CC1

Durée 1h00. Les documents, la calculatrice, les téléphones portables, tablettes, ordinateurs ne sont pas autorisés. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1. Sur Orion, les Rigolus et les Tristus cherchent à faire la paix. Heureusement, il y a trois fois plus de Rigolus que de Tristus. Chez les Rigolus, 60% sont favorables à la paix, 16% veulent la guerre et 24% sont sans opinion. Chez les Tristus, 68% souhaitent faire la guerre, tandis que 12% veulent la paix et que 20% sont sans opinion. Vous rencontrez par hasard un habitant d'Orion (on ne vous demande pas la probabilité de le rencontrer...) et vous lui demandez son opinion.

1. Calculer la probabilité qu'il soit sans opinion.
2. S'il vous répond qu'il est favorable à la paix, quelle est la probabilité qu'il soit un Rigolus ?

Exercice 2. Passe-Partout possède un trousseau de 10 clés, dont une seule ouvre la salle du trésor.

1. Pour récupérer les Boyards, il teste une après l'autre les dix clés, en retirant chaque clé testée. Déterminer la probabilité p_k qu'il faille k essais pour ouvrir la salle du trésor.

   Remarquons tout d'abord que dans ce cas il faut au plus 10 essais pour ouvrir la salle du trésor. Notons A_k l'évènement "la salle s'ouvre avec la k-ème clé". On a clairement $p_1 = \mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{10}$. Puis, la probabilité que la salle s'ouvre avec la deuxième clé testée vaut

$$p_2 = \mathbb{P}(\bar{A}_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_2 \mid \bar{A}_1)\mathbb{P}(\bar{A}_1) = \frac{1}{9} \times \frac{9}{10} = \frac{1}{10}\,.$$

   De même, on obtient la valeur de p_3 via la formule des probabilités composées :

$$p_3 = \mathbb{P}(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_3 \mid \bar{A}_2)\mathbb{P}(\bar{A}_2 \mid \bar{A}_1)\mathbb{P}(\bar{A}_1) = \frac{1}{8} \times \frac{8}{9} \times \frac{9}{10} = \frac{1}{10}\,.$$

   Et ainsi de suite. On trouve donc que $p_k = \frac{1}{10}$, pour tout $k = 1, \dots, 10$.

2. Après un apéro avec le Père Fouras, Passe-Partout n'est plus assez lucide pour retirer chaque clé testée. Il essaye donc chaque clé l'une après l'autre en remettant la clé testée dans le trousseau. Déterminer la probabilité q_k qu'il faille k essais pour ouvrir la salle du trésor.

   Ici, k peut prendre toutes les valeurs possibles dans $\mathbb{N}^*$. La probabilité q_1 est identique à p_1 et vaut $1/10$. Avec les notations précédentes, la probabilité q_2 est donnée par

$$q_2 = \mathbb{P}(\bar{A}_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_2 \mid \bar{A}_1)\mathbb{P}(\bar{A}_1) = \frac{1}{10} \times \frac{9}{10}\,.$$

   De même, la probabilité q_3 vaut

$$q_3 = \mathbb{P}(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_3 \mid \bar{A}_2)\mathbb{P}(\bar{A}_2 \mid \bar{A}_1)\mathbb{P}(\bar{A}_1) = \frac{1}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{1}{10}\Big(\frac{9}{10}\Big)^2\,.$$

   Plus généralement, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la valeur de q_k est donnée par

$$q_k = \mathbb{P}(\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_{k-1} \cap A_k)$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{P}(A_n \mid \bar{A}_{k-1})\mathbb{P}(\bar{A}_{k-1} \mid \bar{A}_{k-2}) \cdots \mathbb{P}(\bar{A}_2 \mid \bar{A}_1)\mathbb{P}(\bar{A}_1) \\
&= \frac{1}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times \cdots \times \frac{9}{10} \\
&= \frac{1}{10}\Big(\frac{9}{10}\Big)^{k-1} .
\end{aligned}$$

3. Passe-Partout s'en va récupérer les Boyards de la salle aux trésors tous les soirs. De son côté, le Père Fouras organise un apéro tous les quatre jours. Un soir, Passe-Partout a déjà essayé 7 clés mais n'a toujours pas ouvert la salle du trésor. Quelle est la probabilité qu'il ait partagé quelques verres avec le Père Fouras ?

