Analyse Globale et Sous-Variétés

Mémoire de Synthèse

Habilitation à Diriger les Recherches présentée par
Philippe Castillon

Soutenue le 6 décembre 2010.

Jury : Franck BARTHE, Université Toulouse III
Gérard BESSON, Université Grenoble I
Gilles CARRON, Université de Nantes
Marc HERZLICH, Université Montpellier II
Jacques LAFONTAINE, Université Montpellier II

Rapporteurs : Franck BARTHE, Université Toulouse I
Gilles CARRON, Université de Nantes
Antonio ROS, Universidad de Granada

Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier, U.M.R. C.N.R.S. 5149
Dépt. des Sciences Mathématiques, CC 51
Univ. Montpellier II
34095 Montpellier Cedex 5, France
cast@math.univ-montp2.fr

Table des matières

Chapitre 1

Activités de recherche

1.1 Publications personnelles

Articles de recherche

1. P. Bérard, P. Castillon, M. Cavalcante – Eigenvalue estimates for hypersurfaces in $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ and applications. *Prépublication*, 2010.
2. P. Castillon, A. Sambusetti – On asymptotically harmonic Cartan-Hadamard manifolds. *Prépublication*, 2010.
3. P. Castillon – Submanifolds, isoperimetric inequalities and optimal transportation. *J. Funct. Anal.* **259** (2010), 79-103.
4. P. Castillon – A spectral inverse problem on surfaces. *Comment. Math. Helv.* **81** (2006), 271-286.
5. P. Castillon – Problème de petites valeurs propres sur les surfaces de courbure moyenne constante. *Proc. Amer. Math. Soc.* **130** (2002), 1153-1163.
6. P. Castillon – Spectral properties of constant mean curvature submanifolds in hyperbolic space. *Ann. Global Anal. Geom.* **17** (1999), 563-580.
7. P. Castillon – Sur les surfaces de révolution à courbure moyenne constante dans l'espace hyperbolique. *Ann. Fac. Sci. Toulouse* **6** (1998), 379-400.
8. P. Castillon – Sur l'opérateur de stabilité des sous-variétés à courbure moyenne constante dans l'espace hyperbolique. *Manuscripta Math.* **94** (1997), 385-400.

Annonces et actes de séminaires

a. P. Castillon – Un problème spectral inverse sur les surfaces. In *Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie*, vol. 20, p. 139-142, Univ. Grenoble 1, Saint Martin d'Hères, 2002.

b. P. Castillon – Spectral properties and conformal type of surfaces. *An. Acad. Brasil. Ciências* **74** (2002), 585-588.

c. P. Castillon – Métriques à courbure positive et entropie topologique positive sur la sphère. In *Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie*, vol. 10, p. 97-107, Univ. Grenoble 1, Saint Martin d'Hères, 1992.

1.2 Animation de la recherche

1.2.1 Organisations de colloques et séminaires

- Co-organisateur avec V. Berthé et Ch. Mercat de la Journée Annuelle de la S.M.F. qui s'est tenue à Montpellier le 12 juin 2009 sur le thème *Géométries Discrètes.*
- Co-organisateur avec Ph. Delanoë et G. Loeper du colloque *Optimal transport and geometric PDE's* qui s'est tenu à Nice du 15 au 18 juin 2006.
- De janvier 2002 à décembre 2004, responsable du *séminaire Gaston Darboux*, séminaire hebdomadaire de l'équipe de géométrie de l'I3M.

1.2.2 Groupes de travail

Je participe aux groupes de travail organisés chaque année par un membre de l'équipe de géométrie de l'I3M (et conjointement, depuis septembre 2009, avec des membres de l'Institut Fourier, Univ. Grenoble 1). Par ailleurs, j'ai été à l'initiative des groupes de travail suivants :

- Septembre 2004 à Juin 2005, *Transport Optimal de Mesures.* Basé sur le livre de C. Villani *Topics on optimal transportation*, étude des résultats d'existence et d'unicité de solutions aux problèmes de transports optimaux, sur $\mathbb{R}^n$ et sur les variétés riemanniennes. Ce groupe de travail a regroupé des membres des équipes de géométrie et de mathématiques appliquées de l'I3M.
- Septembre 2005 à Juin 2006, *Transport de Mesures et Espaces à Courbure de Ricci Minorée.* Lecture de la prépublication de J. Lott et C. Villani *Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport.*
- Septembre 2006 à Juin 2007, *Mouvement Brownien et Géométrie.* Basé sur le survey de A. Grigor'yan *Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds*, étude des liens entre propriétés du mouvement Brownien et invariants géométriques. Ce groupe de travail a regroupé des membres des équipes de géométrie et de mathématiques appliquées de l'I3M.

1.3 Activités d'enseignement et autre

1.3.1 Enseignements et vulgarisation

- Pendant 5 ans, de septembre 2005 à février 2010, j'ai assuré le cours de M2 *Géométrie et Topologie Différentielle.*
- De septembre 2009 à juin 2009, encadrement d'Eric Zabban pour un mémoire de M2, sur le thème *Courbes de Jordan nouées et surfaces minimales*, une preuve du théorème de Fàry-Milnor utilisant les surfaces minimales, d'après un article de J. Choe et R. Gulliver (Embedded minimal surfaces and total curvature of curves in a manifold. *Math. Res. Lett.* **10** (2003), 343–362).
- Encadrement régulier d'étudiants de M1 pour leurs T.E.R. sur différents thèmes (preuves de l'inégalité isopérimétrique, symétrisation ; spectre du laplacien sur un domaine, inégalité de Faber-Krahn, isospectralité, asymptotique de Weyl ; géométrie des convexes et théorie des hérissons).

- Pendant 4 ans, de 2004 à 2007, participation à la Fête de la Science. Nombreuses conférences dans des lycées de la région Languedoc-Roussillon sur le thème *Mathématiques et Bulles de Savon*. Création de posters sur le même thème.

1.3.2 Responsabilités administratives

- Depuis sept. 08, responsable de la *Commission travaux* de l'I3M qui s'occupe de la réhabilitation du rez-de-chaussée du bâtiment et du déménagement de la bibliothèque.
- Depuis nov. 08, président du pool d'experts 25ième section rang B de l'I3M (structure qui prend en charge la constitution des comités de sélection). J'étais précédemment membre de la commission de spécialiste de l'I3M et membre extérieur de celle d'Avignon.

Chapitre 2

Présentation des résultats

Mes recherches portent sur des problèmes d'analyse globale : théorie spectrale d'opérateurs géométriques, inégalités isopérimétriques, invariants asymptotiques tel l'entropie volumique. Le point commun à ces travaux est la présence des sous-variétés : comme objet d'étude (dans la première partie), comme cadre particulier pour l'étude du problème général de l'isopérimétrie (dans la deuxième partie), ou comme moyen de décrire des propriétés de l'espace ambiant (dans la troisième partie). À la fin de chacune des parties, je décris les pespectives de recherches sur le thème abordé.

La première partie est consacrée aux ***hypersurfaces minimales et de courbure moyenne constante*** qui sont points critiques de la "fonctionnelle volume". On s'y intéresse à l'opérateur de stabilité associé à cette fonctionnelle et aux liens entre les propriétés géométriques de l'hypersurface et les propriétés spectrales de cet opérateur. Cette partie regroupe les recherches parues dans [Cas99, Cas02, Cas06].

Dans la première partie, les ***inégalités isopérimétriques sur les sous-variétés*** sont utilisées à plusieurs reprises, elles font l'objet de la deuxième partie. Ces inégalités sont intéressantes pour elles même, un des problèmes très étudié étant la détermination des constantes optimales. Dans l'espace euclidien, l'utilisation du transport optimal a apporté de nouvelles méthodes pour aborder ces problèmes ; on montre dans la deuxième partie comment utiliser le transport optimal pour obtenir de telles inégalités sur des sous-variétés. Cette partie regroupe les recherches parues dans [Cas10].

Dans la troisième partie, on étudie des sous-variétés particulières : les horosphères des variétés de Cartan-Hadamard. Les ***variétés asymptotiquement harmoniques*** (ie. dont les horosphères sont de courbure moyenne constante) apparaissent naturellement, par exemple dans l'étude de la dynamique du flot géodésique. On montre que supposer les horosphères de courbure moyenne constante permet de déterminer des invariants asymptotiques de la variété ambiante (entropie volumique et spectre essentiel), et donne des informations sur le comportement asymptotique de la forme volume. Cette partie regroupe les recherches exposées dans [CS10].

Notations

Soit $i : M \to N$ une immersion isométrique d'une variété riemannienne orientable M de dimension n dans une autre variété riemannienne N de dimension $n+1$. Dans la suite, nous noterons $\mathcal{A}$ la seconde forme fondamentale de cette immersion, et $H_x = \frac{1}{n}\sum \mathcal{A}(e_i, e_i)$

le vecteur courbure moyenne en x (où $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ est une base orthonormée de T_xM). De plus nous noterons $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} - \langle .,. \rangle H$ la seconde forme fondamentale de trace nulle (qui mesure le défaut d'ombilicité de l'immersion).

Par ailleurs, nous désignerons par Δ le "laplacien positif" (ie. tel que $\int_M u\Delta u = \int_M |du|^2$ pour toute fonction $u \in C_c^\infty(M)$).

2.1 Théorie spectrale de l'opérateur de stabilité

La courbure moyenne est liée à la dérivée du volume lorsqu'on déforme l'immersion $i : M \to N$. Soit $\Omega \subset M$ un domaine, et $i_t : \Omega \to N$ une déformation de i sur Ω, c'est à dire une famille d'immersions telles que $i_0 = i$, et $i_t = i$ sur $\partial\Omega$ pour tout t.

Si on note $V(t) = \int_\Omega dv_t$ le volume de Ω pour la métrique induite par i_t, et $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial i_t}{\partial t}_{|t=0}$, on a alors $V'(0) = -n \int_\Omega \langle \frac{\partial}{\partial t}, H \rangle dv$. En particulier, les hypersurfaces minimales (ie. de courbure moyenne nulle) sont les points critiques de la fonctionnelle V, et les hypersurfaces de courbure moyenne constante (ie. $h = |H|$ est constante sur M) sont points critiques de V sous la contrainte $\int_\Omega \langle \frac{\partial}{\partial t}, \nu \rangle dv = 0$, où ν est un champ de vecteurs normal unitaire le long de M [1].

