

## TD 3 - Méthode de Monte Carlo

**Exercice 1.** On veut approcher la valeur de  $\pi$  en utilisant une méthode de Monte-Carlo à partir de l'une des deux intégrales suivantes :

$$I_1 = 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \quad \text{et} \quad I_2 = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} dx dy$$

1. Montrer que  $I_1 = I_2 = \pi$ . Que représentent ces intégrales d'un point de vue géométrique ?

L'intégrale  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$  représente l'aire du quart de disque unité soit  $\pi/4$ . (La courbe représentative de la fonction définie sur  $[0, 1]$  par  $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$  est le quart de cercle de rayon 1 et de centre l'origine du repère orthonormé.) Ainsi  $I_1 = 4 \times \pi/4 = \pi$ .

De façon plus calculatoire, on fait le changement de variable  $x = \sin \theta$

$$\begin{aligned} I_1 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 \theta} \cos \theta d\theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^2 d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 2 d\theta \\ &= \left[ \frac{e^{2i\theta}}{2i} + \frac{e^{-2i\theta}}{2i} + 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{i}{2i} + \frac{-i}{2i} + \pi = \pi. \end{aligned}$$

Pour l'intégrale  $I_2$ , on fait le changement de variables coordonnées cartésiennes - coordonnées polaires :  $x = r \cos(\theta)$ ,  $y = r \sin(\theta)$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} dx dy \\ &= \iint_{[0,2\pi] \times [0,1]} r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta = \pi \end{aligned}$$

Quant à  $I_2$ , cette intégrale double représente l'aire du disque unité.

2. Exprimer  $I_1$  et  $I_2$  comme des espérances.

Exprimons  $I_1$  comme une espérance :

$$I_1 = 4\mathbb{E} \left( \sqrt{1-X^2} \right) \quad \text{où } X \sim U(0, 1)$$

et pour  $I_2$  remarquons qu'en prenant  $X \sim U(-1, 1)$  et  $Y \sim U(-1, 1)$  indépendantes, on a

$$\mathbb{P} \left( X^2 + Y^2 \leq 1 \right) = \mathbb{E} \left( \mathbb{1}_{\{X^2+Y^2 \leq 1\}} \right) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbb{1}_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} dx dy = \frac{1}{4} I_2$$

d'où :

$$I_2 = 4\mathbb{E} \left( \mathbb{1}_{\{X^2+Y^2 \leq 1\}} \right)$$

3. Écrire le pseudo code des algorithmes qui calculent les approximations  $I_{1,n}$  et  $\hat{I}_{2,n}$  de  $\pi$  par méthode de Monte-Carlo, appliquée à  $I_1$  et à  $I_2$ .

On approche  $I_1$  par  $\frac{4}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 - X_i^2}$  où  $X_1, \dots, X_n$  sont i.i.d de loi  $U(0, 1)$

---

**Algorithm 1** : Approximation de  $I_1$ .

---

**Entrée** : une taille d'échantillon  $n$

- (a) Générer  $X_1, X_2, \dots, X_n$  selon une loi uniforme sur  $[0, 1]$
- (b) Calculer  $Y_1 = \sqrt{1 - X_1}, \dots, Y_n = \sqrt{1 - X_n}$

**Sortie** : renvoyer la moyenne arithmétique des  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  et la multiplier par 4.

---

On approche  $I_2$  par  $\frac{4}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i^2 + Y_i^2 \leq 1\}}$  où  $X_1, \dots, X_n$  sont i.i.d de loi  $U(-1, 1)$  et  $Y_1, \dots, Y_n$  sont i.i.d de loi  $U(-1, 1)$

---

**Entrée** : une taille d'échantillon  $n$

- (a)  $S \leftarrow 0$
- (b) Générer  $X_1, X_2, \dots, X_n$  selon une loi uniforme sur  $[-1, 1]$
- (c) Générer  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  selon une loi uniforme sur  $[-1, 1]$
- (d) Pour  $i$  allant de 1 à  $n$  : SI  $X_i^2 + Y_i^2$  est inférieur ou égal à 1 ALORS  $S \leftarrow S + 1$  FIN SI FIN de boucle  $i$

**Sortie** : Retourner la valeur  $\frac{4S}{n}$ .

---

**Exercice 2.** Supposons que nous souhaitons estimer la probabilité qu'une variable aléatoire  $X \sim \text{Cauchy}(0, 1)$  soit plus grande que 2.

