc tout mot de billard à un antécédent par φ. On en conclut que φ est surjective, donc bijectve.

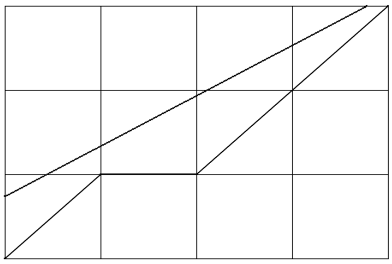

Figure 10

On a ici :

$$\varphi(babb) = abaabab$$

$\psi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ est la bijection réciproque de φ. Ainsi ψ est bijective, ce qu'il fallait démontrer. □

3 Fraction continue

Après avoir étudié les mots de billard engendrés par une trajectoire dont la pente est un réel rationnel, nous nous penchons dans ce chapitre au problème que soulève le caractère irrationnel de cette pente. On se place donc dans le cas où α n'est pas rationnel, c'est-à-dire qu'on ne peut l'écrire sous la forme p/q, avec p et q deux entiers naturels premiers entre eux. La trajectoire de la boule de billard n'est donc plus périodique. Cette troisième partie nous conduit à étudier d'autres outils mathématiques : les fractions continues.

3.1 Définition d'une fraction continue

La notion de *fraction continue* remonte à l'époque de Fermat et atteint son paroxisme avec les travaux de Lagrange [6]et Legendre [7]vers la fin du XVIIIème siècle. Les fractions continues sont utilisées, entre autres, dans le but d'approximer des nombres irrationnels par des nombres rationnels. Pour donner une représentation concrète d'une fraction continue, nous allons considérer le nombre rationnel a/b, tel que $pgcd(a, b) = 1$ et $b > 0$. L'algorithme d'Euclide permet d'écrire :

$$a = a_1 b + b_1 \quad 0 < b_1 < b$$

$$b = a_2 b_1 + b_2 \quad 0 < b_2 < b_1$$

[6]Joseph Louis, comte de Lagrange, est un mathématicien et astronome italien. Il vécut de janvier 1736 à avril 1813. Il fonde l'Académie de Turin en 1758 et publie ses premiers travaux. Admis à l'Académie de Berlin par Euler et travaillant à ses côtés, Lagrange fonde la théorie des formes quadratiques, démontre le théorème de Wilson sur les nombres premiers. On lui doit le théorème de Lagrange sur la théorie des groupes, un autre sur les fractions continues ainsi que les équations portant son nom en mécanique analytique. Surtout connu pour avoir introduit la méthode analytique en géométrie, il n'en a pas moins étudié toutes les branches des mathématiques et a laissé d'importants travaux tant en géométrie qu'en trigonométrie et en mécanique.

[7]Adrien-Marie Legendre est né en 1752 et mort 80 ans plus tard. C'est un mémoire sur les *Trajectoires des projectiles dans les milieux résistants* qui lance sa carrière en le faisant gagner le Grand-Prix de l'Académie des Sciences de Berlin en 1782. Ses travaux ont rarement clos un sujet, mais ont plus souvent ouvert la voie à d'autres mathématiciens. Legendre est aussi un spécialiste des intégrales elliptiques, sujet sur lequel il travaille pendant 40 ans. Membre associé de l'Académie des Sciences depuis 1785, il fait partie de l'équipe qui travaille avec les gens de l'observatoire de Greenwich à la mesure du méridien terrestre et à la triangulation de la terre. Avec son ouvrage *Eléments de Géométrie*, il reprend les *Eléments* d'Euclide. Ce livre sera pendant un siècle le texte de référence pour l'apprentissage de la géométrie. Il y démontre aussi l'irrationalité de π.

$$b_1 = a_3 b_2 + b_3 \qquad 0 < b_3 < b_2$$

$$\text{.........} \qquad \text{......}$$

$$b_{n-3} = a_{n-1} b_{n-2} + b_{n-1} \qquad 0 < b_{n-1} < b_{n-2}$$

$$b_{n-2} = a_n b_{n-1}.$$

Puisque tous les nombres b_i ci-dessus sont des nombres strictement positifs, on en déduit que les termes $a_2, a_3, ..., a_n$ sont eux aussi des entiers strictement positifs. En réécrivant ces expressions, on a :

$$\frac{a}{b} = a_1 + \frac{b_1}{b}$$

$$\frac{b}{b_1} = a_2 + \frac{b_2}{b_1}$$

$$\frac{b_1}{b_2} = a_3 + \frac{b_3}{b_2}$$

$$\text{........}$$

$$b_{n-2} b_{n-1} = a_n.$$

Par des divisions successives, on otient donc :

$$\frac{a}{b} = a_1 + \frac{1}{\frac{b}{b_1}} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\frac{b_1}{b_2}}}$$

$$\text{......}$$

$$= a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\cdots \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}} = [a_1, a_2, ..., a_n].$$

L'expression à *plusieurs étages* est appelée *développement du nombre a/b en fraction continue finie*. Celle-ci est dite *simple* si tous les nombres a_i sont des entiers, $1 \leq i \leq n$. On vient de voir son lien étroit avec l'algorithme d'Euclide.