Dans la suite, nous utiliserons les abréviations CMC pour "courbure moyenne constante", en précisant éventuellement la valeur de la courbure moyenne (par exemple, CMC-$h < 1$ pour "courbure moyenne constante $h < 1$", où $h = |H|$).

Stabilité et indice de Morse

Si on suppose que l'immersion est minimale ou de courbure moyenne constante, il est naturel de s'intéresser à la dérivée seconde de V ; celle-ci est donnée par $V''(0) = \int_\Omega fSf dv$, où S est l'opérateur de stabilité, donné par $S = \Delta - \mathrm{Ric}(\nu) - |\mathcal{A}|^2$ (où Ric désigne la courbure de Ricci de l'espace ambiant), et $f = \langle \frac{\partial}{\partial t}, \nu \rangle$ est déterminé par la déformation.

L'hypersurface sera dite *stable* si l'opérateur S est positif (c'est à dire que l'immersion est un minimum local de la fonctionnelle V).

L'opérateur de stabilité peut être vu comme la "hessienne" de la fonctionnelle volume. On peut définir un indice de Morse (ie. "le nombre de valeurs propres strictement négatives de S") de la façon suivante : pour tout domaine compact Ω, le spectre de S sur Ω (avec condition de Dirichlet sur $\partial\Omega$) est une suite de valeurs propres tendant vers $+\infty$, et on note $\mathrm{Ind}(\Omega)$ le nombre de ces valeurs propres strictement négatives ; on définit l'indice de Morse de M par $\mathrm{Ind}(M) = \sup\{\mathrm{Ind}(\Omega) \mid \Omega \text{ domaine de } M\}$.

Remarque 2.1.1 On s'intéresse à une extension auto-adjointe de l'opérateur S défini sur les fonctions C^∞ à support compact si on s'intéresse aux hypersurfaces minimales (problème variationnel sans contrainte), et par les fonctions C^∞ à support compact d'intégrale nulle si on s'intéresse aux hypersurfaces CMC.

Cependant, dans la plupart des cas qui nous intéressent, l'extension autoadjointe est la même, et les notions d'indice de Morse et de stabilité coïncident (cf. [BB00] §4 et [Cas99] proposition 3.1).

1. Cette contrainte est naturelle : dans le cas d'une hypersurface compacte bordant un domaine D de N, cela revient à considérer les déformations de M qui préservent le volume de D.

2.1.1 Spectre et courbure totale : point de vue géométrique

Un des axes d'étude des sous-variétés minimales et CMC est de relier la stabilité et la finitude de l'indice à des propriétés géométriques des immersions.

Dans ce qui suit, nous nous intéressons aux hypersurfaces des espaces euclidiens et hyperboliques. Dans ce cas, l'opérateur de stabilité s'écrit $S = \Delta + n(a^2 - h^2) - |\mathcal{A}_0|^2$, où $h = |H|$, et $-a^2$ est la courbure de l'espace ambiant ($a = 0$ ou $a = 1$). Dans ce cadre, les propriétés géométriques qui apparaissent sont l'ombilicité et la finitude de la courbure totale (ie. la finitude de $\int_M |\mathcal{A}_0|^n dv_M$).

Le théorème suivant résume la situation euclidienne pour les sous-variétés minimales (cf. [FCS80, dCP79, Pog81] pour le point *i.*, [FC85, Tys87] pour le point *ii.* et [BB90, Tys89] pour le point *iii.*) :

Théorème 2.1.2 *Soit $M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ une hypersurface minimale complète.*

i. Si $n = 2$, alors M est stable si et seulement si $\mathcal{A} \equiv 0$ (ie. M est un plan) ;

ii. Si $n = 2$, alors $\mathrm{Ind}(M) < \infty$ *si et seulement si $\int_M |\mathcal{A}|^2 dv_M < \infty$. De plus, il existe une constante c (indépendante de M) telle que* $\mathrm{Ind}(M) \leq c \int_M |\mathcal{A}|^2 dv_M$ *;*

iii. Si $n \geq 3$, et si $\int_M |\mathcal{A}|^n dv_M < \infty$, alors $\mathrm{Ind}(M) < \infty$*. De plus, il existe une constante c (ne dépendant que de n) telle que* $\mathrm{Ind}(M) \leq c \int_M |\mathcal{A}|^n dv_M$*.*

Notons que pour les sous-variétés CMC-$h > 0$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, la situation est également bien comprise : les seules stables sont les sphères géodésiques, les hypersurfaces compactes sont les seules de courbure totale finie, et, en dimension deux, les surfaces compactes sont aussi les seules d'indice fini (cf. [BdC84, dS87]).

De l'espace euclidien à l'espace hyperbolique

Il existe une forte analogie entre les sous-variétés CMC de l'espace euclidien et celles de l'espace hyperbolique. En particulier, les hypersurfaces CMC-$h > 1$ de $\mathbb{H}^{n+1}$ ont un comportement analogue au cas $h > 0$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$: les seules stables sont les sphères géodésiques, les hypersurfaces compactes sont les seules de courbure totale finie, et, en dimension deux, les surfaces compactes sont aussi les seules d'indice fini (cf. [BdCE88, dS87]).

Pour les hypersurfaces CMC-$h \leq 1$, deux familles se distinguent : le cas $h = 1$ avec un comportement proche de celui des hypersurfaces minimales de $\mathbb{R}^{n+1}$ et le cas $h < 1$ avec une géométrie de type "courbure strictement négative".

Dans l'esprit du théorème 2.1.2, on a le résultat suivant pour le cas $h = 1$ (cf. [dCdS90]) :

Théorème 2.1.3 *Soit $M^2 \to \mathbb{H}^3$ une surface de courbure moyenne constante $h = 1$.*

i. M est stable si et seulement si $\mathcal{A}_0 \equiv 0$ (ie. M est une horosphère) ;

ii. $\mathrm{Ind}(M) < \infty$ *si et seulement si $\int_M |\mathcal{A}_0|^2 dv_M < \infty$.*

Pour compléter l'analogie avec les hypersurfaces minimales de $\mathbb{R}^n$, il reste à répondre à la question suivante :

Question 2.1.4 *Pour $n \geq 3$, les hypersurfaces CMC-1 de $\mathbb{H}^{n+1}$ de courbure totale finie sont-elles d'indice fini ? A-t-on un contrôle de l'indice par la courbure totale ? Pour reprendre des méthodes déjà utilisées dans le cas minimal ou CMC-$h < 1$ (cf. [BB90, Cas97]), il suffirait d'obtenir sur ces hypersurfaces une inégalité isopérimétrique de type euclidien ou un contrôle du noyau de la chaleur ; ces questions sont intéressantes en elles même.*

Lorsque $h < 1$, la situation est différente et il n'y a plus d'équivalence entre les propriétés spectrales de S et les propriétés géométriques (cf. [BdCS97] pour le point *i.*, [Cas97] pour le point *ii.* et [dS87] pour le point *iii.*) :

Théorème 2.1.5 *Soit $M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ une hypersurface de courbure moyenne constante $h < 1$.*

i. Si $\int_M |\mathcal{A}_0|^n dv_M < \infty$ alors $\mathrm{Ind}(M) < \infty$;

ii. De plus, Si $n \geq 3$, il existe une constante c (ne dépendant que de n) telle que $\mathrm{Ind}(M) \leq c \int_M |\mathcal{A}_0|^n dv_M$;

iii. Il existe, dans $\mathbb{H}^3$, des surfaces stables non ombilicales et des surfaces d'indice fini et de courbure totale infinie.

Comportement asymptotique

Une conséquence importante de la finitude de la courbure totale que nous utiliserons par la suite, est le comportement asymptotique de $\mathcal{A}_0$:

Théorème 2.1.6 *Soit M une hypersurface CMC de $\mathbb{R}^{n+1}$ ou $\mathbb{H}^{n+1}$, si $\int_M |\mathcal{A}_0|^n dv_M < \infty$, alors $\lim_\infty |\mathcal{A}_0| = 0$*

Ce résultat est dû à M. Anderson pour les hypersurfaces minimales de $\mathbb{R}^{n+1}$, à G. de Oliveira pour les hypersurfaces minimales de $\mathbb{H}^{n+1}$, et à P. Bérard, M. do Carmo et W. Santos dans le cas général (cf. [And84, dOF93, BdCS98]). La preuve repose sur l'équation de Simons satisfaite par $\mathcal{A}_0$ et sur une itération à la "de Giorgi-Nash-Moser".

Ce résultat implique que toutes les courbures principales de M tendent vers h à l'infini, et, par le théorème de Gauss, que les courbures sectionnelles de M tendent vers une constante à l'infini. C'est également la première étape de la preuve des théorèmes montrant le finitude topologique des hypersurfaces CMC de courbure totale finie (cf. [And84, dOF93, Cas99]).

2.1.2 Spectre et courbure totale : point de vue spectral

Le spectre d'un opérateur se décompose en réunion disjointe du spectre discret et du spectre essentiel : le spectre discret contient les points isolés du spectre qui sont valeurs propres de multiplicités finies, et le spectre essentiel est son complémentaire dans le spectre (cf. [RS80] p. 236). Nous noterons $\sigma_{\mathrm{disc}}(L)$ et $\sigma_{\mathrm{ess}}(L)$ les spectres discret et essentiel d'un opérateur L.

Contrairement au cas compact, le spectre essentiel d'un opérateur de la forme $\Delta + V$ sur une variété complète non compacte n'est pas nécessairement vide et dépend du comportement asymptotique de la métrique et du potentiel V.

La preuve du point i. du théorème 2.1.5 consiste à utiliser le fait que $\lim_\infty |\mathcal{A}_0| = 0$ (cf. théorème 2.1.6) ; on a alors $\sigma_{\rm ess}(S) = \sigma_{\rm ess}(\Delta + n(1-h^2)) \subset [n(1-h^2), +\infty)$. Comme les seuls points d'accumulation possible de $\sigma_{\rm disc}(S)$ sont des points du spectre essentiel (donc strictement positifs), et comme l'opérateur S est minoré, on en déduit qu'il n'existe qu'un nombre fini de valeurs propres négatives. Cependant, d'un point de vue spectral, les questions naturelles sont : Quel est le spectre essentiel ? Le spectre discret est-il fini ?

