TD 3 : Réduction des endomorphsimes

Les exercices ou les questions marqués d'une étoile ne sont pas prioritaires.

Exercice 1. Vrai/Faux

1. En dimension finie, un endomorphisme admet un nombre fini de vecteurs propres.
2. Si A est diagonalisable, alors A^2 est diagonalisable.
3. Si A^2 est diagonalisable, alors A est diagonalisable.
4. Tout endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension impaire admet au moins une valeur propre.
5. La somme de deux matrices diagonalisables est diagonalisable.

Exercice 2. Diagonaliser les matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 1 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. Rang 1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Déterminer, sans calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 4. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable ? Montrer que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5.* Soit E un vectoriel et u, v deux endomorphismes de E.

1. Démontrer que si $u \circ v = v \circ u$, alors $\mathsf{Im}(u)$ et $\mathsf{Ker}(u)$ sont stables par v. La réciproque est-elle vraie ?
2. On suppose désormais que u est un projecteur. Démontrer que $u \circ v = v \circ u$ si et seulement si $\mathsf{Ker}(u)$ et $\mathsf{Im}(u)$ sont stables par v.

Exercice I. VRAI / FAUX.

1) Attention ! on parle de vecteurs propres.

c'est FAUX. De 2 choses l'une :

① l'endomorphisme n'admet pas de vecteur propre (penser à une rotation de $\mathbb{R}^2$)

② l'endomorphisme admet au moins un sous-espace propre et il y a une infinité de vecteurs propres. En effet, si x est un vecteur propre, tous ses multiples λx (avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$) sont des vecteurs propres.

2) c'est VRAI. Si $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale. Alors

$$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1})$$
$$= P D^2 P^{-1}$$

et D^2 est diagonale.

3) c'est FAUX. Prendre $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui n'est pas diagonalisable

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1 \quad > 0$$

mais son carré $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est diagonale.

4) c'est VRAI. le polynôme caractéristique de A est de degré 3. il admet donc au moins une racine réelle. En effet

$$P(\lambda) = a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d$$

on a $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} P(\lambda) = +\infty$ et $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} P(\lambda) = -\infty$

Comme P est continue, il existe au moins un $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tq $P(\lambda_0) = 0$.

5) c'est FAUX ! prendre $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 :

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ le polynôme caractéristique est

$$P(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 4)$$

il est scindé à racines simples. et A est diagonalisable les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = -4$.

* pour $\lambda_1 = 1$, on résoud $AX = X$

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ x = y = z \right.$$

le vecteur propre associé est alors $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

* pour $\lambda_2 = 2$ on trouve $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

* pour $\lambda_3 = -4$ on trouve $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

on vérifie que

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

2) $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ le polynôme caractéristique est

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4$$
$$= (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

et $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$ (multiplicité 2)

* pour $\lambda_1 = 1$, on résoud $BX - X = 0$

$$\begin{cases} -x + 3y + 2z = 0 \\ -2x + 4y + 2z = 0 \\ 2x - 3y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ x = y = -z \right.$$

le sous espace propre associé est $\mathrm{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

* pour $\lambda_2 = 2$ on résoud $BX = 2X$

$$\begin{cases} -2x+3y+2z=0 \\ -2x+3y+2z=0 \\ 2x-3y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ 2x-3y-2z=0 \right.$$

c'est l'équation d'un plan dans $\mathbb{R}^3$. le sous espace propre associé à $\lambda_2 = 2$ est de dimension 2 (on retrouve la multiplicité) et est

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

choix arbitraire !

En résumé

$$B = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ c'est une rotation dans $\mathbb{R}^3$ d'axe Ox et d'angle θ.

. on remarque que $\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

. le polynôme caractéristique est

$$P(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta-\lambda & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} \cos\theta-\lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\left[(\cos\theta-\lambda)^2 + \sin^2\theta\right]$$

$$= (1-\lambda)\left[\cos^2\theta - 2\lambda\cos\theta + \lambda^2 + \sin^2\theta\right]$$

$$= (1-\lambda)\left[1 - 2\lambda\cos\theta + \lambda^2\right]$$

on a $\Delta = 4\cos^2\theta - 4 = 4(\cos^2\theta - 1)$

qui est tout le temps négatif sauf si $\theta = 0\ [2\pi]$

où $\Delta = 0$.

