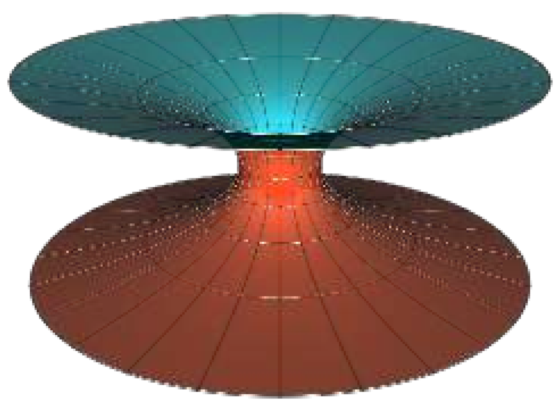
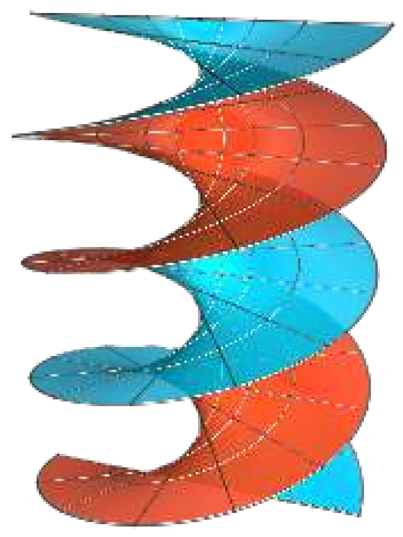
Quelques exemples classiques

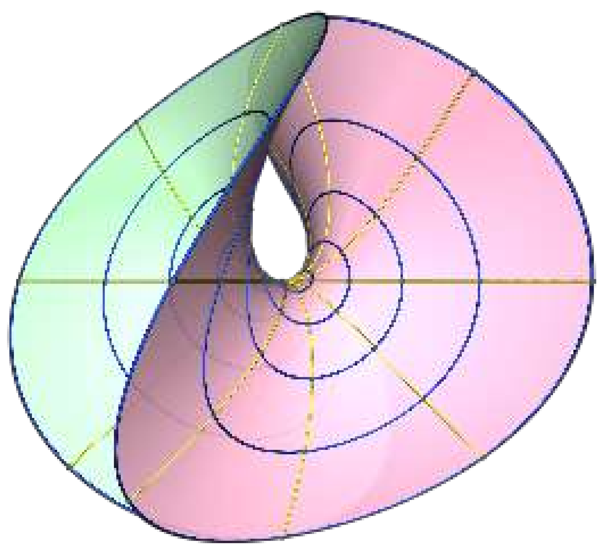


Catenoïde

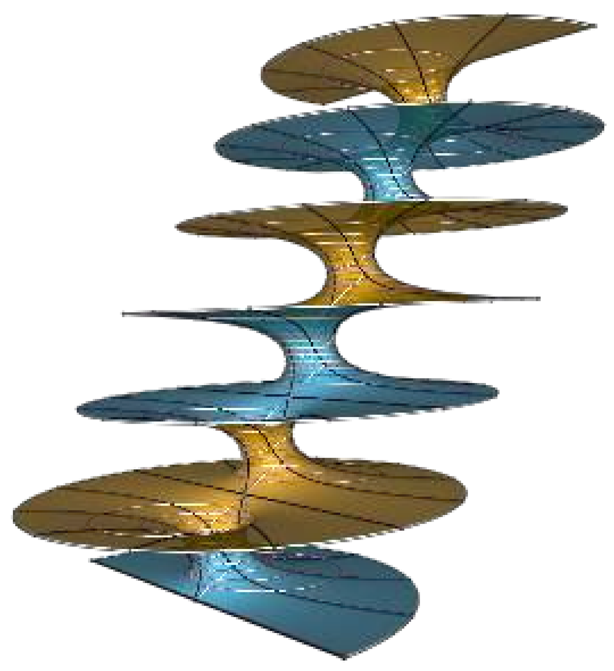


Hélicoïde

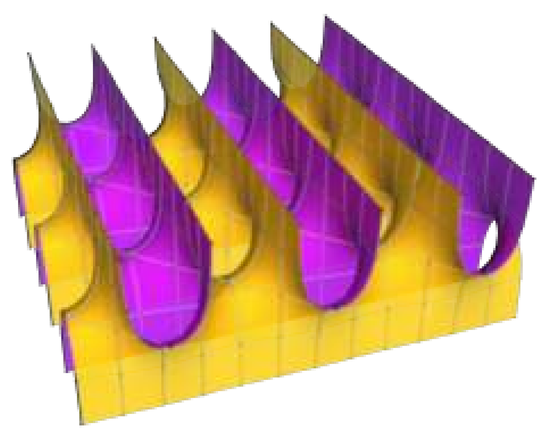
Le catenoïde et l'hélicoïde sont les premiers exemples de surfaces minimales non planes (découverts par Meusnier à la fin du XVIII° siècle). Le catenoïde est la seule surface minimale de révolution non plane. La forme de l'hélicoïde était connue avant Meusnier, et avait notamment été utilisée en architecture (cf. par exemple l'escalier à double révolution du château de Chambord). Les surfaces d'Enneper, de Riemann, de Sherk et de Schwarz ont été découvertes au XIX° siècle. Entre autres particularités, la surface d'Enneper possède des auto-intersections (si on la prolonge, elle se recoupe elle-même le long de deux courbes). Les surfaces de Riemann et de Scherk possèdent une infinités de bouts asymptotes à des plans ou des demi-plans. La surface de Schwarz est périodique dans les trois directions de l'espace.