Par ailleurs, dans le cadre euclidien, l'étude asymptotique faite dans [And84] permet d'utiliser la fonction "distance extrinsèque" pour construire des suites de Weyl (cf. [RS80] théorème VII.12 p. 237) ; on peut montrer par exemple qu'elle satisfait aux hypothèses du lemme 2.1 de [Kum97]. On obtient le résultat suivant :

Théorème 2.1.7 *Si M est une hypersurface minimale de $\mathbb{R}^{n+1}$ de courbure totale finie, alors $\sigma(\Delta) = \sigma_{\rm ess}(S) = [0, +\infty)$*

Dès lors, les valeurs propres négatives de S constituent son spectre discret, et les résultat sur l'indice du théorème 2.1.2 peuvent se reformuler de la façon suivante : *si M est une hypersurface minimale de $\mathbb{R}^{n+1}$ de courbure totale finie, alors $\sigma_{\rm ess}(S) = [0, +\infty)$ et $\sigma_{\rm disc}(S)$ est fini.* Pour les sous-variétés CMC-$h < 1$ de $\mathbb{H}^{n+1}$ nous pouvons considérer le problème similaire :

- quel est le spectre essentiel ?
- le spectre discret est-il fini ?

Le spectre essentiel

La réponse à la première question s'obtient en étudiant la géométrie asymptotique de l'hypersurface, l'ingrédient principal étant le théorème 2.1.6. On détermine ainsi les spectres essentiels du laplacien et de l'opérateur de stabilité :

Théorème 2.1.8 (cf. [Cas99]) *Soit $i : M^n \hookrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ une immersion CMC-$h < 1$. Si la courbure totale est finie, alors*

$$\sigma_{\rm ess}(\Delta) = \Big[\frac{(n-1)^2}{4}(1-h^2), +\infty\Big) \quad et \quad \sigma_{\rm ess}(S) = \Big[\frac{(n+1)^2}{4}(1-h^2), +\infty\Big).$$

Comme $\lim_\infty |\mathcal{A}_0| = 0$, les spectres essentiels de Δ et $\Delta - |\mathcal{A}_0|^2$ coïncident ; il suffit donc de déterminer $\sigma_{\rm ess}(\Delta)$ qui dépend du comportement asymptotique de la métrique. L'étude repose alors sur les propriétés de la distance extrinsèque dont on montre qu'elle ne possède pas de point critique en dehors d'un compact (cf. [Cas99] théorème 2.1), et son comportement asymptotique est bien déterminé (cf. [Cas99] proposition 2.5). Le spectre essentiel s'obtient alors en construisant une suite de Weyl (cf. [RS80] théorème VII.12, p. 237) à l'aide de fonctions dépendant de la distance extrinsèque.

Pour les hypersurfaces CMC-$h < 1$ de $\mathbb{H}^{n+1}$, on a l'inégalité isopérimétrique $(n-1)(1-h)\mathrm{Vol}(\Omega) \le \mathrm{vol}(\partial\Omega)$ (cf. [Cas97]). Si $h = 0$, l'inégalité de Cheeger donne alors $\sigma(\Delta) \subset [\frac{(n-1)^2}{4}, +\infty)$, et le théorème 2.1.8 détermine complètement $\sigma(\Delta)$. Pour étendre ce résultat à la courbure moyenne non nulle, il suffirait d'avoir l'inégalité isopérimétrique suivante :

Question 2.1.9 *Si M est une hypersurfaces CMC-$h < 1$ de $\mathbb{H}^{n+1}$, a-t-on, pour tout domaine $\Omega \subset M$ l'inégalité $(n-1)\sqrt{1-h^2}\mathrm{Vol}(\Omega) \le \mathrm{vol}(\partial\Omega)$?*

Dans [Cas99], on obtient une version asymptotique de cette inégalité nécessaire à la preuve du théorème 2.1.8, et dans [Cas02] on montre que l'inégalité est satisfaite par les surfaces simplement connexes ou homéomorphes à $S^1 \times \mathbb{R}$.

Le spectre discret

La question suivante est celle de la finitude du spectre discret, c'est à dire dans notre cas, celle du nombre de valeurs propres inférieures à l'infimum du spectre essentiel. Dans la suite, nous désignerons par $\mathcal{N}_a(L)$ le nombre de valeurs propres de l'opérateur L qui sont inférieures à a.

Théorème 2.1.10 (cf. [Cas02]) *Soit $i : M^2 \hookrightarrow \mathbb{H}^3$ une immersion de courbure moyenne constante h telle que $h < 1$ et soit $b = \sqrt{1-h^2}$. Si $\int_M |\mathcal{A}_0|^2 dv < \infty$, alors les spectres discrets de Δ et S sont finis :*

i. $\sigma_{\mathrm{ess}}(\Delta) = [\frac{b^2}{4}, \infty)$ *et* $\mathcal{N}_{\frac{b^2}{4}}(\Delta) < \infty$;

ii. $\sigma_{\mathrm{ess}}(S) = [\frac{9b^2}{4}, \infty)$ *et* $\mathcal{N}_{\frac{9b^2}{4}}(S) < \infty$.

La méthode utilisée repose sur le théorème de Lieb qui nécessite une contrôle du noyau de la chaleur (cf. [Cas02] théorème 1.3 pour un énoncé du théorème de Lieb tel qu'on l'utilise). Pour les surfaces CMC-$h < 1$ de $\mathbb{H}^3$, l'équation de Gauss implique que la courbure vérifie $K \leq -b^2$ et l'estimée du noyau de la chaleur s'obtient par théorème de comparaison si la surface est simplement connexe. Le cas général repose sur deux remarques :

- l'estimée s'obtient sur les surfaces homéomorphes à $S^1 \times \mathbb{R}$ en passant au revêtement universel $\tilde{M}$, et en faisant une moyenne sur $\pi_1(M)$ des inégalités dans $\tilde{M}$ (cf. [Cas02] §2) ;
- l'hypothèse de courbure totale finie implique que la surface est de topologie finie, et s'obtient donc en recollant, à un domaine compact, un nombre fini de bouts homéomorphes à $S^1 \times \mathbb{R}$ (cf. [Cas02] §3).

La première remarque permet d'obtenir la finitude dans chacun des bouts, et la seconde sur la surface par un argument d'encadrement Dirichlet-Neumann (cf. [Cas02] §4).

Ce résultat de finitude est plus fort que celui sur l'indice et permet d'envisager une réciproque qui donnerait un analogue, pour les surfaces CMC-$h < 1$, des résultats de [FC85, dCdS90], c'est à dire une caractérisation spectrale de la finitude de la courbure totale :

Question 2.1.11 *Si M est une surface CMC-$h < 1$ de $\mathbb{H}^3$ telle que $\mathcal{N}_{\frac{9b^2}{4}}(S) < \infty$, est-elle de courbure totale finie ?*

2.1.3 Un problème inverse lié à la stabilité

Dans les deux sections précédentes, les sous-variétés considérées portent une géométrie de type "courbure strictement négative" (en particulier, la courbure tend vers $h^2 - 1 < 0$ à l'infini et les surfaces sont non-paraboliques). Dans cette section nous nous intéressons à des surfaces paraboliques (en dimension deux, une surface est parabolique si elle est conformément équivalente à une surface compacte privée d'un nombre fini de points).

La motivation vient de la preuve du point i. du théorème 2.1.2. Pour exploiter l'hypothèse de stabilité, on veut évaluer la forme quadratique associée à l'opérateur sur de "bonnes" fonctions test. La première étape consiste à montrer que la surface est parabolique, et c'est la parabolicité qui va permettre de construire les fonctions test (voir par exemple [FCS80]).

Si M est une surface minimale de $\mathbb{R}^3$, alors son opérateur de stabilité s'écrit $S = \Delta + 2K$; si M est une surface minimale d'une variété $\bar{M}$ de dimension 3 à courbure scalaire positive, son opérateur de stabilité s'écrit $S = \Delta + K - \mathrm{Scal}_{\bar{M}} - \frac{1}{2}|\mathcal{A}|^2$. Dans ces deux cas, si la surface est stable, on a un opérateur de la forme $\Delta + \lambda K$ qui est positif, avec $\lambda = 2$ ou $\lambda = 1$. La question (posée dans [FCS80]) est alors : pour quelles valeurs de λ la positivité de $\Delta + \lambda K$ implique-t-elle que la surface est parabolique ?

Dans [FCS80], les auteurs montrent que $\lambda \geq 1$ suffit. Par ailleurs, sur le disque de Poincaré on a $\Delta + \lambda K$ positif pour tout $\lambda \leq \frac{1}{4}$. Dans [Cas06], on montre que la valeur $\frac{1}{4}$ est optimale (dans la suite, on note $q_\lambda(u) = \int_M |du|^2 + \lambda K u^2$ la forme quadratique associée à $\Delta + \lambda K$) :

Théorème 2.1.12 (cf. [Cas06]) *Soit (M, h) une surface riemannienne complète et non-compacte. S'il existe $\lambda > \frac{1}{4}$ tel que $q_\lambda(u) \geq 0$ pour toute fonction $u \in C_c^\infty(M)$, alors M est conformément équivalente à $\mathbb{C}$ ou à $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

En plus de la parabolicité, on détermine la topologie de la surface qui est de caractéristique d'Euler positive ; la positivité de l'opérateur $\Delta + \lambda K$ est donc de même nature que la positivité de l'intégrale de la courbure pour les surfaces compactes.

L'autre hypothèse naturelle dans l'étude des surfaces minimales est la finitude de l'indice ; cette hypothèse implique que l'opérateur de stabilité est positif en dehors d'un compact. Encore une fois, ceci est suffisant pour obtenir la parabolicité de la surface (mais sans contrôle de la caractéristique d'Euler) :

Théorème 2.1.13 (cf. [Cas06]) *Soit (M, h) une surface riemannienne complète et non-compacte. Supposons qu'il existe un domaine compact $\Omega \in M$ et un réel $\lambda > \frac{1}{4}$ tel que $q_\lambda(u) \geq 0$ pour toute fonction $u \in C_c^\infty(M \setminus \Omega)$.*

Alors M est conformément équivalente à une surface de Riemann compacte privée d'un nombre fini de points.