Remarque 3.1 D'après l'algorithme d'Euclide, on peut constater que a_i est un entier strictement positif pour tout i supérieur ou égal à 2. Seul a_1 peut-être nul. Ceci n'est possible que dans le cas où $a < b$.

Remarque 3.2 L'égalité suivante est vraie :

$$[a_1, a_2, ..., a_n] = \frac{1}{[0, a_1, a_2, ..., a_n]}.$$

Nous venons de donner le sens d'une fraction continue simple finie. Il est tout naturel de définir de même une fraction continue simple infinie de la manière suivante.

Définition 3.3 *Une* fraction continue simple infinie $[a_1, a_2, ...]$ *est la limite, si elle existe, de l'expression* $[a_1, a_2, ..., a_n]$ *lorsque* n *tend vers l'infini.*

Remarque 3.4 En réalité, on pourrait démontrer que cette convergence est toujours acquise. On admettra ce fait dans la suite du travail.

3.2 Lien entre nombre irrationnel et fraction continue simple infinie

Le but de cette partie est de montrer que tout nombre irrationnel s'écrit de manière unique comme une fraction continue simple infinie. Pour cela, nous devons démontrer certains théorèmes qui nous conduirons à notre résultat.

Définition 3.5 *Soit* $[a_1, a_2, ...]$ *une* fraction continue simple infinie. *La fraction continue* $C_k = [a_1, a_2, ..., a_k]$ *où* $k = 1, 2, ...$ *est appelée* k-ième réduite *de la fraction* $[a_1, a_2, ...]$. *On a donc à partir de cette notation :*

$$C_1 = [a_1] = a_1.$$

$$C_2 = [a_1, a_2] = a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{a_1 a_2 + 1}{a_2}.$$

Par souci de simplification des écritures ci-dessous, on introduit les suites p_n et q_n définies par :

$$p_0 = 1, \quad p_1 = a_1, \quad p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad \text{où} \quad n \geq 2,$$

$$q_0 = 0, \quad q_1 = 1, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \quad \text{où} \quad n \geq 2.$$

Ceci nous ammène à la proposition suivante.

Proposition 3.6 *Toute réduite C_k de la fraction continue simple infinie $[a_1, a_2, ...]$ satisfait :*

$$C_k = \frac{p_k}{q_k}, \quad \textit{où} \quad k = 1, 2, ...$$

Démonstration : Cette démonstration est élémentaire et se fait par récurrence. □

Théorème 3.7 *Toute fraction continue simple infinie représente un nombre irrationnel.*

Démonstration : Soit $\alpha = [a_1, a_2, ...]$. J'admets le fait suivant : pour tout entier n impair, α est strictement compris entre C_n et C_{n+1}. On en déduit :

$$0 <\mid \alpha - C_n \mid<\mid C_{n+1} - C_n \mid= \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

En multipliant cette dernière equation par q_n, on obtient :

$$0 <\mid q_n\alpha - p_n \mid< \frac{1}{q_{n+1}}.$$

Suposons que $\alpha = a/b$ est un nombre rationnel, avec $b > 0$. Alors l'inégalité ci-dessus devient :

$$0 <\mid q_n a - p_n b \mid< \frac{b}{q_{n+1}}.$$

Les entiers q_n formant une suite qui croît indéfiniment, on peut choisir n suffisamment grand pour que $b < q_{n+1}$. De ceci, on en déduit que l'entier $\mid q_n a - p_n b \mid$ est strictement compris entre 0 et 1, ce qui est impossible. Notre hypothèse de départ est par conséquent fausse. Donc par l'absurde, α est un nombre irrationnel. □

Proposition 3.8 *Si $\alpha = [a_1, a_2, ...]$, alors $a_1 = [\alpha]$, c'est-à-dire que a_1 est la* partie entière *de α. De plus, si $\alpha_1 = [a_2, a_3, ...]$, alors :*

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{\alpha_1}.$$

Démonstration : On pose $\alpha = [a_1, a_2, ...]$, c'est-à-dire

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + ...}}$$

Or, pour tout $i \geq 2$, on a $a_i \geq 1$. En particulier, $a_2 + [a_3, ...]$ est strictement supérieur à 1. Ainsi, on en conclut que $\frac{1}{[a_2, ...]}$ est strictement compris entre 0 et 1. Donc $0 < \alpha - a_1 < 1$, ce qui implique, comme a_1 est un entier, que a_1 est la partie entière de α.
Il est évident que si $\alpha_1 = [a_2, a_3, ...]$, alors $\alpha = a_1 + \frac{1}{\alpha_1}$.
□