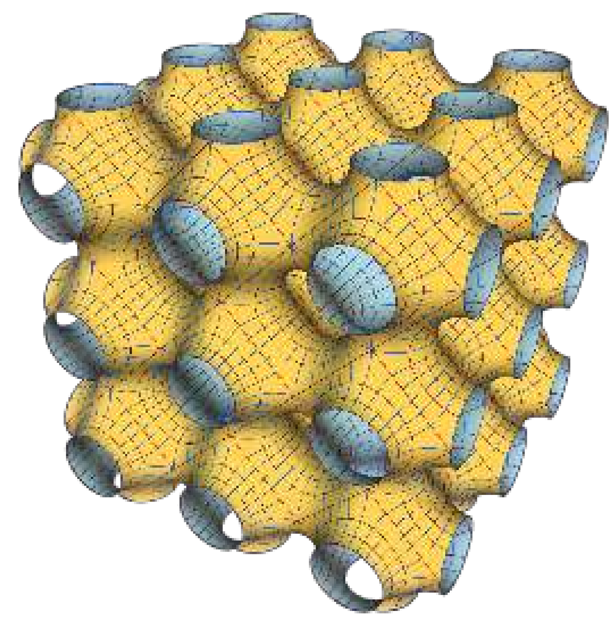
Surface d'Enneper



Surface de Riemann



Surface de Scherk

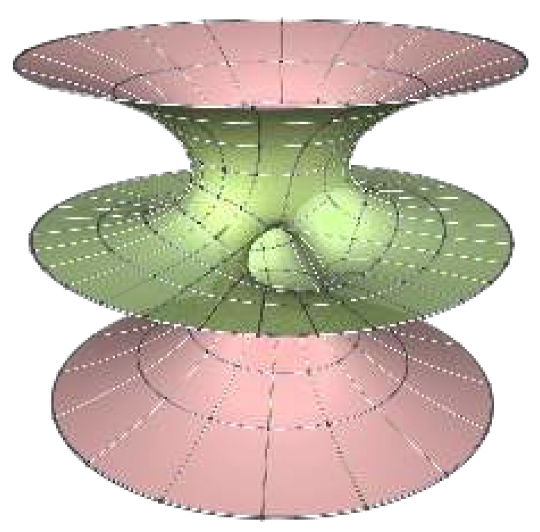


Surface P de Schwarz

L'utilisation de l'outil informatique

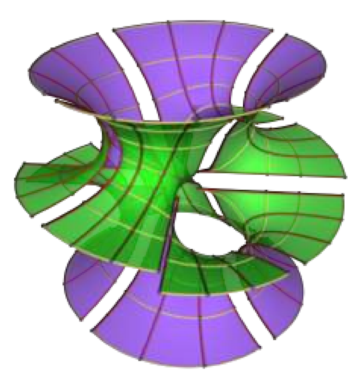
L'ordinateur fut utilisé dès le début des années '80 comme outil de visualisation ; cette utilisation se révéla cruciale, en particulier pour l'étude de la surface de Costa. Peu après , la banalisation de l'outil informatique conjugué à l'apparition de nouvelles méthodes de construction permettait à la collection des surfaces minimales de s'enrichir rapidement de nouveaux exemples. On dispose en particulier de méthodes permettant de recoller des bouts ou d'ajouter des anses à certaines surfaces minimales connues.
Aujourd'hui, l'étude des surfaces minimales aborde à la fois des problèmes théoriques (par exemple, théorèmes d'existence ou de non-existence de surfaces minimales ayant une forme donnée) et des problème numériques (représentation graphique de surfaces dont l'existence a été prouvée, ou recherche de nouveaux exemples par des méthodes de calculs numériques).

La surface de Costa



Jusqu'en 1984, le plan, l'hélicoïde et le catenoïde étaient les seules surfaces minimales « simples » connues. Les autres avaient des auto-intersections (comme la surfaces d'Enneper) ou une infinité d'anses ou de bouts (comme les surfaces de Riemann, de Scherk et de Schwarz). En 1984, C. Costa trouvait la surface ci-contre qui possède un nombre fini d'anses et de bouts ; restait à démontrer qu'elle n'avait pas d'auto-intersections.

