CC - 2nde chance

Durée 1h30. Les documents, la calculatrice, les téléphones portables, tablettes, ordinateurs ne sont pas autorisés. La qualité de la rédaction sera prise en compte. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. (3 points) Une urne contient b boules blanches et n boules noires. Une boule est tirée au hasard puis replacée dans l'urne avec x nouvelles boules de la couleur tirée (il y a alors $b+n+x$ boules dans l'urne). On tire alors une nouvelle boule dans l'urne.
Déterminer la probabilité que la seconde boule tirée soit blanche. On remarquera en particulier que le résultat ne dépend pas du nombre de boules x ajoutées après la première étape.

On note B_1 (resp. N_1) l'événement "la première boule tirée est blanche (resp. noire)". De même, on désigne par B_2 l'événement "la deuxième boule tirée est blanche". Les événements B_1 et N_1 forment une partition de l'univers (la première boule tirée est soit blanche soit noire). La formule des probabilités totales donne alors

$$\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_2 \mid B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2 \mid N_1)\mathbb{P}(N_1)$$

Or, $\mathbb{P}(B_1) = \frac{b}{b+n}$ et $\mathbb{P}(N_1) = \frac{n}{b+n}$. Par ailleurs, si la première boule tirée est blanche, il y a alors $b+x$ boules blanches dans l'urne (et toujours n noires), donc $\mathbb{P}(B_2 \mid B_1) = \frac{b+x}{b+n+x}$. De même, si la première boule tirée est noire, il y a alors $n+x$ boules noires dans l'urne (et toujours b blanches), donc $\mathbb{P}(B_2 \mid N_1) = \frac{b}{b+n+x}$. Ainsi, la probabilité que la deuxième boule soit blanche vaut

$$\mathbb{P}(B_2) = \frac{b+x}{b+n+x} \times \frac{b}{b+n} + \frac{b}{b+n+x} \times \frac{n}{b+n} = \frac{b}{b+n}.$$

Cette probabilité est indépendante du nombre de boules x ajoutées après le premier tirage.

Exercice 2. (4 points) On tire au hasard un entier strictement positif suivant la probabilité définie par $p_n = 1/2^n, n \geq 1$.

1. Montrer que cela définit bien une probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

   La probabilité est définie par ses probabilités élémentaires. Il suffit de vérifier qu'elles sont bien positives, ce qui est le cas, et qu'elles somment à 1, ce qui résulte de l'égalité

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

   où on a reconnu la somme d'une série géométrique de raison 1/2.

2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'événement "*l'entier tiré est un multiple de k*". Déterminer la probabilité de A_k.

   La probabilité de A_k correspond à la somme des p_j où j est un multiple de k. Ainsi,

   $$\mathbb{P}(A_k) = \sum_{l=1}^{+\infty} p_{lk} = \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{lk}} = \frac{1}{2^k}\sum_{l=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^k}\right)^l = \frac{1}{2^k}\frac{1}{1-\frac{1}{2^k}} = \frac{1}{2^k - 1}$$

3. On considère deux nombres premiers $p, q \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(A_p \cap A_q)$.

   L'intersection $A_p \cap A_q$ correspond à tous les entiers de $\mathbb{N}^*$ multiples de p et de q. Comme p et q sont premiers entre eux, cela correspond aux multiples de pq. Ainsi $A_p \cap A_q = A_{pq}$ et on en déduit que
$$\mathbb{P}(A_{pq}) = \frac{1}{2^{pq}-1}$$

Exercice 3. (6 points) Considérons une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_n > 0$. On suppose que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Soit $Z_n = X_n - \lfloor X_n \rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x.

1. Rappeler la formule de la densité d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ et calculer sa fonction de répartition.
2. Calculer la fonction de répartition de Z_n, que l'on notera F_{Z_n}.

   On a $\{\lfloor X_n \rfloor = k\} = \{X_n \in [k, k+1)\}$, et $Z_n \in [0,1]$. Donc $P(Z_n \leq t) = 0$ pour $t \leq 0$, et $P(Z_n \leq t) = 1$ pour $t > 1$. Soit $t \in [0,1]$, alors
$$\begin{aligned}
P(Z_n \leq t) &= \sum_{k\geq 0} P(Z_n \leq t, \lfloor X_n \rfloor = k) = \sum_{k\geq 0} P(Z_n \leq t, X_n \in [k, k+1)) \\
&= \sum_{k\geq 0} P(X_n \in [k, k+t]) = \sum_{k\geq 0} \lambda_n \int_k^{k+t} e^{-\lambda_n t} dt \\
&= \sum_{k\geq 0} \left(e^{-\lambda_n k} - e^{-\lambda_n (k+t)}\right) = \left(1 - e^{-\lambda_n t}\right) \sum_{k\geq 0} e^{-\lambda_n k} \\
&= \frac{1 - e^{-\lambda_n t}}{1 - e^{-\lambda_n}}
\end{aligned}$$

3. Montrer que pour tout $t, F_{Z_n}(t)$ converge vers un $F(t)$. La fonction F est-elle la fonction de répartition d'une variable aléatoire ? Si oui, identifier la loi de cette variable aléatoire.

   Par le résultat précédent, pour tout $t \in [0,1]$,
$$F_{Z_n}(t) = \frac{\lambda_n t + O(\lambda_n^2)}{\lambda_n + O(\lambda_n^2)}$$
   On obtient donc,
$$\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(t)\Big) = t.$$
   On trouve done $F(t) = t$ sur $[0,1]$. Par ailleurs, pour $t \leq 0$ on a $F(t) = 0$, et pour $t \geq 1, F(t) = 1$. On reconnait la fonction de répartition d'une variable uniforme dans $[0,1]$.

4. Qu'a-t-on démontré sur la convergence de la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

   On a montré que Z_n converge en loi vers une variable uniforme dans $[0,1]$.

Exercice 4. (7 points) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Poisson de paramètre 1. Soit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1. Calculer la fonction caractéristique d'une loi de Poisson de paramètre 1.

2. En déduire que la loi de S_n est une Poisson de paramètre n et calculer $\mathbb{E}(S_n)$.

   Une somme de variables aléatoires de Poisson indépendantes est une variable aléatoire de Poisson dont le paramètre (qui est aussi l'espérance et la variance) est la somme de ceux des variables aléatoires qu'on a ajoutées. Ainsi S_n suit une loi de Poisson de paramètre n. En particulier, si $k \in \mathbb{N}$, alors $e^{-n} \frac{n^k}{k!} = P(S_n = k)$. En sommant, on obtient

$$e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = P(S_n \leq n) = P(S_n/n \leq 1)$$

3. En utilisant le théorème central limite, calculer la limite de la suite $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq 1\right)$.

   La loi des grands nombres nous dit que $S_n/n \to E[X_1] = 1$ p.s. Ainsi S_n/n est proche de 1, mais ce résultat ne nous dit pas s'il est un peu plus grand ou un peu plus petit. Pour avoir des informations sur $S_n/n - 1$, (et en particulier son signe), on applique le théorème de la limite centrale :

$$\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{loi}} N_1,$$

   où N_1 est une variable aléatoire de loi gaussienne $N(0,1)$. D'après un corollaire du cours, on en déduit quelorsque $n \to \infty$,

$$P(S_n/n \leq 1) = P\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) \to P(N_1 \leq 0) = 1/2$$

4. En déduire la limite de $\left(e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}\right)_{n \geq 1}$ quand n tend vers l'infini.

   L'égalité $P(N_1 \leq 0) = 1/2$ découle du fait que N_1 est symétrique. Ainsi, on a montré que

$$e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \to 1/2$$