Proposition 3.9 *Deux fractions continues simples infinies distinctes convergent vers des valeurs différentes.*

Démonstration : Pour démontrer le théorème ci-dessus, nous allons raisonner une nouvelle fois par l'absurde. En effet, supposons que deux fractions continues simples infinies distinctes convergent vers la même valeur. Posons

$$\alpha = [a_1, a_2, ...] = [b_1, b_2, ...].$$

Donc d'après le théorème précédent, on peut affirmer que

$$[\alpha] = a_1 = b_1$$

et que

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{[a_2, a_3, ...]} = b_1 + \frac{1}{[b_1, b_2, ...]}.$$

C'est pourquoi on peut encore dire que

$$[a_2, a_3, ...] = [b_2, b_3, ...].$$

En réitérant l'argument développé ci-dessus, on obtient que $a_2 = b_2$ et donc on en déduit que $a_n = b_n$ pour tout $n \geq 1$. □

Toutes ces démonstrations nous permettent d'affirmer que toute fraction continue simple infinie représente un nombre irrationnel. Le théorème suivant précise que réciproquement tout nombre qui n'est pas rationnel peut-être représenté par une unique fraction continue simple infinie.

Théorème 3.10 *Tout nombre irrationnel a une représentation unique comme fraction continue simple infinie.*

Exemple 3.11 Le nombre π est un nombre irrationnel qui fascine les mathématiciens depuis de nombreux siècles. Il est connu depuis l'antiquité, en tant que rapport constant entre le périmètre d'un cercle et son rayon, ou encore entre l'aire d'un disque et son rayon. Depuis cette découverte, les nombreuses civilisations successives ont étudié ce nombre fascinant, afin d'en donner une valeur exacte. C'était peine perdue ! C'est Archimède, en 250 av.JC, qui fut le premier à réellement calculer les décimales de π, en utilisant pour la première fois un algorithme. Sa méthode consiste à calculer le périmètre de polygones réguliers inscrits et circonscrits à un cercle qu'on étudie pour en encadrer le périmètre p et donc en déduire un encadrement de π. Archimède a ainsi obtenu :

$$3 + \frac{10}{71} < p < 3 + \frac{1}{7}.$$

On peut ainsi, d'après le théorème énoncé ci-dessus, représenter le nombre π comme une unique fraction continue simple infinie. Après de nombreux calculs, on, obtient ceci :

$$\Pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{\cdots}}}$$

Pour avoir plus de décimales, on peut écrire π comme étant égale à :

$$[3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 12, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, ...].$$

Les mathématiciens d'aujourd'hui tentent de repousser les limites de la connaissance. Les frères Chudnovsky ont ainsi calculé les 4 premières milliards décimales de π en 1994. Cinq ans plus tard, Kanada et Tamura ont battu ce record avec 206 milliards de décimales, en seulement 33 heures de calculs ! Enfin, Kanada battu son propre record en décembre 2002, épaulé par une équipe de neuf chercheurs japonnais. En mettant au point, au bout de cinq années de recherche, un algorithme permettant de calculer ces décimales, cette équipe a ainsi pu obtenir 1 241 100 000 000 décimales, en 400 heures de calculs !
Encore aujourd'hui de nombreux chercheurs s'intéressent à ce nombre π.

Démonstration : Nous allons démontrer que le nombre irrationnel α peut s'exprimer comme une fraction continue simple infinie $[a_1, a_2, ...]$.

Pour commencer, nous allons définir la suite d'entiers $a_1, a_2, ...$ en posant d'abord :

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha - [\alpha]}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - [\alpha_1]}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{\alpha_2 - [\alpha_2]}, ...$$

et par suite :

$$a_1 = [\alpha], \quad a_2 = [\alpha_1], \quad a_3 = [\alpha_2], ...$$

Ainsi, dans le cas général, on définit les a_k par :

$$a_{k+1} = [\alpha_k], \quad \text{où} \quad \alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - a_k} \quad \text{et} \quad k \geq 1.$$

Or, α_k désigne un nombre irrationnel pour tout $k \geq 1$ et

$$0 < \alpha_k - a_{k+1} = \alpha_k - [\alpha_k] < 1.$$

On a donc

$$\frac{1}{\alpha_k - a_{k+1}} > 1,$$

c'est-à-dire,

$$\alpha_{k+1} > 1.$$

Par conséquent, comme $a_{k+1} = [\alpha_k]$, on peut affirmer que les entiers a_{k+1} sont tous supérieurs ou égaux à 1 ($a_{k+1} \geq 1$) pour tout $k \geq 1$. Il en découle ainsi que tous les entiers $a_1, a_2, ...$ sont strictements positifs, sauf peut-être a_1 (voir remarque 3.1). Ainsi, l'équation

$$\alpha_{k-1} = a_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}}$$

conduit à

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{\alpha_2} = [a_1, \alpha_2] = [a_1, a_2 + \frac{1}{\alpha_3}] = [a_1, a_2, \alpha_3] = ... = [a_1, a_2, ..., a_{m-1}, \alpha_m].$$