La preuve de ces deux résultats consiste à exploiter la positivité de $\Delta + \lambda K$ en testant la forme quadratique associée sur des fonctions dépendant de la distance à un point fixé. Le point central est une estimée de $\int_{C_R^Q} K\xi^2(r) dv_M$ où r est la fonction distance et $C_R^Q = \{ x \in M \mid R < r(x) < Q\}$ (cf. [Cas06] lemme 1.8).

Notons B_s la boule de rayon s, $\ell(s) = \mathrm{vol}(\partial B_s)$, et $G(s) = \int_{B_s} K dv_M$. On a alors $G'(s) = \int_{\partial B_s} K$ et la formule de Gauss-Bonnet donne $G(s) \leq 2\pi\chi(B_s) - \ell'(s)$ (cf. [ST89]). Soit $\xi : [R, Q] \to \mathbb{R}_+$ une fonction décroissante convexe, l'utilisation de la formule de la co-aire permet de se ramener à une intégration sur l'intervalle $[R, Q]$ faisant intervenir $G'(s)$. Des intégrations par parties successives et la formule de Gauss-Bonnet conduisent à l'inégalité

$$\int_{C_R^Q} K\xi^2(r)dv_M \leq \Big[\xi^2(s)G(s)\Big]_R^Q - 2\pi \sup_{s\in[R,Q]}(\chi(B_s))\Big[\xi^2(s)\Big]_R^Q + \Big[(\xi^2)'(s)\ell(s)\Big]_R^Q - \int_{C_R^Q}(\xi^2)''(r)dv_M. \tag{2.1}$$

La principale difficulté est le manque de régularité de la fonction ℓ (qui n'est à priori pas continue) ; cependant, elle est dérivable presque partout et satisfait $\ell(b)-\ell(a) \leq \int_a^b \ell'(s)ds$ (cf. [ST93]), ce qui donne des inégalités lors des intégrations par parties.

Dans l'inégalité 2.1, toute la dépendance en la courbure se retrouve dans les termes intégrés (en particulier dans la caractéristique d'Euler des boules géodésiques). La topologie de la surface étant liée au comportement asymptotique de $\chi(B_s)$ (cf. [Cas06] lemme 1.4), un bon choix de fonction test permet dans un premier temps de contrôler la topologie de M. Un autre choix de fonction test permet dans un second temps de montrer que la croissance du volume est quadratique (ce qui implique la parabolicité).

Ce type de majorations a d'abord été utilisé par Pogorelov (dans la carte exponentielle), puis repris par T. Colding et W. Minicozzi. Dans un article récent, J. Espinar et H. Rosenberg ont étudié le cas où $\Delta + \lambda K$ est positif avec $\lambda \leq \frac{1}{4}$, et en ajoutant une hypothèse a priori sur la croissance du volume (cf. [ER08]). Plus généralement, la méthode est utilisée pour l'étude des surfaces CMC stables dans divers espaces ambiants (cf. [Maz09, Esp09, MPR08]).

2.1.4 Perspectives de recherche

Les liens entre spectre de S et géométrie de M font également l'objet de travaux dans d'autres espaces ambiants, notamment dans $\mathbb{H}^n\times\mathbb{R}$ (cf. [BE08, BCC10]). Dans ce cadre, de nouvelles difficultés apparaissent ; par exemple, si on veut étudier globalement les surfaces minimales de $\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$, on est obligé de considérer ensemble des surfaces paraboliques et des non-paraboliques, les deux cas pouvant se présenter. De façon générale, on n'a pas encore dans ce cadre de résultat sur la finitude topologique, ni sur la géométrie asymptotique des sous-variétés. Il serait intéressant d'étudier ces questions étant donné l'importance de ce type de propriétés pour l'étude spectrale de l'opérateur de stabilité.

Par ailleurs, en dimension 2, si on veut étudier l'opérateur de stabilité en faisant appel à la courbure, celui-ci s'écrit $S = \Delta + q + \lambda K$, où q dépend de la courbure de Ricci de l'espace ambiant (et n'est donc pas constante). Cela nécessite d'adapter les méthodes utilisées ci-dessus à ce type d'opérateurs (ce travail a été initié dans [ER08]).

2.2 Sous-variétés, isopérimétrie et transport optimal

Dans l'étude des propriétés spectrales de l'opérateur de stabilité, les inégalités isopérimétriques sur les sous-variétés jouent un rôle important, par exemple pour obtenir des estimées du noyau de la chaleur (cf. [BB90, Cas97]) ou pour utiliser des méthodes d'itération “à la de Giorgi-Nash-Moser” (cf. [And84, dOF93, BdCS97, BdCS98]).

Pour les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$, l'inégalité utilisée est celle obtenue par W. Allard, et J. Michael et L. Simon (cf. [All72, MS73]) : *Pour tout domaine Ω d'une sous-variété de* *dimension n de $\mathbb{R}^{n+k}$, on a*

$$c_n \mathrm{Vol}(\Omega)^{1-\frac{1}{n}} \leq \mathrm{vol}(\partial\Omega) + n \int_\Omega |H| dv_M$$

où $c_n > 0$ est une constante ne dépendant que de n. Cette inégalité a été généralisée ensuite aux cas où la variété ambiante est de Cartan-Hadamard (cf. [HS74, Cas97]).

Pour une égalité de ce type, se pose le problème de la constante optimale, et éventuellement celui des domaines réalisant le cas d'égalité. Par analogie avec le problème isopérimétrique de l'espace euclidien, on peut poser la question suivante :

Question 2.2.1 *Si Ω est un domaine d'une sous-variété de dimension n dans $\mathbb{R}^{n+k}$, a-t-on*

$$n\omega_n^{\frac{1}{n}} \mathrm{Vol}(\Omega)^{1-\frac{1}{n}} \leq \mathrm{vol}(\partial\Omega) + n \int_\Omega |H| dv_M \ ?$$

Le cas d'égalité caractérise-t-il les boules géodésiques des n-plans ?

Ce problème a surtout été étudié pour les sous-variétés minimales, mais reste ouvert (cf. [Cho05] pour un survey). En particulier, la constante obtenue par Michael et Simon vaut $c_n = n\omega_n^{\frac{1}{n}} \frac{1}{n4^{n+1}}$.

Un moyen pour démontrer une inégalité isopérimétrique est de construire une application du domaine Ω dans un domaine modèle (réalisant le cas d'égalité) qui transporte les mesures normalisées et d'étudier ensuite le jacobien de cette application. Cette démarche a d'abord été utilisée dans $\mathbb{R}^n$ par M. Gromov (en utilisant une application dûe à Knothe), puis reprise par D. Cordero, B. Nazaret et C. Villani (en utilisant une application de transport optimal, cf. [CENV04]).

Dans [Cas10], on montre comment la méthode utilisée dans [CENV04] s'étend aux sous-variétés (le domaine modèle étant alors la boule unité d'un sous-espace) et permet d'obtenir l'inégalité optimale suivante :

Théorème 2.2.2 (cf. [Cas10]) *Soit $i : M^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ une immersion isométrique, et E un sous-espace de dimension n de $\mathbb{R}^{n+k}$. Pour tout domaine régulier $\Omega \subset M$ on a*

$$n\omega_n^{\frac{1}{n}} \left(\int_\Omega J_E^{\frac{1}{n-1}} dv_M \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \mathrm{vol}(\partial\Omega) + n \int_\Omega |H| dv_M,$$

où H est la courbure moyenne de l'immersion, et J_E est le jacobien de la projection orthogonale de M sur E.

Cette inégalité est optimale : on a égalité si Ω est une boule géodésique de E.

Pour s'affranchir de la dépendance en E, une possibilité est de prendre une moyenne sur la grassmannienne $G_{n,n+k}$ des n-plans de $\mathbb{R}^{n+k}$. On obtient alors une inégalité analogue à celle de J. Michael et L. Simon :

Théorème 2.2.3 (cf. [Cas10]) *Soit $i : M^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ une immersion isométrique. Pour tout domaine régulier $\Omega \subset M$ on a*

$$n\omega_n^{\frac{1}{n}} \alpha_{n,k} \mathrm{Vol}(\Omega)^{\frac{n-1}{n}} \leq \mathrm{vol}(\partial\Omega) + n \int_\Omega |H| dv_M.$$

où $\alpha_{n,k} = \frac{1}{|G_{n,n+k}|}\int_{G_{n,n+k}} K_E(F)^{\frac{1}{n}} dE$, *avec* $K_E(F)$ *le jacobien de la projection orthogonale du* n*-plan* F *sur le* n*-plan* E.

Outre la méthode, un intérêt de ce résultat est la constante obtenue qui améliore celles précédemment connues ; en particulier, on a $\lim_{n\to\infty} \alpha_{n,1} = 1$.

Remarque 2.2.4 Comme observé par D. Cordero, B. Nazaret et C. Villani, une méthode similaire permet d'obtenir les inégalités de Sobolev L^p de $\mathbb{R}^n$ (avec les constantes optimales). Dans le cas des sous-variétés, on obtient des inégalités de Sobolev à poids, les poids dépendant du jacobien de la projection (cf. [Cas10] théorème 3.4).

2.2.1 Isopérimétrie et transport optimal

Dans ce qui suit, nous présentons les grandes lignes des preuves de ces deux résultats. En particulier, nous n'évoquerons qu'une partie de la théorie du transport optimal nécessaire à cette présentation ; pour les détail des preuves, nous renvoyons le lecteur à [Cas10]. Pour l'étude générale des problèmes de transports optimaux, on pourra se reporter aux livres de C. Villani (cf. [Vil03, Vil09]).

Étant données deux mesures de probabilité μ et ν sur $\mathbb{R}^n$, un transport est une application $T : \mathrm{Spt}(\mu) \to \mathrm{Spt}(\nu)$ qui pousse μ sur ν : $T_\#\mu = \nu$. Le coût total d'un transport est alors

$$I(T) = \int_{\mathbb{R}^n} d^2(x, Tx) d\mu(x),$$

et le problème de Monge consiste à trouver un transport T tel que

$$I(T) = \min\{I(S) \mid S : \mathrm{Spt}(\mu) \to \mathrm{Spt}(\nu) \text{ tel que } S_\#\mu = \nu \}$$

Le problème de Monge n'a pas toujours de solution, cependant, lorsque les mesures μ et ν sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, le résultat suivant caractérise l'unique solution (cf. [Bre91]) :

Théorème 2.2.5 *Si* $\mu = F(x)dx$ *et* $\nu = G(y)dy$ *alors*

i. le problème de Monge possède une unique solution $T : \mathrm{Spt}(\mu) \to \mathrm{Spt}(\nu)$ *;*

ii. il existe une fonction convexe $V : \mathrm{Spt}(\mu) \to \mathbb{R}$ *telle que* $T = \nabla V$ *;*

iii. T *est l'unique gradient de fonction convexe qui pousse* μ *sur* ν.