Ceci fut fait par D. Hoffman et W. Meeks grâce à l'aide de l'ordinateur : « ...grâce aux programmes graphiques élaborés par J. Hoffman, nous avons pu voir la surface selon différents angles et constater qu'elle était symétrique(...). En utilisant cette symétrie, nous avons prouvé que la surface pouvait être décomposée en huit parties congrues, une par octant. Ceci nous a permis de nous concentrer sur des parties plus petites et de démontrer que chacune de ces parties, comme la surface tout entière, satisfaisait aux critères.(...). L'ordinateur nous a guidé pendant la construction d'une démonstration formelle»



La surface de Costa découpée en 8 parties identiques

Surfaces construites par recollement de bout et ajout d'anses

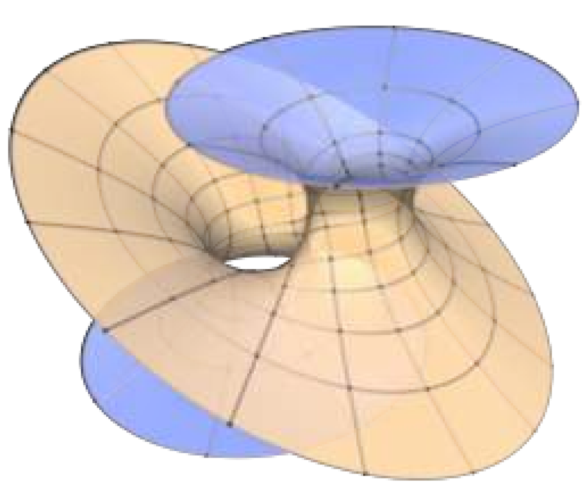


Figure 1

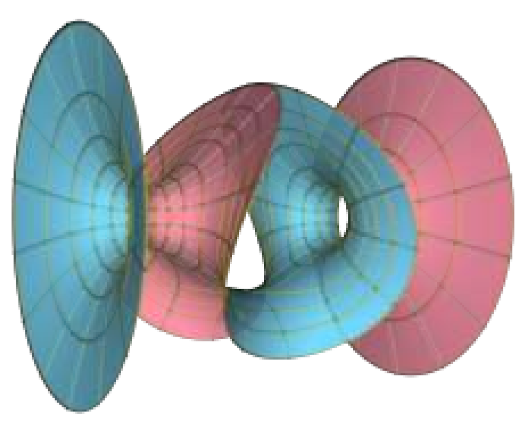


Figure 2

En présence de symétrie, il est possible d'ajouter une « anse » à une surface minimale, c'est à dire recoller un « tube » à la surface par ses deux extrémités. La figure 3 représente la surface de Chen-Gackstatter qui peut être obtenue en recollant une anse à la surface d'Enneper. En recollant deux bouts de type caténoïde à un caténoïde, et en ajoutant une anse à la surface ainsi obtenue, on obtient la surface de la figure 4

On appelle « bout » d'une surface une partie qui peut être prolongée indéfiniment ; on les distingue par les surfaces les plus simples ou ils apparaissent (on parle par exemple de bouts de type plan, de type caténoïde, de type Enneper,...). Dans certaines situations, on peut recoller un ou plusieurs bouts à une surface minimale. Les deux surfaces ci-dessus sont construites par recollements de deux bouts de type caténoïde à un plan (figure 1) et à une surface d'Enneper (figure 2).

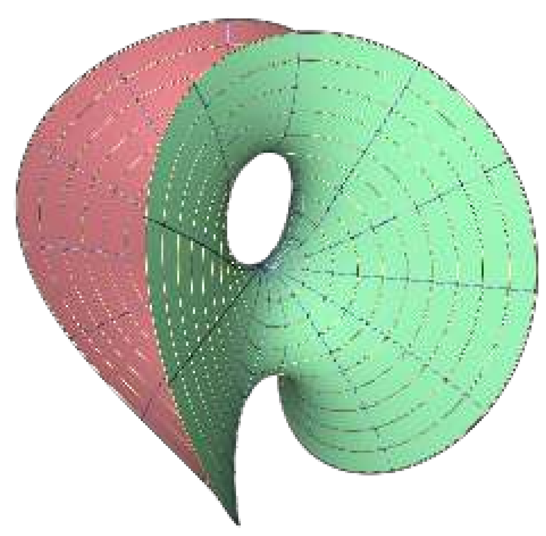


Figure 3

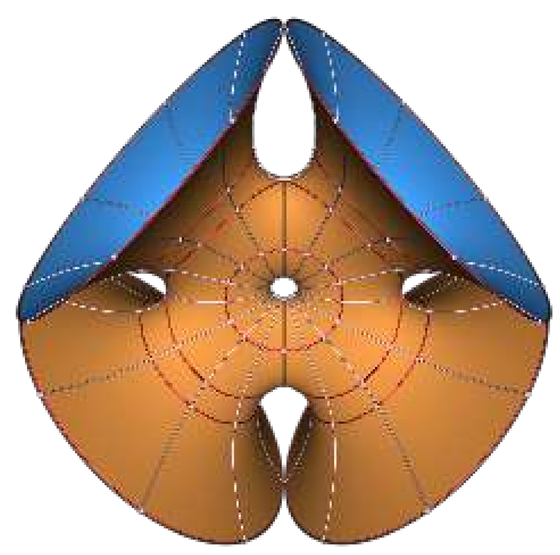


Figure 4