Nous venons de démontrer que α est une fraction continue simple infinie $[a_1, a_2, ...]$, qui est unique, (voir proposition 3.9). On a ainsi démontré que si α est irrationnel, alors on peut le représenter comme une unique fraction continue simple infinie. □

3.3 Mot de billard et pente irrationnelle

Je rappelle qu'on étudie ici le cas où la pente α de la droite représentant la trajectoire de la boule de billard est irrationnelle. On munie le plan d'un quadrillage, traversé par la droite Δ représentant la trajectoire. Comme pour la première partie, on associe à cette trajectoire un mot mécanique. L'intersection de Δ et d'une ligne horizontale se traduit par un a, et l'intersection avec une ligne verticale par un b, a et b étant les deux lettres de notre alphabet A. Nous nous plaçons dans cette partie dans le cas où $\alpha > 1$. Nous avons démontré dans la sous-partie précédente que tout nombre irrationnel peut s'écrire sous la forme d'une unique fraction continue simple infinie. Ainsi, on pose

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}},$$

avec $[a_1, a_2, ...]$ la fraction continue simple infinie représentant α. On a donc $a_1 = [\alpha]$. Comme $\alpha > 1$, on en déduit que Δ ne coupe jamais deux fois de suite une ligne verticale. Un graphe suffit pour illustrer ceci (Figure 5).

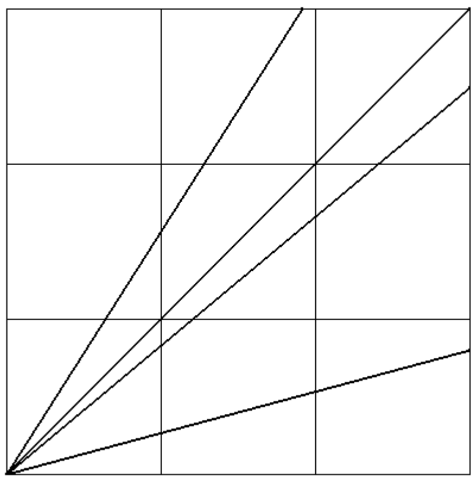

Figure 11

Par conséquent, le mot mécanique associé à Δ comporte des séries de b, séparées par un seul a. Combien de b peut-il avoir dans un seul et même bloc ? La proposition suivante répond à cette question.

Proposition 3.12 *Le nombre de b dans un bloc est égal soit à a_1 soit à $a_1 + 1$.*

Démonstration : La démonstration qui suit s'appuie sur un graphe très explicite.

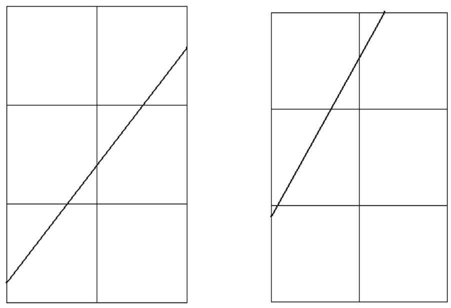

Figure 12

Rappelons que l'ordonnée à l'origine y est comprise strictement entre 0 et 1.
Montrons d'abord que le nombre de b dans un bloc est supérieur ou éagl à a_1. Pour cela, il suffit que $\alpha + y > a_1$. Or, on sait déjà que $\alpha > a_1$ car $a_1 = [\alpha]$. De plus, par hypothèse, $y > 0$. Ainsi, on a bien $\alpha + y > a_1$.
Montrons maintenant que le nombre de b ne peut-être strictement supérieur à $a_1 + 1$. Pour cela, il suffit que $\alpha + y < a_1 + 2$. Or, $\alpha < a_1 + 1$ et $y < 1$. Donc $\alpha + y < a_1 + 2$.
□

Nous venons donc de démontrer que dans un seul et même bloc nous ne pouvions avoir qu'un nombre restreint de b, a_1 ou $a_1 + 1$. La question que l'on peut se poser est la suivante : Combien de b peut-il y avoir dans un segment de mot composé de k blocs ? Il se trouve que cette réponse est donnée par le corollaire suivant.