L'hypothèse sur les mesures peut être affinée : il suffit de supposer que μ et ν ne chargent pas les ensembles petits (ie. les ensembles de dimension de Hausdorff inférieure à $n-1$).

Le théorème 2.2.5 permet de prouver l'inégalité isopérimétrique de $\mathbb{R}^n$ (on reprend ici la preuve donnée par [CENV04]). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine et soit $B \subset \mathbb{R}^n$ la boule unité. On note $\mu = \frac{\chi_\Omega(x)dx}{\mathrm{Vol}(\Omega)}$ et $\nu = \frac{\chi_B(y)dy}{\omega_n}$ les mesures uniformes normalisées sur Ω et B.

Par le théorème 2.2.5, il existe une fonction convexe $V : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $\nabla V = T : \Omega \to B$ pousse μ sur ν.

Pour toute fonction $u : B \to \mathbb{R}$, on a

$$\int_\Omega u \circ T(x) \frac{dx}{\mathrm{Vol}(\Omega)} = \int_B u(y) \frac{dy}{\omega_n} = \int_\Omega u \circ T(x) |\det(\mathrm{Jac}_x T)| \frac{dx}{\omega_n} \tag{2.2}$$

où la première égalité traduit $T_{\#}\mu = \nu$ et la seconde s'obtient par changement de variable. On en déduit que
$$\frac{\omega_n}{\mathrm{Vol}(\Omega)} = |\det(\mathrm{Jac}_x T)| = \det(D^2V(x))$$
où on utilise le fait que $D^2V(x)$ est positive. L'inégalité arithmético-géométrique donne alors [2]
$$\frac{\omega_n^{\frac{1}{n}}}{\mathrm{Vol}(\Omega)^{\frac{1}{n}}} = \det(D^2V(x))^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\mathrm{tr}(D^2V(x)) = -\frac{1}{n}\Delta V(x)$$
En intégrant sur Ω on obtient
$$n\omega_n^{\frac{1}{n}}\mathrm{Vol}(\Omega)^{1-\frac{1}{n}} \leq -\int_\Omega \Delta V = \int_{\partial\Omega} \langle \nabla V, \eta\rangle \leq \mathrm{vol}(\partial\Omega)$$
où η est la normale extérieure à Ω. On utilise, en particulier le fait que $\nabla V = T$ est à valeurs dans B.

Dans cette preuve, nous n'avons pas évoqué les problèmes de régularité. L'application V étant convexe, elle est localement lipschitzienne, et deux fois dérivable presque partout. Cependant, pour le changement de variable et l'utilisation de la formule de la divergence il faudrait que V soit C^2. Une façon de contourner le problème est d'utiliser la hessienne au sens d'Alexandrov pour le changement de variable, et de remarquer que le laplacien au sens d'Alexandrov est majoré par le laplacien au sens des distributions pour la formule de la divergence (cf. [CENV04] pour les détails).

2.2.2 Transport optimal et sous-variétés

Dans la preuve précédente, l'application de transport optimal est un moyen comparer le domaine Ω à un domaine modèle (la boule unité). Si Ω est un domaine d'une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^{n+k}$, on voudrait le comparer à la boule unité d'une n plan, et pour cela utiliser le transport optimal entre une mesure portée par la sous-variété et une mesure portée par un n-plan.

La difficulté principale est que le théorème 2.2.5 ne s'applique pas à cette situation ; l'hypothèse optimale sur les mesures étant qu'elles ne chargent pas d'ensemble petit (ie. de dimension de Hausdorff inférieure à $n+k-1$), et les sous-variétés, comme les n-plans, étant des ensembles petits.

De plus, il est facile de construire des exemples de mesures portées par des sous-variétés pour lesquelles il n'existe pas d'application de transport optimal. Dans notre cas, nous allons montrer l'existence d'une application de transport optimal, mais tout repose sur le fait que la mesure cible est supportée par un n-plan.

Soit $M \to \mathbb{R}^{n+k}$ une sous-variété de dimension n, et soit $\mu = f dv_M$ une mesure de probabilité supportée par M, et absolument continue par rapport à la mesure riemannienne de M. On cherche à transporter μ sur une mesure de probabilité $\nu = G(z)dz$, absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue d'un n-plan E. Une façon de faire est de projeter orthogonalement μ sur E puis d'utiliser le théorème 2.2.5 dans E (cette façon de faire est naturelle dans la mesure où les projections orthogonales sont des transports optimaux, cf. [Cas10] §2).

2. On rappelle que dans ce texte on a choisit la convention $\Delta u = -\mathrm{tr}(D^2u)$

Soit $p : M \to E$ la projection orthogonale, et soit $J_E(x) = |\det(T_x p)|$ le jacobien de p en x. Pour s'assurer que la mesure $p_\# \mu$ soit absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, il suffit de supposer que f s'annule sur l'ensemble critique $\mathcal{C} = \{x \in M \mid J_E(x) = 0\ \}$. Sous cette hypothèse, on a alors $p_\# \mu = F(y)dy$ avec

$$F(y) = \sum_{x \in p^{-1}(y) \cap \mathrm{Spt}(\mu)} \frac{f(x)}{J_E(x)} \tag{2.3}$$

En appliquant le théorème 2.2.5 à $p_\# \mu$ et ν on obtient :

Théorème 2.2.6 (cf. [Cas10]) *Pour toute fonction positive $f : M \to \mathbb{R}$ s'annulant sur $\mathcal{C}$, et pour toute mesure ν supportée par E, le problème de Monge entre les mesures $\mu = f dv_M$ et ν possède une solution $T : M \to E$.*

De plus, il existe une fonction convexe $\bar{V}$ sur $\mathbb{R}^{n+k}$ telle que T soit la restriction à M du gradient de $\bar{V}$.

Le transport optimal donné par ce théorème consiste à composer S (transport optimal dans E entre $p_\# \mu$ et ν) avec p (qui est un transport entre μ et $p_\# \mu$). Le critère de Knott-Smith (cf. [Vil03, Pra08]) et le théorème de Pythagore permettent de montrer l'optimalité de $S \circ p$ (cf. [Cas10] théorème 2.2).

Par ailleurs, on a $S = \nabla V$ pour une certaine fonction convexe V sur E, donc $S \circ p = \bar{\nabla} \bar{V}$ où $\bar{V} = V \circ p$ est l'extension à $\mathbb{R}^{n+k}$ de E, invariante dans la direction $E^\perp$ (ici, $\bar{\nabla}$ désigne le gradient dans $\mathbb{R}^{n+k}$).

Remarque 2.2.7 Il existe une notion de "plan de transport" plus générale que celle "d'application de transport" utilisée ici, et pour laquelle un plan de transport optimal entre deux mesures existe toujours. Dans ce cadre, les projections orthogonales jouent encore un rôle naturel (cf. [Cas10] §2).

2.2.3 Sous-variétés et isopérimétrie

Soit $M^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ une sous-variété de dimension n, soit E un n-plan, et soit Ω un domaine de M. Soit $\mu = f dv_M$ une mesure de probabilité portée par Ω, où $f : \Omega \to \mathbb{R}$ s'annule sur $\mathcal{C}$, et soit $\nu = \frac{\chi_B(z)dz}{\omega_n}$ la mesure uniforme de la boule unité B de E.

La fonction f s'annulant sur $\mathcal{C}$, la mesure $p_\# \mu$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur E : on a $p_\# \mu = F(y)dy$ avec $F(y)$ donné par 2.3.

Par le théorème 2.2.5 (dans E), il existe une fonction convexe V sur E telle que $T = \nabla V$ soit l'application de transport optimal entre $p_\# \mu$ et ν. Par un argument similaire à celui utilisé pour l'égalité 2.2 on obtient (sur E)

$$\omega_n F(y) = \det(D^2 V(y))$$

et donc, pour tout $x \in \mathrm{Spt}(\mu)$

$$\omega_n \frac{f(x)}{J_E(x)} \leq \omega_n F(p(x)) = \det(D^2 V(p(x))) \tag{2.4}$$

Pour terminer, on veut intégrer cette inégalité sur M et utiliser la formule de la divergence. Pour cela, il faut comparer $\det(D^2 V(p(x))$ à un laplacien sur M.

