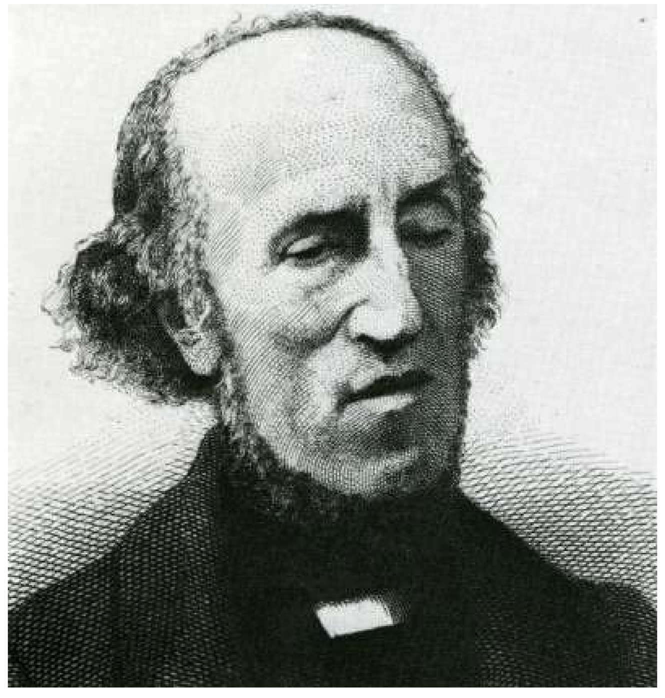
UNIVERSITÉ MONTPELLIER II
SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC

Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier

Université Montpellier II - CNRS

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Mathématiques et Bulles de Savon



J.A.F. Plateau
(1801-1883)

Expériences et constatations physiques

Les premières expériences autour des bulles de savon datent du XIX° siècle. Le principal artisan en est le physicien belge J.A.F. Plateau qui s'aperçut qu'un contour fermé simple en fil de fer peut servir de support à au moins un film de savon.

Par application du principe du travail potentiel de Bernoulli, le système observé au repos est caractérisé par le fait que son énergie potentielle est minimale. Par ailleurs, un film de savon se comportant à bien des égards comme une membrane élastique, les physiciens font l'hypothèse que l'énergie potentielle augmente avec l'aire.

Ainsi, *les films de savon observés par Plateau sont les membranes d'aire minimale s'appuyant sur un contour.*

Formulation mathématique

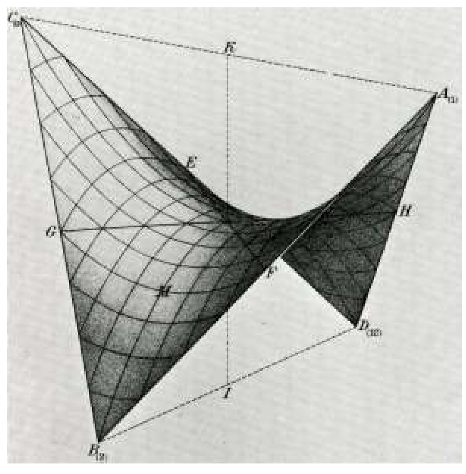
Dans l'approche mathématique du problème, le contour en fil de fer devient une courbe fermée de l'espace, et le film de savon devient une surface bordée par cette courbe.

Les observations de Plateau ont conduit au problème suivant que les mathématiciens appellent le « problème de Plateau » : *étant donné une courbe fermée simple C dans l'espace, montrer qu'il existe une surface bordée par C qui soit d'aire minimale*.

Ce problème fut très stimulant pour les mathématiciens du XIX° siècle. En 1865, H.A. Schwarz trouvait les premières solutions pour certains contours polygonaux, mais le cas général restait difficile, comme le notait G. Darboux en 1914 : « Jusqu'à présent, l'analyse mathématique n'a pu inventer une méthode qui nous permette d'attaquer ce beau problème ».