$C = I_3$ dans ce cas ...

En résumé. C est diagonalisable si $\theta = 0$ et n'est pas diagonalisable (dans $\mathbb{R}$ ...) sinon

Exercice 3 : (Rang 1)

1) Comme $|a| \neq |b|$ les colonnes sont identiques (et A n'est pas la matrice nulle !). Ainsi

- 0 est valeur propre de A car $\ker(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}^{\perp}$ qui est un espace de dimension 3 (th du rang)

- le polynôme caractéristique est donc divisible par λ^3

ie $P(\lambda) = \lambda^3 Q(\lambda)$ où Q polynôme de d° 1
$= \lambda^3 (\lambda - \lambda_2)$

c'est donc un polynôme scindé : les valeurs propres :

$\lambda_1 = 0$ multiplicité 3
λ_2 1

et A est diagonalisable.

on sait que $\text{trace}(A) = 3\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_2 = 1 + 2 + 3 + 4$
et $\lambda_2 = 10$.

Exercice 5 : E espace vectoriel $u : E \to E$
$v : E \to E$

remarque : si V est un sev de E et $f : E \to E$. on dit que V est stable par f ssi $f(V) \subset V$.

$E \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} E$
$x \longmapsto y$

1) * on montre que $\mathrm{Im}(u)$ est stable par v.

Soit donc $y \in \mathrm{Im}(u)$. Il existe $x \in E$ tq $y = u(x)$. On a
$v(y) = v(u(x)) = u(v(x)) \in \mathrm{Im}(u)$.

* Idem avec $\ker(u)$. Prendre $z \in \ker(u)$. Alors $u(z) = 0$ et

comme v est linéaire $\quad v(u(z)) = v(0) = 0 \in \mathrm{Ker}(u)$.

La réciproque est fausse ! Si u et v sont bijectifs :

$$\mathrm{Ker}(u) = 0 \quad \text{par hypothèse}$$

$$\text{et } \mathrm{Im}(u) = E \quad \text{par hypothèse aussi.}$$

et ils sont stable par v car ... v est bijectif.

Mais il n'y a pas de "raison" que u et v commuttent $(u \circ v \neq v \circ u)$

e.g. considerer $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dont les matrices dans les bases canoniques sont

$$A = \mathcal{M}_{can,can}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \mathcal{M}_{can,can}(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

on a $\quad AB \neq BA$.

2) Puisque u est un projecteur : on a $\quad E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$

Autrement dit, on peut décomposer tout $x \in E$ tq

$$x = \underbrace{y}_{\in \mathrm{Ker}(u)} + \underbrace{z}_{\in \mathrm{Im}(u)}$$

① $\quad u(v(x)) = \underbrace{u(v(y))}_{=0} + u(v(z))$

car $v(y) \in \mathrm{Ker}(u)$ (d'après 1)) et

$$u(v(x)) = u(v(z))$$

mais comme $v(z) \in \mathrm{Im}(u)$ et que $u^2 = u$ on a

$$u(v(x)) = u(v(z)) = v(z)$$

② $\quad v(u(x)) = v(u(y+z)) \qquad y \in \mathrm{Ker}\, u$

$$= v(u(y)) + v(u(z))$$

$$= v(u(z))$$

et on a bien $\quad u \circ v(x) = v \circ u(x) \quad \forall x \in E$

Exercice 4 (trigonalisation)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ le polynôme caractéristique est $P(\lambda) = -(1-\lambda)^3$

la seule racine de ce polynôme est 1. Comme $A \neq I_3 \Rightarrow A$ n'est pas diagonalisable.

cherchons l'espace propre associé à la valeur propre 1 : $AX - X = 0$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ -y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{ y = -z$$

c'est un sev de dimension 2. Une base possible est

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = u_2$$

On cherche alors un troisième vecteur u_3 tq

condition donnée par B

$$A u_3 = u_2 + u_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ -z = 1 + y \\ y + 2z = -1 + z \end{cases} \Leftrightarrow z = -1 - y$$

on pose

$$u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$