Soit $\bar{V} = V \circ p$ l'extension de V à $\mathbb{R}^{n+k}$ invariante dans les directions $E^\perp$, et soit $V_M = \bar{V}_{|M} : M \to \mathbb{R}$. La hessienne de V_M est donnée par

$$D^2 V_M(x) = \bar{D}^2 \bar{V}(x)_{|T_x M} + \langle \bar{\nabla} \bar{V}(x), \mathcal{A}_x \rangle,$$

où $\mathcal{A}_x$ est la seconde forme fondamentale de M en x. En prenant la trace, on obtient

$$-\Delta V_M(x) = \operatorname{tr}(\bar{D}^2 \bar{V}(x)_{|T_x M}) + n \langle \bar{\nabla} \bar{V}(x), H_x \rangle. \tag{2.5}$$

Par ailleurs, comme $\bar{V}$ est invariante suivant $E^\perp$, et comme $T_x p : T_x M \to E$ est la projection orthogonale, on a

$$\bar{D}^2 \bar{V}(x)(\xi, \eta) = D^2 V(p(x))(T_x p.\xi, T_x p.\eta)$$

pour tout $\xi, \eta \in T_x M$, et le déterminant donne

$$\det(\bar{D}^2 \bar{V}(x)_{|T_x M}) = J_E(x)^2 \det(D^2 V(p(x))).$$

L'inégalité 2.4 devient donc

$$\omega_n J_E(x) f(x) \le \det(\bar{D}^2 \bar{V}(x)_{|T_x M})$$

A partir de cette équation, on peut reprendre le cours de la preuve de l'isopérimétrie de $\mathbb{R}^n$: l'inégalité arithmético-géométrique et l'expression 2.5 pour ΔV_M donnent

$$n \omega_n^{\frac{1}{n}} J_E(x)^{\frac{1}{n}} f(x)^{\frac{1}{n}} \le -\Delta V_M(x) - n \langle (\bar{\nabla} \bar{V})_x, H_x \rangle,$$

et en intégrant sur Ω, on obtient

$$n \omega_n^{\frac{1}{n}} \int_\Omega J_E^{\frac{1}{n}} f^{\frac{1}{n}} dv_M \le \operatorname{vol}(\partial \Omega) + n \int_\Omega |H| dv_M.$$

C'est maintenant le bon choix de f qui permet de conclure : soit $\alpha > 0$, et soit $f = \frac{J_E^\alpha \chi_\Omega}{\int_\Omega J_E^\alpha dv_M}$. L'inégalité précédente donne

$$\frac{n \omega_n^{\frac{1}{n}}}{(\int_\Omega J_E^\alpha dv_M)^{\frac{1}{n}}} \int_\Omega J_E^{\frac{\alpha+1}{n}} dv_M \le \operatorname{vol}(\partial \Omega) + n \int_\Omega |H| dv_M.$$

Pour $\alpha = \frac{1}{n-1}$ on obtient l'inégalité du théorème 2.2.2, et en faisant tendre α vers 0 l'inégalité précédente donne

$$\frac{n \omega_n^{\frac{1}{n}}}{\operatorname{Vol}(\Omega)^{\frac{1}{n}}} \int_\Omega J_E^{\frac{1}{n}} dv_M \le \operatorname{vol}(\partial \Omega) + n \int_\Omega |H| dv_M.$$

Une intégration par rapport à E sur la Grassmannienne des n-plan de $\mathbb{R}^{n+k}$ donne l'inégalité du théorème 2.2.3.

Remarque 2.2.8 Comme pour la preuve de l'inégalité isopérimétrique de $\mathbb{R}^n$, on est confronté aux problèmes de régularité des fonctions V, $\bar{V}$ et V_M. On montre qu'il existe un laplacien au sens d'Alexandrov pour V_M et que l'égalité 2.5 est encore vraie au sens d'Alexandrov (cf. [Cas10] proposition 1.3 et remarque 1.4)

Remarque 2.2.9 La méthode s'étend aux variétés ambiantes dans lesquelles on peut projeter sur une sous-variété isométrique à un espace euclidien. C'est par exemple le cas de l'espace hyperbolique (projection sur les horosphères) et plus généralement de certains produits tordus (du type $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+k}$ muni de la métrique $dt^2 + w^2(t)dx^2$, où dx^2 est la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^{n+k}$). On obtient dans ce cadre des inégalités isopérimétriques et de Sobolev à poids, le poids dépendant du jacobien de la projection (c'est à dire des fonctions de Busemann pour l'espace hyperbolique et de la fonction w pour les produits tordus, cf. [Cas10] §4).

2.2.4 Perspectives de recherche

L'utilisation du transport optimal en géométrie est un sujet très actif et de nombreuses inégalités géométriques possèdent une preuve via des applications de transport optimal. La description du transport optimal entre sous-variétés que j'ai obtenue donne entre autre une notion d'interpolation entre un domaine sur une sous-variété et un domaine dans un n-plan. Cette notion devrait permettre d'obtenir d'autres inégalités géométriques (du type Brascamp-Lieb, Prekopa-Leindler ou Brunn-Minkowski)

Par ailleurs, le problème isopérimétrique sur les sous-variétés se pose aussi dans d'autres espaces où le transport optimal est assez bien compris ; c'est le cas par exemple dans le groupe de Heisenberg (cf. par exemple [Mon09] pour une preuve "à la Michael et Simon" de l'isopérimétrie sur les sous-variétés dans ce cadre).

Enfin, si le coût quadratique [3] est le plus naturel dans de nombreuses situations (et en particulier dans l'espace euclidien), il serait intéressant d'étudier les problèmes de transports optimaux associés à d'autres coûts prenant en compte la géométrie ambiante (voir par exemple [Ber10] pour un problème de nature géométrique où le coût pertinent n'est pas le coût quadratique).

2.3 Variétés asymptotiquement harmoniques

Dans cette partie on s'intéresse à des sous-variétés particulières (les horosphères des variétés de Cartan-Hadamard) dont les propriétés géométriques doivent rendre compte de la géométrie ambiante. On montre que les supposer de courbure moyenne constante permet de déterminer des invariants asymptotiques de la variété ambiante. Les recherches décrites dans cette section sont issues d'une collaboration avec Andrea Sambusetti.

2.3.1 Variétés harmoniques et asymptotiquement harmoniques

Les variétés harmoniques sont celles sur lesquelles les fonctions harmoniques ont la propriété de la moyenne, les exemples typiques étant $\mathbb{R}^n$ et les espaces symétriques de rang un.

Une formulation équivalente consiste à dire que M est harmonique s'il existe une fonction $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in M$, $\Delta r_x = -nh(r_x)$ (où r_x est la fonction

3. C'est à dire le coût donné par le carré de la distance : $I(T) = \int_M d^2(x, Tx)d\mu(x)$. D'autres fonctions coût on été étudiées, par exemple par W. Gangbo et R. Mc Cann qui ont caractérisé les transports optimaux pour des coûts donnés par une fonction strictement convexe de la distance sur $\mathbb{R}^n$, ou par P. Bernard et B. Buffoni pour les coûts obtenus en minimisant une action Lagrangienne.

distance à x), où encore, pour tout $x \in M$ et tout $r > 0$, la sphère $S_x(r)$ est de courbure moyenne constante $h(r)$ (cf. [Bes78] §6 pour une introduction aux variétés harmoniques).

En 1944, A. Lichnerowicz conjecturait (et démontrait en dimension 4) que les espaces symétriques de rang un sont les seules variétés harmoniques. Cette conjecture est vraie pour les variétés compactes simplement connexes (preuve de Z. Szabo, cf. [Sza90]) et pour les variétés de Cartan-Hadamard de courbure strictement négative et cocompactes ; comme expliqué ci-après (cf. théorème 2.3.2), c'est une conséquence des travaux de Y. Benoist, P. Foulon et F. Labourie et de G. Besson, G. Courtois et S. Gallot (cf. [FL92, BFL92, BCG95]).

En 1992, E. Dameck et F. Ricci exhibaient des variétés harmoniques homogènes non-symétriques (cf. [DR92]). Depuis, J. Heber a montré en 2006, que les seules variétés harmoniques homogènes simplement connexes sont les espaces de Damek-Ricci et les espaces symétriques de rang un (cf. [Heb06]).

Par ailleurs, dans plusieurs de ces travaux, une version asymptotique de l'hypothèse d'harmonicité apparaît naturellement (cf. [FL92, Heb06]). Soit M^{n+1} une variété de Cartan-Hadamard (ie. simplement connexe et de courbure négative), et soit $\partial_\infty M$ son bord asymptotique. La variété M est asymptotiquement harmonique s'il existe une constante $h \in \mathbb{R}_+$ telle que, pour tout $\xi \in \partial_\infty M$, $\Delta b_\xi = -nh$ (où b_ξ désigne la fonction de Busemann centrée en ξ). Cela revient à demander que les horosphères soient de courbure moyenne constante h ; en particulier, un passage à la limite montre que les variétés harmoniques sont asymptotiquement harmoniques.

Dans ce qui suit, on s'intéresse au spectre et à l'entropie volumique des variétés de Cartan-Hadamard asymptotiquement harmoniques. L'entropie volumique, qui donne le "taux de croissance exponentielle" du volume des boules, est définie par :

$$E = \limsup_{R\to\infty} \frac{1}{R} \log(\mathrm{Vol}(B_x(R)))$$

Dans le cas des variétés cocompactes, F. Ledrappier a montré que l'hypothèse d'harmonicité asymptotique permet de faire le lien entre le spectre du laplacien et l'entropie volumique, de même qu'entre différentes familles de mesures sur $\partial_\infty M$ (cf [Led90]) :

Théorème 2.3.1 *Soit M^{n+1} une variété de Cartan-Hadamard de dimension $n+1$, cocompacte, de courbure strictement négative. On a équivalence entre*

i. M est asymptotiquement harmonique ;

ii. l'entropie E et le spectre $\sigma(\Delta)$ de M vérifient $\inf(\sigma(\Delta)) = \frac{E^2}{4}$;

iii. les mesures harmoniques et de Bowen-Margulis coïncident sur $\partial_\infty M$.

De plus, si M est asymptotiquement harmonique, alors $E = nh$ et $\inf(\sigma(\Delta)) = \frac{n^2h^2}{4}$, où h est la courbure moyenne des horosphères.

Par ailleurs, des résultats conjugués de Y. Benoist, P. Foulon, F. Labourie et de G. Besson, G. Courtois, S. Gallot permettent de montrer que, en courbure strictement négative, les variétés asymptotiquement harmoniques cocompactes sont les espaces symétriques :

Théorème 2.3.2 *Soit M une variété de Cartan-Hadamard cocompacte à courbure strictement négative. Si M est asymptotiquement harmonique, alors elle est un espace symétrique de rang un.*

L'hypothèse d'harmonicité asymptotique permet de montrer que le flot géodésique d'un quotient compact de M est conjugué au flot géodésique d'une variété localement symétrique (cf. [FL92, BFL92]) ; en particulier, ces flots ont même entropie topologique. En courbure négative, l'entropie topologique est égale à l'entropie volumique, et comme l'entropie volumique caractérise les métriques localement symétriques (cf. [BCG95]), on en déduit que M est un espace symétrique.

2.3.2 Spectre et entropie des variétés asymptotiquement harmoniques

Dans la suite, M désigne une variété riemannienne de dimension $n+1$.

L'hypothèse d'harmonicité asymptotique permet d'avoir des informations sur le spectre et l'entropie. Comme $\Delta b_\xi = -nh$ et $|\nabla b_\xi| = 1$, en intégrant Δb_ξ sur un domaine Ω et en utilisant la formule de la divergence, on obtient l'inégalité isopérimétrique $nh\mathrm{Vol}(\Omega) \leq \mathrm{vol}(\partial\Omega)$.