Corollaire 3.13 *Le nombre N de b dans un segment composé de k blocs satisfait l'inégalité : $k\alpha - 1 < N < k\alpha + 1$.*

Démonstration : On pose N le nombre de b dans un segment de mot mécanique. N est donc un entier, de même que k qui représente le nombre de blocs dans le segment considéré. En sachant que $\alpha > 1$ est la pente de la droite, on pose $M = k\alpha$ pour $k > 0$. M est par conséquent la différence entre l'ordonnée du point de la droite à l'abscisse k et l'ordonnée à l'origine (voir Figure 13).

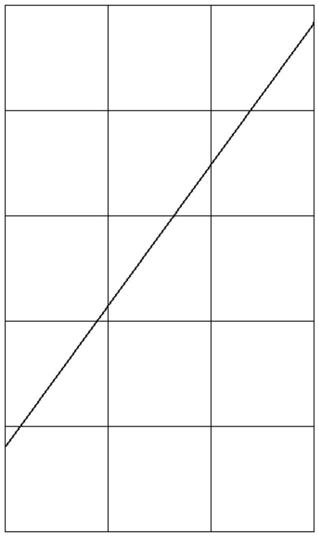

Figure 13

On remarque qu'il est évident que

$$| M - N |< 1$$

c'est-à-dire

$$M - 1 < N < M + 1.$$

En remplaçant M par $k\alpha$ on obtient :

$$k\alpha - 1 < N < k\alpha + 1.$$

□

Remarque 3.14 Ce corollaire implique qu'il n'y a que deux valeurs différentes possibles pour N. De plus, si $\alpha < 1$, on inverse les rôles de a et b et on modifie l'inégalité en remplaçant α par $\frac{1}{\alpha}$. Ceci est dû au fait que les droites de pente α et $\frac{1}{\alpha}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Le rôle que joue a_1 dans le mot de billard, a_1 étant le premier entier de la fraction continue simple infinie représentant α et par conséquent sa partie entière, vient d'être clairement établi. Ainsi, deux mots de billard engendrés par deux pentes différentes mais de même partie entière auront le même nombre de b possible dans un bloc. Où donc se trouve la différence entre les deux mots de billard, engendrés par ces deux irrationnels distincts ? On imagine facilement que ce sont les entiers suivants dans l'expression de

la fraction continue qui vont permettre de les distinguer ; mais de quelle manière ?
Nous pouvons d'ores et déjà énoncer la proposition suivante.

Proposition 3.15 *Un mot de billard engendré par un nombre irrationnel α de partie entière a_1 ne peut comporter deux séquences consécutives de la forme ab...b comprenant*
- a_1 *b si* $\alpha - a_1 > 1/2$,
- $a_1 + 1$ *b si* $\alpha - a_1 < 1/2$.

Démonstration : Rappelons que d'après le corollaire 3.13, le nombre total N de b dans deux blocs successifs satisfait l'inégalité suivante :

$$2\alpha - 1 < N < 2\alpha + 1.$$

Supposons $\alpha - a_1 > \frac{1}{2}$. On a donc $2\alpha > 2a_1 + 1$, et ainsi $N > 2a_1$. Donc dans ce cas on ne peut avoir deux séquences de a_1 b consécutives.
Supposons : $\alpha - a_1 < \frac{1}{2}$. On a donc $2\alpha < 2a_1 + 1$, et ainsi $N < 2a_1 + 2$. Donc on ne peut pas avoir deux séquences de $a_1 + 1$ b consécutives. □

Plaçons nous dans le cas où $\alpha - [\alpha]$ est strictement inférieur à 1/2. La proposition démontrée précédemment nous permet d'affirmer que le mot mécanique engendré par $\alpha = [a_1, a_2, ...]$ est composé de plusieurs séquences de la forme $ab...b$ comprenant a_1 b, séparées par une seule séquence $ab...b$ composée de $a_1 + 1$ b. Pour simplifier la compréhension et faciliter l'écriture, notons b' une séquence comportant a_1 b précédés d'un a, et a' une séquence comportant $a_1 + 1$ b précédés d'un a. On regarde donc le nombre de b' successifs qu'il peut y avoir avant de rencontrer un a'.

Nous allons voir, avec l'exemple de π, que ce nombre est donné par a_2. On note v le mot engendré par le nombre irrationnel π, avec pour ordonnée à l'origine $y = 0$. On rappelle que la fraction continue simple infinie représentant π est la suivante :

$$[3, 7, 15, 1, 292, ...].$$

Ici, $a_1 = 3$. On remarque déjà que la proposition 3.12 est vérifiée : v est composé de blocs de b de longueur 3 ou 4. Pour étudier v, nous l'exprimons avec les lettres a' et b' définis précédemment. On a donc

$$v = b'b'b'b'b'b'b'a'b'b'b'b'b'b'a'b'b'b'b'b'b'a'...$$

On peut remarquer que ce mot est composé de 6 ou 7 b' avant de trouver un a'. v est donc composé de séquences de a_2 ou $a_2 - 1$ b', séparées par un a' isolé. De même, en remplaçant les séquences $b'...b'a'$ composées de $a_2 - 1$ b' par un b'' et les séquences $b'...b'a'$ composées de a_2 b' par un a'', on aurait 15 ou 14 séquences de b'' avant de rencontrer un a'' isolé.