1. Calculer  $I = \mathbb{P}(X \geq 2)$ .

$$I = \mathbb{P}(X \geq 2) = \int_2^\infty \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = -\frac{\arctan 2}{\pi} + \frac{1}{2} \approx 0.148.$$

2. Trouver un estimateur basique par Monte-Carlo pour  $I$  et déterminer sa variance.

L'estimateur par Monte-Carlo classique s'écrit

$$I_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i > 2\}}, \quad X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Cauchy}(0, 1),$$

et sa variance est

$$\text{Var}(I_n) = \frac{\text{Var}(\mathbb{1}_{\{X > 2\}})}{n} = \frac{I(1-I)}{n} \approx \frac{0.126}{n}$$

3. Trouver un estimateur antithétique (simple) pour  $I$  et déterminer sa variance.

Puisqu'une  $\text{Cauchy}(0, 1)$  est symétrique autour de 0, un estimateur antithétique s'écrit alors

$$I_n^a = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left( \mathbb{1}_{\{X_i > 2\}} + \mathbb{1}_{\{-X_i > 2\}} \right) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{|X_i| > 2\}}, \quad X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Cauchy}(0, 1),$$

et sa variance est

$$\text{Var}(I_n^a) = \frac{\text{Var}(\mathbb{1}_{\{|X| > 2\}})}{4n} = \frac{2I(1-2I)}{4n} = \frac{I(1-2I)}{2n} \approx \frac{0.052}{n}.$$

4. Montrer que

$$\tilde{I}_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2}{\pi(1 + X_i^2)}, \quad X_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} U(0, 2),$$

est un estimateur sans biais de  $I$ , i.e.,  $\mathbb{E}[\tilde{I}_n] = I$  et calculer sa variance.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tilde{I}_n] &= \frac{1}{2} - \mathbb{E} \left[ \frac{2}{\pi(1 + X^2)} \right] = \frac{1}{2} - \int_0^2 \frac{1}{\pi(1 + u^2)} du \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\pi(1 + u^2)} du - \int_0^2 \frac{1}{\pi(1 + u^2)} du \\ &= I. \end{aligned}$$

Pour la variance maintenant

$$\begin{aligned} \text{Var}(\tilde{I}_n) &= \frac{4}{\pi^2 n} \text{Var}\{(1 + X^2)^{-1}\} \\ &= \frac{4}{\pi^2 n} \left[ \mathbb{E}\{(1 + X^2)^{-2}\} - \mathbb{E}\{(1 + X^2)^{-1}\}^2 \right]. \end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{(1 + X^2)^{-2}\} &= \frac{1}{2} \int_0^2 (1 + x^2)^{-2} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{1 + x^2 - x^2}{(1 + x^2)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{1}{(1 + x^2)} dx - \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{x^2}{(1 + x^2)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} [\arctan x]_0^2 - \frac{1}{2} \int_0^2 \underbrace{\frac{x}{(1 + x^2)^2}}_{v'} dx \\ &= \frac{1}{2} [\arctan x]_0^2 - \frac{1}{2} \left[ -\frac{x}{2(1 + x^2)} \right]_0^2 - \int_0^2 \frac{1}{2(1 + x^2)} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{x}{2(1 + x^2)} + \frac{1}{2} \arctan x \right]_0^2 \\ &= \frac{1}{10} + \frac{1}{4} \arctan 2. \end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned} \text{Var}(\tilde{I}_n) &= \frac{4}{\pi^2 n} \left\{ \frac{1}{10} + \frac{1}{4} \arctan 2 - \left( \frac{\arctan 2}{2} \right)^2 \right\} \\ &\approx \frac{0.0285}{n}. \end{aligned}$$