L'inégalité de Cheeger donne alors $\sigma(\Delta) \subset [\frac{n^2h^2}{4}, \infty)$. De plus, si $V_x(r) = \mathrm{Vol}(B_x(r))$, alors $V_x'(r) = \mathrm{vol}(\partial B_x(r))$ et cette inégalité isopérimétrique donne $nhV_x(r) \leq V_x'(r)$, ce qui implique (via l'intégration de cette inégalité) que l'entropie est minorée par nh. Sans hypothèse de cocompacité ou d'homogénéité, on montre que le spectre et l'entropie sont en fait complètement déterminés :

Théorème 2.3.3 (cf. [CS10]) *Soit M^{n+1} une variété asymptotiquement harmonique de courbure sectionnelle négative, et soit h la norme du vecteur courbure moyenne des horosphères. On a alors*

i. l'entropie de M est $E = nh$;

ii. le spectre du laplacien de M est $\sigma(\Delta) = [\frac{n^2h^2}{4}, +\infty)$.

L'outil principal de la preuve est le résultat de comparaison suivant qui porte sur les secondes formes fondamentales de deux sphères tangentes en un point. Soit $r < R$, et soient $S_x(r)$ et $S_y(R)$ deux sphères de rayons r et R, tangentes en un point z, et telles que $S_x(r)$ soit contenue dans la boule de centre y et de rayon R. Dans cette situation, on a le résultat suivant (dont la preuve est basée sur un raffinement du théorème de Toponogov, cf. [CS10] §1) :

Lemme 2.3.4 *Soit M^{n+1} une variété de Cartan-Hadamard de courbure sectionnelle vérifiant $K \leq -a^2 \leq 0$. Pour tout $u \in T_zS_x(r) = T_zS_y(R)$, on a*

$$0 \leq \langle \mathcal{A}^x(u,u), \nu\rangle - \langle \mathcal{A}^y(u,u), \nu\rangle \leq (\cot_a(r) - \cot_a(R))|u|^2.$$

Si de plus on a $-b^2 \leq K$, alors

$$(\cot_b(r) - \cot_b(R))|u|^2 \leq \langle \mathcal{A}^x(u,u), \nu\rangle - \langle \mathcal{A}^y(u,u), \nu\rangle \leq (\cot_a(r) - \cot_a(R))|u|^2.$$

Dans l'énoncé, on a noté

$$\cot_a(r) = \begin{cases} a\coth(ar) & \text{si } a > 0 \\ \frac{1}{r} & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

Par ailleurs, il est aussi possible de comparer la seconde forme fondamentale d'une sphère à celle d'une horosphère tangente. En faisant tendre y vers un point $\xi \in \partial_\infty M$ (le long de la géodésique issue de z et passant par x), et en notant $\mathcal{A}^\xi$ la seconde forme fondamentale en z de l'horosphère ainsi obtenue, on obtient, pour tout $u \in T_z S_x(r)$,

$$0 \leq \langle \mathcal{A}^x(u,u), \nu \rangle - \langle \mathcal{A}^\xi(u,u), \nu \rangle \leq (\cot_a(r) - a)|u|^2$$

si $K \leq -a^2$ et

$$(\cot_b(r) - b)|u|^2 \leq \langle \mathcal{A}^x(u,u), \nu \rangle - \langle \mathcal{A}^\xi(u,u), \nu \rangle \leq (\cot_a(r) - a)|u|^2$$

si $-b^2 \leq K \leq -a^2$.

La seconde forme fondamentale des sphères est liée à la hessienne de la fonction distance, et la dérivée seconde du volume des boules est donnée par l'intégrale sur les sphères de leur courbure moyenne. Notons $h_x(y)$ la courbure moyenne de la sphère $S_x(r)$ en y, où $r = d(x,y)$. On a alors

$$\Delta r_x(y) = -n h_x(y) \quad \text{et} \quad V_x''(s) = n \int_{S_x(s)} h_x(y) d\sigma_s(y)$$

où $d\sigma_s$ est la mesure riemannienne de $S_x(s)$.

Si la variété est asymptotiquement harmonique, en comparant les secondes formes fondamentales des sphères de grand rayon à celles des horosphères et en prenant leurs traces, le lemme 2.3.4 donne le comportement asymptotique du laplacien de la fonction distance et de la dérivée seconde du volume des boules. Pour un point $x \in M$ fixé, on a

$$\lim_{y \to \infty} \Delta r_x(y) = -nh \quad \text{et} \quad \lim_{s \to \infty} \frac{V_x''(s)}{V_x'(s)} = nh$$

La première égalité permet d'utiliser le critère de Weyl (cf. [RS80], théorème VII.12 p. 237) pour déterminer le spectre du laplacien (on suit ici la méthode initiée par H. Donnelly, pour un énoncé directement applicable à notre situation voir par exemple [Kum97] théorème 1.2). La seconde inégalité permet de majorer l'entropie.

2.3.3 Comportement asymptotique de la forme volume

Le résultat précédent sur l'entropie s'obtient en intégrant sur les sphères une estimée de courbure moyenne donnée par le lemme 2.3.4, pour en déduire une estimée de croissance du volume des boules. Cependant, les inégalités du lemme 2.3.4 étant ponctuelles, elles permettent d'obtenir des propriétés de croissance de la forme volume.

On suppose que M est une variété de Cartan-Hadamard de courbure pincée, $-b^2 \leq K \leq -a^2 < 0$. En coordonnées polaires centrées en $x \in M$, la forme volume s'écrit $dv_M = \theta_x(u,r) du dr$, $u \in S_x M$ et $r \in \mathbb{R}_+$. Si on note $h_x(u,r)$ la courbure moyenne de la sphère $S_x(r)$ en $\exp_x(ru)$, on a alors $\frac{\theta_x'(u,r)}{\theta_x(u,r)} = n h_x(u,r)$, où θ_x' désigne la dérivée par rapport à r. En comparant les secondes formes fondamentales de sphères tangentes et en prenant leurs traces, le lemme 2.3.4 permet de déterminer le comportement asymptotique de $\theta_x(u,r)$ pour x et u fixés. On montre en particulier que la croissance de $\theta_x(u,r)$ est purement exponentielle, avec un taux de croissance exponentiel indépendant de u : “la croissance du volume est isotrope”.

Théorème 2.3.5 (cf. [CS10]) *Soit M^{n+1} une variété de Cartan-Hadamard asymptotiquement harmonique et de courbure sectionnelle pincée, $-b^2 \leq K \leq -a^2 < 0$. Alors, il existe une fonction $\tau : SM \to \mathbb{R}$ telle que*

$$\forall x \in M \quad \forall u \in S_xM \quad |\theta_x(u,r)\mathrm{e}^{-nhr} - \tau(x,u)| \leq \varepsilon(r)$$

où $\varepsilon(r)$ ne dépend que des bornes sur la courbure, et $\lim_{r\to\infty} \varepsilon(r) = 0$.

Ce résultat montre en particulier que la convergence est uniforme, et donc que la fonction τ est continue sur le fibré tangent. De plus, cette fonction τ est liée à plusieurs invariants asymptotiques de M.

En particulier, elle intervient dans les densités relatives des mesures visuelles sur $\partial_\infty M$. L'application exponentielle définit un homéomorphisme entre S_xM et $\partial_\infty M$ (donné par $\phi_x(u) = \lim_{s\to\infty} \exp_x(su)$) ; la mesure visuelle λ_x est le poussé sur $\partial_\infty M$ de la mesure canonique de S_xM. Dans notre cas, on a

$$\frac{d\lambda_x}{d\lambda_y}(\xi) = \frac{\tau(y,v_\xi)}{\tau(x,u_\xi)}\mathrm{e}^{-nh(b_\xi(x)-b_\xi(y))}$$

où $u_\xi = \phi_x^{-1}(\xi)$ et $v_\xi = \phi_y^{-1}(\xi)$.

Par ailleurs, sur le bord asymptotique d'une variété de Cartan-Hadamard, on peut définir les mesures harmoniques $d\mu_x$, $x \in M$, qui permettent de résoudre le problème de Dirichlet à l'infini (cf. [AS85]). Dans notre cas, les fonctions e^{-nhb_ξ} étant harmoniques sur M et nulles sur $\partial_\infty M \setminus \{\xi\}$, on en déduit que la densité relative des mesures harmoniques est donnée par

$$\frac{d\mu_x}{d\mu_y}(\xi) = \mathrm{e}^{-nh(b_\xi(x)-b_\xi(y))}.$$

La fonction τ fait donc le lien entre mesures visuelles et mesures harmoniques.

Dans l'étude des variétés cocompactes, Margulis a introduit la fonction

$$m(x) = \lim_{r\to\infty} \mathrm{vol}(S_x(r))\mathrm{e}^{-Er}$$

où E est l'entropie (il est notamment conjecturé que la fonction de Margulis est constante si et seulement si l'espace est symétrique, cf. par exemple [Yue95, Kni94] où cette fonction est étudiée). Le théorème 2.3.5 permet également de définir une fonction de Margulis pour les variétés asymptotiquement harmoniques :

$$m(x) = \lim_{r\to\infty} \mathrm{vol}(S_x(r))\mathrm{e}^{-nhr} = \int_{S_xM} \tau(x,u)du = \int_{\partial_\infty M} \tau(x,u_\xi)d\lambda_x(\xi)$$

où $u_\xi = \phi_x^{-1}(\xi)$. En particulier, en se fixant une origine x_0, la fonction de Margulis s'écrit

$$m(x) = \int_{\partial_\infty M} \tau(x_0,v_\xi)\mathrm{e}^{-nh(b_\xi(x)-b_\xi(x_0))}d\lambda_{x_0}(\xi)$$

où $v_\xi = \phi_{x_0}^{-1}(\xi)$. On en déduit que m est une fonction harmonique.

Une caractérisation de l'harmonicité asymptotique

Le résultat précédent s'obtient en intégrant, le long d'une géodésique, la différence entre les courbures moyennes de sphères et d'horosphères. Connaissant la courbure moyenne des horosphères, on en déduit le comportement asymptotique de la courbure moyenne des sphères.