On peut bien évidemment répéter cette opération indéfiniment, ce qui laisse penser que tous les entiers a_i dans la fraction continue jouent un rôle similaire, mais à une échelle différente (et c'est le cas, mais nous ne nous y attardons pas d'avantage).

4 Mots sturmiens

Nous étudions désormais les mots que Charles Sturm a lui-même définis et qui portent son nom : les mots sturmiens.

4.1 Définition des mots sturmiens et équilibrés

Définition 4.1 *Un mot infini u est dit* sturmien *si,* $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(u) = n+1$ *; c'est-à-dire s'il contient exactement $n+1$ facteurs différents de longueur n.*

Définition 4.2 *Soit u un mot infini ou non sur A. On note $\mid v \mid_x$ le nombre d'occurences de la lettre x dans le mot ou sous-mot v.*
On dit que u est équilibré *si pour tout entier n et pour tous facteurs v et w de u de longueur n on a*

$$|| v |_x - | w |_x| \leq 1, \quad \forall x \in A.$$

Ici, on a $x = a$ ou $x = b$.

Autrement dit, dans notre étude des mots mécaniques ou de Christoffel, un mot u est équilibré si le nombre de a (respectivement de b) dans deux de ses facteurs de même longueur diffère de 0 ou 1.

4.2 Propriété des mots équilibrés

Proposition 4.3 *Si un mot u est équilibré, alors il en est de même pour l'ensemble de ses facteurs de longueur quelconque.*

Exemple 4.4 Prenons pour exemple le mot u suivant :

$$u = bbabbbab.$$

Regardons l'ensemble de ses facteurs de longueur 3 :

$$L_3(u) = \{bba, bab, abb, bbb\}.$$

On remarque que cet ensemble vérifie de manière nécessaire le fait que u est équilibré. On remarque de même que ses facteurs de longueur 3 sont eux aussi équilibrés. Pour le premier d'entre eux, les deux facteurs de longueur 2 sont bb et ba. Il y a donc bien une différence de un b et un a entre les deux.

Démonstration : Nous allons montrer la proposition énoncée ci-dessus en montrant la contre-apposée. Cela revient à montrer que si au moins un des facteurs d'un mot n'est pas équilibré, alors ce même mot n'est pas équilibré. Posons v un mot de longueur m et non équilibré. Supposons de plus que v est un facteur d'un mot u infini ou de longueur n, $n \geq m$. Si v n'est pas équilibré, cela signifie que le nombre de a ou de b entre deux de ses facteurs de longueur l, $l \leq m$, au moins, diffère de 2 ou plus. Or, il est évident que les facteurs de longueur l de v sont des facteurs de u. On en déduit qu'au moins deux facteurs de u de longueur l, $l \leq n$, ne vérifient pas la condition d'équilibre. Ainsi, u n'est pas équilibré, ce qu'il fallait démontré. □

4.3 Propriétés des mots sturmiens

Proposition 4.5 *Un mot infini périodique n'est pas sturmien.*

Exemple 4.6 L'exemple suivant servira de preuve à cette proposition.
Prenons un mot infini $u = abaab\ abaab\ abaab$...On constate que ce mot est périodique de période $abaab$ composé de cinq lettres. Question : Que vaut P_5 ? Autrement dit, combien de facteurs différents de longueur 5 comporte u ?
Nous allons les énumérer : il y a $f_1 = abaab$, $f_2 = baaba$, $f_3 = aabab$, $f_4 = ababa$ et $f_5 = babaa$. Si on regarde le facteur suivant, on retombe sur le premier qui est $abaab$. Ainsi, on a $P_5(u) = 5$ et non $P_5(u) = 6$. Donc ce mot u est périodique et non sturmien. A partir de cet exemple, on peut généraliser en affirmant qu'aucun mot périodique n'est sturmien.

Remarque 4.7 On dit qu'un mot sturmien est un mot de complexité minimum parmi les mots non périodiques. La complexité $n + 1$ signifie que lorsqu'on considère les facteurs d'un mot de longueur n, il existe un seul facteur U tel que Ua et Ub soient facteurs de ce mot, c'est-à-dire qu'il est prolongeable à droite de deux manières différentes alors que les autres facteurs sont prolongeables à droite d'une manière unique.

Théorème 4.8 *Un mot u est un mot de billard (ou mécanique) engendré par une pente irrationnelle si et seulement si il est sturmien.*

Démonstration : On suppose que la pente de la droite définissant un mot de billard u est irrationnelle. Pour montrer que u est sturmien, il suffit de montrer que $P_n(u) = n + 1 \;\; \forall n$. On le démontre par récurrence.