5. Faire de même pour l'estimateur

$$\hat{I}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{2\pi(1 + X_i^2)} \right\}, \quad X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} U(0, 1/2).$$

C'est à peu près la même chose. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{I}_n] &= 2 \int_0^{1/2} \frac{1}{2\pi(1 + x^2)} dx \stackrel{x \rightarrow x^{-1}}{=} \int_2^\infty \frac{1}{\pi x^2(1 + x^{-2})} dx \\ &= \int_2^\infty \frac{1}{\pi(1 + x^2)} dx \\ &= I. \end{aligned}$$

Puisque l'on a

$$\begin{aligned} \text{Var} \left\{ \frac{1}{2\pi(1+X^2)} \right\} &= \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{4\pi^2(1+X^2)^2} \right\} - \psi^2 \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \times 2 \left[ \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \arctan x \right]_0^{1/2} - I^2 \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{2}{5} + \arctan \frac{1}{2} \right) - I^2 \\ &\approx 9.55 \times 10^{-5}, \end{aligned}$$

et donc

$$\text{Var}(\hat{I}_n) \approx \frac{9.55 \times 10^{-5}}{n}.$$

Ce dernier estimateur est, à  $n$  fixé, environ 23 fois plus précis que notre premier estimateur.

**Exercice 3.** L'expérience originelle de Buffon pour approcher  $\pi$  consistait à jeter une aiguille de longueur  $\ell$  sur une grille de ligne parallèles, les lignes étant distantes de  $d$ , et compter le nombre de fois où l'aiguille croise une ligne.

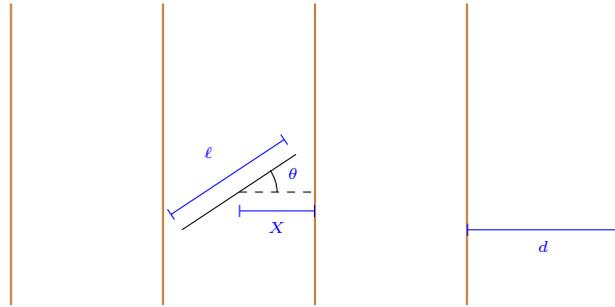


FIGURE 1 – L'aiguille de Buffon. Ici l'aiguille est de longueur  $\ell$  et les lignes parallèles espacées de  $d$ . Les variables aléatoires  $X$  et  $\theta$  représentent respectivement la distance du milieu de l'aiguille à la ligne la plus proche et l'angle formé avec l'axe horizontal.

1. Montrez que, pour  $\ell \leq d$ , la probabilité que l'aiguille soit à cheval sur une ligne est  $2\ell/(\pi d)$ . En déduire un estimateur pour  $I = 1/\pi$ .

D'après la Figure 1 et puisque l'aiguille est jetée complètement au hasard, cela définit deux v.a.  $X \sim U[0, d/2]$  et  $\theta \sim U[-\pi/2, \pi/2]$ . On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{aiguille à cheval}) &= \mathbb{P} \left( \frac{\ell}{2} \cos \theta \geq X \right) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\ell \cos(\theta)/2} \frac{2}{d} dx \frac{1}{\pi} d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\ell \cos \theta}{d\pi} d\theta = \frac{2\ell}{d\pi} \end{aligned}$$

D'après l'équation précédente on a donc que

$$\pi^{-1} = \frac{d\mathbb{P}(\text{aiguille à cheval})}{2\ell},$$

et un estimateur de  $I = 1/\pi$  est donc

$$I_n = \frac{d}{2\ell n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{\ell \cos \theta_i \geq 2X_i\}}, \quad (X_1, \theta_1), \dots, (X_n, \theta_n) \stackrel{\text{iid}}{\sim} U[0, d/2] \times U[-\pi/2, \pi/2].$$