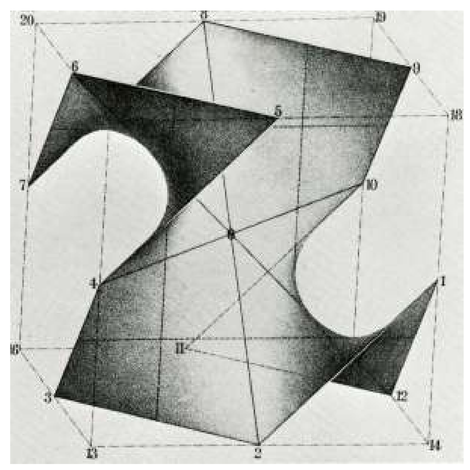
C'est finalement à partir de 1928 que les méthodes développées indépendamment par J. Douglas et T. Radò permirent de résoudre le problème de Plateau.

Une solution du problème de Plateau dans un cas simple

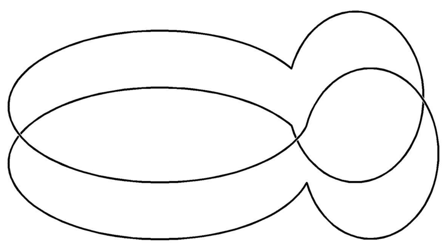


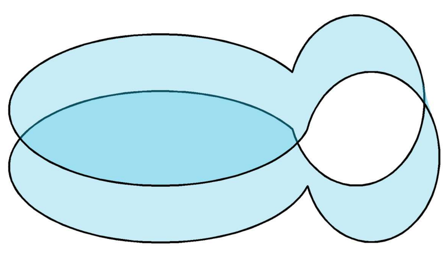
La figure ci-contre montre une surface minimisant l'aire pour un contour formé par quatre des arêtes d'un tétraèdre régulier. Schwarz a trouvé cette solution du problème de Plateau en 1865.

Comme l'avait remarqué B. Riemann, la présence de segments de droites sur le contour permet d'étendre cette surface par réflexion autour de ces droites. Les angles au sommet étant égaux à $\pi/3$, Schwarz a pu construire une nouvelle surface minimale à partir de six exemplaires de la première.

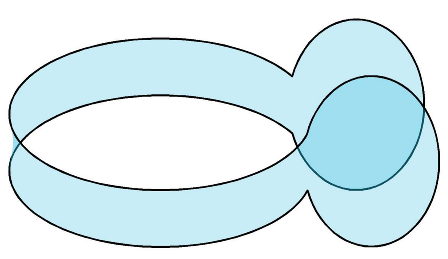


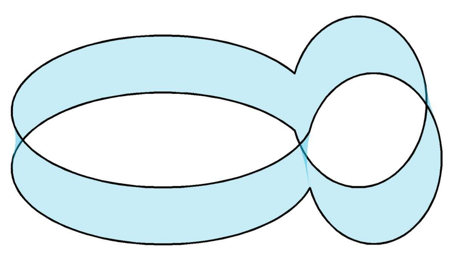
Un exemple plus compliqué...





La courbe fermée représentée ci-dessus borde plusieurs surfaces minimales (i.e. de courbure moyenne nulle) dont trois sont représentées à droite. Résoudre le problème de Plateau, c'est montrer que parmi toutes les surfaces minimales bordées par la courbe, il y en existe une d'aire plus petite que les autres.





L'équation des surfaces minimales et les premiers exemples

Pour aborder le problème de Plateau, les mathématiciens ont commencé par s'intéresser aux propriétés géométriques des surfaces minimisant l'aire. La principale est une propriété de courbure découverte par L. Lagrange en 1760 : *la courbure moyenne des surfaces minimisant l'aire est nulle.*

Les mathématiciens se sont donc intéressés aux surfaces de courbure moyenne nulle, à qui ils ont donné le nom de surfaces minimales (ce qui est un peu abusif dans la mesure où certaines surfaces minimales bordées par une courbe *C* ne minimisent pas l'aire parmi toutes les surfaces bordées par *C*).

Dans la foulée des travaux de Lagrange, Meusnier trouvait les deux premiers exemples de surfaces minimales qui ne soient pas planes : le catenoïde et l'hélicoïde.

Au XIX° siècle, K. Weierstrass trouvait une méthode permettant de produire aisément des surfaces minimales. Cette méthode fut très utilisée pour construire de nouveaux exemples, mais ne permit pas de résoudre le problème de Plateau.

Ensuite, si les travaux de Douglas et Radò prouvaient l'existence de surfaces minimales s'appuyant sur un contour donné, leurs méthodes ne permettaient pas de les construire explicitement. Ainsi, très peu d'exemples ont vu le jour entre les années 1900 et 1980