On se place arbitrairement dans le cas où la pente α est strictement supérieure à 1, c'est-à-dire que u est composé de blocs de b de longueur a_1 ou $a_1 + 1$, avec $a_1 = [\alpha]$, séparés par des a isolés. Pour le rang $n = 1$, c'est évident car $L_1(u) = A = \{a, b\}$. Donc $P_1(u) = 2$. Ainsi la propriété est vérifiée au premier rang.
Supposons maintenant que cette propriété est vraie au rang $n-1$. Parmis les n facteurs de longueur $n - 1$, montrons qu'il y en a un et un seul que l'ont peut prolonger en un facteur de longueur n de deux manières différentes (on dira qu'il est *biprolongeable*). On distingue deux cas. Tout d'abord si $n \leq a_1$, alors le seul facteur de longueur $n - 1$ qui soit biprolongeable est celui où a n'apparait pas. Ensuite si $n > a_1$ alors un facteur de longueur $n - 1$ est biprolongeable si et seulement si il se termine par un a suivi d'un bloc de a_1 b. Le lemme suivant nous permet donc de conclure :

Lemme 4.9 *Quel que soit $n > a_1$, il y a un et un seul facteur de longueur $n - 1$ qui se termine par un a suivi d'un bloc de a_1 b.*

Démonstration du lemme : Nous allons démontrer ce lemme par récurrence. Parmis les sous-mots de longueur $a_1 + 1$, il y en a un seul qui se termine par exactement a_1 b ($ab...b$). Ainsi la propriété est vérifiée au premier rang.
Supposons maintenant que le lemme est vrai au rang $n - 1$, cést-à-dire quíl existe un seul mot u de longueur $n - 1$ qui se termine par exactement a_1 b. Supposons maintenant par l'absurde que parmis les facteurs de longueur n il y en a deux qui se terminent par exactement a_1 b : au et bu. Distinguons trois cas. Si u commence par moins de a_1 b, alors le facteur au est impossible. Si u commence par $a_1 + 1$ b alors le facteur bu est impossible. Enfin, si u commence par a_1 b, alors les deux facteurs sont en principe possibles. Cela signifie que u est biprolongeable à gauche et à droite, or nous verrons plus loin que ceci est impossible. Donc il n'existe qu'un seul facteur de longueur n qui se termine par exactement a_1 b. La propriété est donc vraie pour tout entier $n > a_1$. □

On a ainsi montré que tout mot de billard engendré par une pente irrationnelle est sturmien.

Pour montrer l'implication réciproque, il suffit de montrer que tout mot sturmien est un mot mécanique (puisque l'on sait déjà que les mots sturmiens ne peuvent pas être périodiques). Nous allons seulement donner une idée de la démonstration. Soit m un mot sturmien. On pose $a_1 = k - 2$ avec k qui est la longueur du plus petit facteur de m comprenant deux fois la lettre a. En s'inspirant de la discussion concernant le nombre π dans la section préc'edente, on pourrait définir de même des nombres a_i pour $i \geq 2$; associant ainsi une fraction continue au mot sturmien m. Ce dernier s'avère être par construction le mot mécanique associé à cette fraction continue. Donc tout mot sturmien est mécanique. □

Théorème 4.10 *Un mot infini u est sturmien si et seulement si il est non-périodique et équilibré.*

Démonstration : Pour démontrer cette équivalence, nous allons utiliser trois implications dites circulaires :

- tout mot sturmien est mécanique et non périodique,
- tout mot mécanique de pente irrationnelle est équilibré et non périodique,
- tout mot équilibré et non périodique est sturmien.

Tout mot sturmien est mécanique et non périodique

On sait déjà que cette implication est vérifiée grâce à l'équivalence définie par le théorème 4.8.

Tout mot mécanique de pente irrationnelle est équilibré et non périodique

Pour montrer cette implication, on va utiliser une nouvelle fois le fait que le mot mécanique issu d'une droite de pente irrationnelle α est composé de blocs de b (en supposant encore que $\alpha > 1$) de longueur a_1 ou $a_1 + 1$, avec encore $a_1 = [\alpha]$, séparés entre eux par un a. Comme nous n'avons que deux lettres distinctes dans les mots mécaniques, il suffit de montrer par exemple que le nombre de a dans chaque facteur de longueur n de u ne diffère que de 1 ou 0.
Si $n \leq a_1 + 1$, alors il est évident que chaque facteur de u comporte soit aucun a, soit un seul. En effet, deux a sont séparés par soit a_1 b, soit $a_1 + 1$ b.
Si $a_1 + 2 \leq n \leq 2(a_1 + 1)$, alors chaque facteur de u comporte soit un seul a, soit deux. Le plus long facteur de u ne comportant pas de a est de longueur $a_1 + 1$, correspondant à un bloc maximal de b.