   Notons Apéro l'évènement "*le Père Fouras organise un apéro*" et P_7 l'évènement

   $$P_7 = \bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_7 ,$$

   qui est réalisé si et seulement si la salle du trésor n'est pas ouverte après le septième essai. La probabilité recherchée est $\mathbb{P}(\text{Apéro} \mid P_7)$ qui se calcule via la formule de Bayes appliquée avec la partition $(\text{Apéro}, \overline{\text{Apéro}})$:

   $$\mathbb{P}(\text{Apéro} \mid P_7) = \frac{\mathbb{P}(P_7 \mid \text{Apéro})\mathbb{P}(\text{Apéro})}{\mathbb{P}(P_7 \mid \text{Apéro})\mathbb{P}(\text{Apéro}) + \mathbb{P}(P_7 \mid \overline{\text{Apéro}})\mathbb{P}(\overline{\text{Apéro}})}$$

   L'énoncé donne $\mathbb{P}(\text{Apéro}) = 1/4$ et donc $\mathbb{P}(\overline{\text{Apéro}}) = \frac{3}{4}$. Par ailleurs, à l'aide des questions précédentes, on obtient

   $$\mathbb{P}(P_7 \mid \overline{\text{Apéro}}) = p_8 + p_9 + p_{10} = \frac{3}{10} ,$$

   et

   $$\mathbb{P}(P_7 \mid \text{Apéro}) = \sum_{k=8}^{+\infty} q_k = \sum_{k=8}^{+\infty} \frac{1}{10}\Big(\frac{9}{10}\Big)^{k-1} = \frac{1}{10}\Big(\frac{9}{10}\Big)^{7} \sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\frac{9}{10}\Big)^{k} = \Big(\frac{9}{10}\Big)^{7} ,$$

   où l'on a reconnu une série géométrique de raison $\frac{9}{10}$. On trouve alors

   $$\mathbb{P}(\text{Apéro} \mid P_7) = \frac{\big(\frac{9}{10}\big)^7 \times \frac{1}{4}}{\big(\frac{9}{10}\big)^7 \times \frac{1}{4} + \frac{3}{10} \times \frac{3}{4}} \approx 0.35 ,$$

Exercice 3. On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'évènements sur Ω. On rappelle que la limite supérieure des A_n, notée $\limsup_n A_n$, correspond à l'ensemble des élements de Ω qui appartiennent à une infinité de A_n.

1. Justifier que $\limsup_n A_n$ est bien dans la tribu $\mathcal{A}$.

   Dire qu'un élément $\omega \in \Omega$ appartient à $\limsup_n A_n$ signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $k \geq n$ tel que $\omega \in A_k$. Ainsi,

   $$\limsup_n A_n = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k .$$

   Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, l'union $\cup_{k=n}^{+\infty} A_k$ appartient à la tribu $\mathcal{F}$ qui est stable par union dénombrable. Par suite, comme $\mathcal{F}$ est également stable par intersection dénombrable, l'intersection $\cap_{n=0}^{+\infty} \cup_{k=n}^{+\infty} A_k$ est bien dans $\mathcal{F}$.

2. On considère la suite d'ensembles $B_n = \cup_{k=n}^{+\infty} A_k$. Montrer qu'elle est décroissante pour l'inclusion.

   Pour $n \in \mathbb{N}$, l'union $\cup_{k=n+1}^{+\infty} A_k$ est clairement incluse dans l'union $\cup_{k=n}^{+\infty} A_k$, ce qui prouve la décroissance de la suite (B_n).

3. On suppose que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n) = 0$. En déduire que $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$.

   Par sous-additivité de la probabilité, on a

   $$0 \leq \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\Big) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)\,.$$

   Or, par hypothèse, ce dernier terme est le reste d'une série convergence, donc converge vers 0 quand $n \to \infty$. Par encadrement, on obtient bien

   $$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n) = 0\,.$$

   Puis, par décroissance monotone, on en déduit que

   $$\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = \mathbb{P}(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n) = 0\,.$$

   Ainsi, sous une hypothèse de sommabilité des A_n, la probabilité qu'une infinité de A_n se réalise est nulle. Ce résultat est connu sous le nom de lemme de Borel-Cantelli. Il est possible de montrer une réciproque partielle sous une hypothèse d'indépendance des A_n.

Soit maintenant $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variable aléatoire indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$: $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit l'événement $A_n = \{X_n = X_{n+1} = \cdots = X_{2n-1} = 1\}$. Montrer qu'avec probabilité 1, seul un nombre fini de A_n sont réalisés.

   On calcule
   $$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(X_n = 1, \cdots, X_{2n-1} = 1) = p^n$$
   Alors, $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n\geq 1} p^n = \frac{1}{1-p} < \infty$. La question précédente (c'est le lemme de Borel-Cantelli) implique alors que $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$. Ce qui signifie qu'avec probabilité 1 , il existe un k tel que A_n n'a lieu pour aucun $n \geq k$.