Comme le lemme 2.3.4 ne suppose rien d'autre que des bornes sur la courbure, on peut s'en servir pour déterminer la courbure moyenne des horosphères connaissant le comportement asymptotique de la forme volume. On obtient ainsi une réciproque au théorème 2.3.5, c'est à dire une caractérisation des variétés asymptotiquement harmoniques :

Théorème 2.3.6 (cf. [CS10]) *Soit M une variété de Cartan-Hadamard de courbure pincée, $-b^2 \leq K \leq -a^2 < 0$, et soit E son entropie. S'il existe une fonction $\tau : SM \to \mathbb{R}$ telle que $\theta_x(u,r)\mathrm{e}^{-Er}$ converge uniformément vers $\tau(x,u)$ lorsque r tend vers $+\infty$, alors M est asymptotiquement harmonique.*

Si de plus M admet un quotient compact, alors M est un espace symétrique.

La seconde assertion est une conséquence du théorème 2.3.2.

2.3.4 Perspectives de recherche

Le point *iii.* du théorème 2.3.1 fait le lien entre l'harmonicité asymptotique et la coïncidence des mesures harmoniques et de Bowen-Margulis. Cette dernière famille de mesures sur $\partial_\infty M$ se définit via l'action isométrique d'un groupe discret sur M. Les méthodes utilisées ici ne faisant pas appel à la cocompacité, on peut espérer obtenir des résultats pour des actions de covolume fini.

Par ailleurs, sans action de groupe, se pose la question des liens entre mesures visuelles et harmoniques. Une question naturelle est donc de savoir si la fonction τ est constante. Une première étape serait de montrer qu'elle est invariante par le flot géodésique.

Bibliographie

[All72] W.K. Allard. On the first variation of a varifold. *Ann. of Math. (2)*, 95 :417–491, 1972.

[And84] M.T. Anderson. The compactification of a minimal submanifold in euclidean space by the gauss map. Prépublication de l'I.H.E.S., 1984.

[AS85] M.T. Anderson and R. Schoen. Positive harmonic functions on complete manifolds of negative curvature. *Ann. of Math. (2)*, 121(3) :429–461, 1985.

[BB90] P. Bérard and G. Besson. Number of bound states and estimates on some geometric invariants. *J. Funct. Anal.*, 94(2) :375–396, 1990.

[BB00] J.L. Barbosa and P. Bérard. Eigenvalue and "twisted" eigenvalue problems, applications to CMC surfaces. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 79(5) :427–450, 2000.

[BCC10] P. Bérard, P. Castillon, and M. Cavalcante. Eigenvalue estimates for hypersurfaces in $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ and applications. Prépublication, 2010.

[BCG95] G. Besson, G. Courtois, and S. Gallot. Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative. *Geom. Funct. Anal.*, 5(5) :731–799, 1995.

[BdC84] J.L. Barbosa and M.P. do Carmo. Stability of hypersurfaces with constant mean curvature. *Math. Z.*, 185(3) :339–353, 1984.

[BdCE88] J.L. Barbosa, M.P. do Carmo, and J. Eschenburg. Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in Riemannian manifolds. *Math. Z.*, 197(1) :123–138, 1988.

[BdCS97] P. Bérard, M.P. do Carmo, and W. Santos. The index of constant mean curvature surfaces in hyperbolic 3-space. *Math. Z.*, 224(2) :313–326, 1997.

[BdCS98] P. Bérard, M.P. do Carmo, and W. Santos. Complete hypersurfaces with constant mean curvature and finite total curvature. *Ann. Global Anal. Geom.*, 16(3) :273–290, 1998.

[BE08] P. Bérard and R. Sa Earp. Minimal hypersurfaces in $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, total curvature and index. 08 2008.

[Ber10] J. Bertrand. Prescription of Gauss curvature using optimal mass transport. Prépublication, 2010.

[Bes78] A.L. Besse. *Manifolds all of whose geodesics are closed*, volume 93 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete [Results in Mathematics and Related Areas]*. Springer-Verlag, Berlin, 1978.

[BFL92] Y. Benoist, P. Foulon, and F. Labourie. Flots d'Anosov à distributions stable et instable différentiables. *J. Amer. Math. Soc.*, 5(1) :33–74, 1992.

[Bre91] Y. Brenier. Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions. *Comm. Pure Appl. Math.*, 44(4) :375–417, 1991.

[Cas97] P. Castillon. Sur l'opérateur de stabilité des sous-variétés à courbure moyenne constante dans l'espace hyperbolique. *Manuscripta Math.*, 94(3) :385–400, 1997.

[Cas99] P. Castillon. Spectral properties of constant mean curvature submanifolds in hyperbolic space. *Ann. Global Anal. Geom.*, 17(6) :563–580, 1999.

[Cas02] P. Castillon. Problèmes de petites valeurs propres sur les surfaces de courbure moyenne constante. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 130(4) :1153–1163 (electronic), 2002.

[Cas06] P. Castillon. An inverse spectral problem on surfaces. *Comment. Math. Helv.*, 81(2) :271–286, 2006.

[Cas10] P. Castillon. Submanifolds, isoperimetric inequalities and optimal transportation. *J. Funct. Anal.*, 259 :79–103, 2010.

[CENV04] D. Cordero-Erausquin, B. Nazaret, and C. Villani. A mass-transportation approach to sharp Sobolev and Gagliardo-Nirenberg inequalities. *Adv. Math.*, 182(2) :307–332, 2004.

[Cho05] J. Choe. Isoperimetric inequalities of minimal submanifolds. In *Global theory of minimal surfaces*, volume 2 of *Clay Math. Proc.*, pages 325–369. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[CS10] P. Castillon and A. Sambusetti. On asymptotically harmonic Cartan-Hadamard manifolds. Prépublication, 2010.

[dCdS90] M. P. do Carmo and A. M. da Silveira. Index and total curvature of surfaces with constant mean curvature. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 110(4) :1009–1015, 1990.

[dCP79] M. do Carmo and C. K. Peng. Stable complete minimal surfaces in $\mathbf{R}^3$ are planes. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 1(6) :903–906, 1979.

[dOF93] G. de Oliveira Filho. Compactification of minimal submanifolds of hyperbolic space. *Comm. Anal. Geom.*, 1(1) :1–29, 1993.

[DR92] E. Damek and F. Ricci. A class of nonsymmetric harmonic Riemannian spaces. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 27(1) :139–142, 1992.

[dS87] A. M. da Silveira. Stability of complete noncompact surfaces with constant mean curvature. *Math. Ann.*, 277(4) :629–638, 1987.

[ER08] J.M. Espinar and H. Rosenberg. A Colding-Minicozzi stability inequality and its applications. Prépublication, 2008.

[Esp09] J.M. Espinar. Finite index operators on surfaces. Prépublication, 2009.

[FC85] D. Fischer-Colbrie. On complete minimal surfaces with finite Morse index in three-manifolds. *Invent. Math.*, 82(1) :121–132, 1985.

[FCS80] D. Fischer-Colbrie and R. Schoen. The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature. *Comm. Pure Appl. Math.*, 33(2) :199–211, 1980.

[FL92] P. Foulon and F. Labourie. Sur les variétés compactes asymptotiquement harmoniques. *Invent. Math.*, 109(1) :97–111, 1992.

[Heb06] J. Heber. On harmonic and asymptotically harmonic homogeneous spaces. *Geom. Funct. Anal.*, 16(4) :869–890, 2006.

[HS74] D. Hoffman and J. Spruck. Sobolev and isoperimetric inequalities for Riemannian submanifolds. *Comm. Pure Appl. Math.*, 27 :715–727, 1974.

[Kni94] G. Knieper. Spherical means on compact Riemannian manifolds of negative curvature. *Differential Geom. Appl.*, 4(4) :361–390, 1994.

[Kum97] H. Kumura. On the essential spectrum of the Laplacian on complete manifolds. *J. Math. Soc. Japan*, 49(1) :1–14, 1997.

[Led90] F. Ledrappier. Harmonic measures and Bowen-Margulis measures. *Israel J. Math.*, 71(3) :275–287, 1990.

[Maz09] L. Mazet. Optimal length estimates for stable CMC surfaces in 3-space forms. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 137(8) :2761–2765, 2009.

[Mon09] F. Montefalcone. Isoperimetric, Sobolev and Poincaré inequalities on hypersurfaces in sub-riemannian Carnot groups. Prépublication, 2009.

[MPR08] W.H. Meeks, III, J. Pérez, and A. Ros. Stable constant mean curvature surfaces. In *Handbook of geometric analysis. No. 1*, volume 7 of *Adv. Lect. Math. (ALM)*, pages 301–380. Int. Press, Somerville, MA, 2008.

[MS73] J. H. Michael and L. M. Simon. Sobolev and mean-value inequalities on generalized submanifolds of R^n. *Comm. Pure Appl. Math.*, 26 :361–379, 1973.

[Pog81] A. V. Pogorelov. On the stability of minimal surfaces. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 260(2) :293–295, 1981.

[Pra08] A. Pratelli. On the sufficiency of c-cyclical monotonicity for optimality of transport plans. *Math. Z.*, 258(3) :677–690, 2008.

[RS80] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. I. Functional Analysis.* Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, second edition, 1980.

[ST89] K. Shiohama and M. Tanaka. An isoperimetric problem for infinitely connected complete open surfaces. In *Geometry of manifolds (Matsumoto, 1988)*, volume 8 of *Perspect. Math.*, pages 317–343. Academic Press, Boston, MA, 1989.

[ST93] K. Shiohama and M. Tanaka. The length function of geodesic parallel circles. In *Progress in differential geometry*, volume 22 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 299–308. Math. Soc. Japan, Tokyo, 1993.

[Sza90] Z. I. Szabó. The Lichnerowicz conjecture on harmonic manifolds. *J. Differential Geom.*, 31(1) :1–28, 1990.

[Tys87] J. Tysk. Eigenvalue estimates with applications to minimal surfaces. *Pacific J. Math.*, 128(2) :361–366, 1987.

[Tys89] J. Tysk. Finiteness of index and total scalar curvature for minimal hypersurfaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 105(2) :429–435, 1989.

[Vil03] C. Villani. *Topics in optimal transportation*, volume 58 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[Vil09] C. Villani. *Optimal transport : old and new*, volume 338 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences].* Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[Yue95] C. Yue. Brownian motion on Anosov foliations and manifolds of negative curvature. *J. Differential Geom.*, 41(1) :159–183, 1995.