

### Une propriété importante des surfaces minimales

Les surfaces minimales sont des objets « rigides » : une portion de la surface, aussi petite soit-elle, détermine la surface toute entière (par exemple, la seule surface minimale contenant une partie plane est le plan tout entier). Ainsi, on ne peut pas déformer une surface minimale à un endroit donné sans la déformer globalement.

Cette propriété des surfaces minimales rend particulièrement difficile le recollement de bouts et l'ajout d'anses, tant du point de vue théorique que du point de vue numérique. Par exemple, la surface obtenue en rajoutant deux bouts de type caténoïde à un plan ne contient aucune portion de plan et aucune portion de caténoïde...

### Quelques exemples de plus...

Il existe plusieurs moyens de classer les surfaces minimales. On les présente ici suivant leurs périodicités. Certaines sont constituées d'une brique élémentaire qui se répète dans une direction (surfaces simplement périodiques), dans deux directions (surfaces doublement périodiques) ou dans trois directions (surfaces triplement périodiques). D'autres n'ont pas de périodicités.

### Surfaces minimales simplement et doublement périodiques

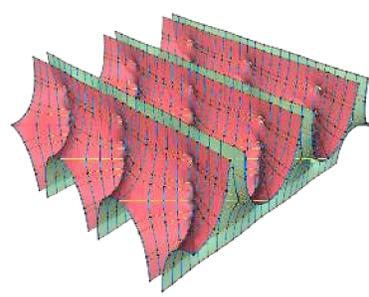


Figure 1

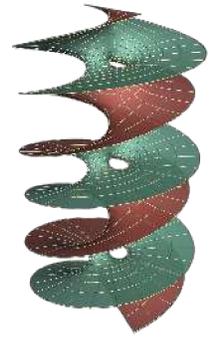


Figure 2

Le recollement de bouts et l'ajout d'anses peut se faire périodiquement pour obtenir de nouvelles surfaces périodiques à partir de surfaces connues : on peut ainsi ajouter des anses à une surface de Scherk pour obtenir une surface doublement périodique (figure 1), ou à un héliçoïde pour obtenir une surface simplement périodique (figure 2).

La surface de la figure 3 se construit en recollant un infini de surfaces de Costa pour obtenir une surface simplement périodique.

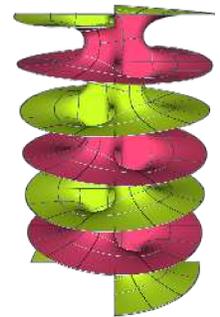
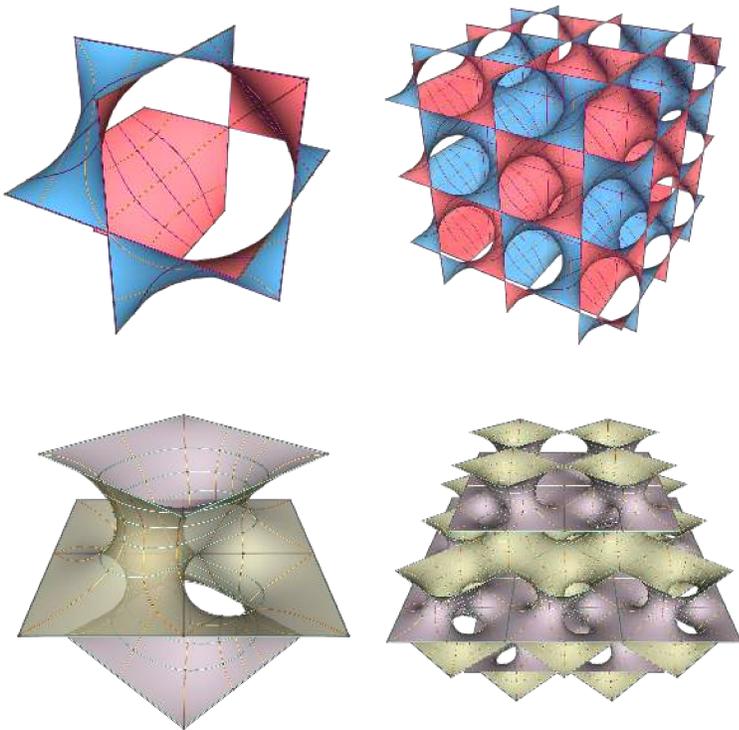


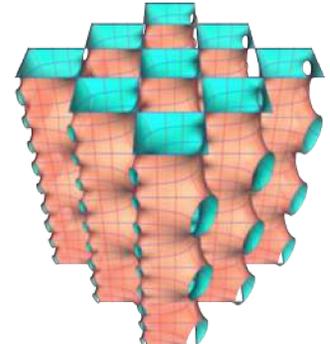
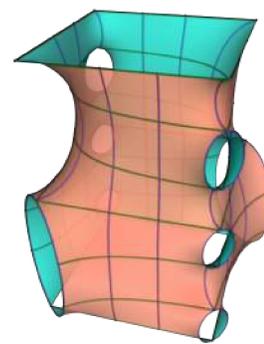
Figure 3

### Surfaces minimales triplement périodiques



Les trois surfaces minimales représentées ici sont triplement périodiques : elles sont constituées d'une brique élémentaire qui se répète dans les trois directions spatiales.

Les surfaces minimales triplement périodiques sont d'un grand intérêt en chimie et en biologie car elles apparaissent dans une grande variété de structures tels les silicates, les mélanges bi-continus, les films de détergent, les membranes lipidiques, les formations biologiques.



### Surfaces minimales hors des mathématiques

Les surfaces minimales décrivent l'état d'un système physique au repos : elles caractérisent le minimum d'une énergie potentielle. Cette approche étant très courante dans l'étude des formes observées dans la nature, il n'est pas surprenant de trouver de nombreuses utilisations de surfaces minimales dans d'autres sciences. Par exemple, les surfaces minimales servent en cristallographie pour étudier la structure de certains cristaux, ou en biologie pour comprendre la forme de certaines cellules.

Hors du domaine scientifique, les surfaces minimales ont notamment inspiré l'architecte Frei Otto pour ses constructions à base de toiles tendues.

### Pour Aller plus loin...

Un livre contenant un chapitre consacré aux surfaces minimales :

Stefan Hildebrandt et Antony Tromba, « *Mathématiques et formes optimales* », éditions Pour la Science – Belin.

Quelques uns des nombreux sites internet consacrés aux surfaces minimales :

[www.indiana.edu/~minimal](http://www.indiana.edu/~minimal), des images et quelques textes de vulgarisation ;

[www.msri.org/publications/sgp/SGP/indexc.html](http://www.msri.org/publications/sgp/SGP/indexc.html), des images et des textes d'un niveau mathématique plus élevé ;

[www.susqu.edu/facstaff/b/brakke/](http://www.susqu.edu/facstaff/b/brakke/), des images et la présentation du logiciel *evolver* utilisé pour les créer.

Un site consacré à l'architecte Frei Otto : [www.freiotto.com](http://www.freiotto.com)

**Remerciements** à Matthias Weber, auteur du site [www.indiana.edu/~minimal](http://www.indiana.edu/~minimal) qui a fourni gracieusement de nombreuses illustrations de ces poster.