Donc de manière récursive, on constate bien une différence de un a au maximum entre deux facteurs de même longueur d'un mot mécanique dont la pente est irrationnelle. On a vu auparavant qu'un tel mot mécanique n'est pas périodique. Donc ce mot est équilibré et non périodique, ce qu'il fallait démontrer.

Tout mot équilibré et non périodique est sturmien

On suppose que u est un mot équilibré et non périodique. On veut établir la propriété suivante :

$$\forall n \in N, \quad P_n(u) = n + 1.$$

On raisonne par récurrence.
Pour $n = 1$, les seuls facteurs possibles sont les lettres a et b. De plus, ces lettres apparaissent toutes deux sinon le mot serait périodique. Donc $P_1(u) = 2$, et ainsi la propriété est vérifiée au premier rang $n = 1$.
Supposons que cette propriété est vraie pour tout k inférieur à n, c'est-à-dire que $P_k(u) = k+1, \quad \forall k \leq n$. Ne perdons pas de vue que u est non périodique.
Démontrons que cette propriété est vraie au rang $n + 1$.
Soit V un facteur de u de longueur $n + 1$:

$$V \in L_{n+1}(u).$$

Il existe X et Y deux lettres de l'alphabet A et W un facteur de u de longueur $n - 1$ tels que :

$$V = XWY.$$

Comme W est un facteur de longueur $n - 1$, parmi tous les W possibles, il n'y en a qu'un qui est biprolongeable à droite. On le note W_d. De même, parmi tous les W possibles, il n'y en a qu'un qui est biprolongeable à gauche. On le note W_g.
On suppose que $W_d \neq W_g$. Parmi les n facteurs de u de longueur $n - 1$, il y en a :

- $n - 2$ pour lesquels on ne peut prolonger que d'une unique manière à gauche et à droite,
- 1 pour qui on peut prolonger de 2 manières à gauche : XW_gX et YW_gX (ou XW_gY et YW_gY),
- 1 pour qui on peut prolonger de 2 manières à droite : XW_dX et XW_dY (ou YW_gX et YW_gY).

Donc on a $P_{n+1}(u) \leq n+2$, si $W_d \neq W_g$. Il faut donc montrer cette supposition, c'est-à-dire montrer que $W_d \neq W_g$.

Nous allons raisonner une nouvelle fois par l'absurde. Supposons que

$$W_g = W_d = W$$

et comporte a_1 b et donc $n-1-a_1$ a. W est donc biprolongeable à gauche et à droite. On a :

$$aWa \in L_{n+1}(u) \text{ avec } \mid W \mid_b = a_1 \text{ et } \mid W \mid_a = n+1-a_1$$

$$bWb \in L_{n+1}(u) \text{ avec } \mid W \mid_b = a_1+2 \text{ et } \mid W \mid_a = n-1-a_1$$

On a ainsi les équations suivantes :

$$|| \, aWa \mid_b - \mid bWb \mid_b| = || \, aWa \mid_a - \mid bWb \mid_a| = 2.$$

Or, on a précédemment vu, par le biais de la proposition 4.3, que si u est équilibré, alors ses facteurs aussi. Par conséquent, les équations précédentes sont absurdes, car les deux différences devraient être égales à 0 ou 1. Ainsi, notre hypothèse est fausse. On en conclut que $W_d \neq W_g$.

Ainsi, avec ce qui est vient d'être prouvé, on a bien $P_{n+1}(u) \leq n+2$. Pour montrer l'égalité, on utilise, comme pour le cas $n=1$, le fait que u est non périodique. On pourait montrer que si un des facteurs n'était pas dans u, alors on obtiendrait une contradiction.

On a donc

$$P_{n+1}(u) = n+2.$$

Ainsi, par récurrence, si un mot est équilibré et non périodique, alors il est sturmien.

Nous avons ainsi montré, par trois implications circulaires, que tout mot sturmien est équilibré et non périodique, et réciproquement. □

Conclusion

Le travail que nous venons d'aborder nous a ammenés à explorer certaines facettes du billard. Nous avons étudié la trajectoire d'une boule sur une table rectangulaire ou carrée, notion concrète. Puis, à partir de ceci, nous avons défini de multiples classes de mots et exploré les différentes relations qui existent entre eux, notions plus abstraites.
Cette étude concerne une partie des mathématiques très intéressante à étudier et qui change de l'univers que l'on étudie habituellement dans le cursus universitaire. Certains étudiants ont d'ailleurs choisi des thèmes similaires pour sujets de thèse, comme les combinatoires sur les mots pour Cyril Allauzen en 2001, ou l'étude du billard dans un polyèdre pour Nicolas Bedaride il y a deux ans.