2. Trouvez la variance de cet estimateur et déduisez en un choix optimal pour  $\ell$  et  $d$ .

La variance se trouve en calculant

$$\text{Var}(I_n) = \frac{d^2}{4\ell^2 n} \text{Var}(\mathbb{1}_{\{\ell \cos \theta_i \geq 2X_i\}}) = \frac{I}{n} \left( \frac{d}{2\ell} - I \right),$$

et le choix optimal pour  $\ell$  et  $d$ , i.e., celui minimisant la variance correspond au cas où  $\ell = d$ , puisque  $\ell$  ne peut pas être strictement plus grand que  $d$ .

3. Avec ce choix optimal, construisez un estimateur de  $\pi$ .

Lorsque  $\ell = d = 1$ , un estimateur de  $\pi$  est alors

$$\hat{\pi}_n = 2n \left( \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{\cos \theta_i \geq 2X_i\}} \right)^{-1}, \quad (X_1, \theta_1), \dots, (X_n, \theta_n) \stackrel{\text{iid}}{\sim} U[0, 1/2] \times U[-\pi/2, \pi/2].$$

**Exercice 4.** Soit  $Z \sim N(0, 1)$ . Nous cherchons à évaluer la probabilité  $I = \mathbb{P}(Z > 4.5)$ .

1. Donnez un estimateur basique pour  $I$ .

L'estimateur est

$$I_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{Z_i > 4.5\}}, \quad Z_1, \dots, Z_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, 1)$$

2. Soit  $Y = 4.5 + E$  où  $E \sim \text{Exp}(1)$ . Déterminez la densité de probabilité  $h$  de  $Y$  et trouvez comment simuler des réalisations de  $Y$ .

Soit  $y > 4.5$ , on a

$$\mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(E \leq y - 4.5) = 1 - \exp(-y + 4.5)$$

et la densité en dérivant par rapport à  $y$ , i.e.,

$$h(y) = \exp\{-(y - 4.5)\}, \quad y \geq 4.5$$

On simule facilement selon l'algorithme

- (a) Simuler  $E \sim \text{Exp}(1)$  (via la fonction de répartition inverse)
- (b) Retournez  $Y = 4.5 + E$ .

3. Trouvez un estimateur par échantillonnage préférentiel de  $I$  basés sur des tirages de  $Y$ .

D'après le cours, on a

$$\begin{aligned} I &= \mathbb{P}(Z > 4.5) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{z > 4.5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{z > 4.5} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \exp\{-(z - 4.5)\}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} \exp\{-(z - 4.5)\} dz \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{Y^2}{2} + Y - 4.5\right\}\right] \end{aligned}$$

puisque  $\mathbb{P}(Y > 4.5) = 1$ . L'estimateur est alors

$$I_n^e = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{Y_i^2}{2} + Y_i - 4.5\right\}.$$

**Exercice 5.** On veut utiliser la méthode de Monte Carlo pour calculer le prix  $C$  d'une option européenne d'achat (call) au temps 0 dans le modèle de Black et Scholes. Une option européenne est un actif financier caractérisé par un prix d'exercice  $K$ , une date échéance  $T$  et un actif risqué de valeur initiale  $x$  suivant le modèle de Black et Scholes. Son prix s'exprime par la formule

$$C = \mathbb{E} \left[ \left( x e^{\sigma\sqrt{T}X - \frac{\sigma^2 T}{2}} - K e^{-rT} \right)_+ \right],$$

où  $X$  est une variable aléatoire de loi normale centrée réduite et  $(\cdot)_+$  désigne la partie positive,  $r$  est le taux d'intérêt sans risque, et  $\sigma$  la volatilité du modèle de Black et Scholes.

1. Donner un estimateur basique de  $C$ .

L'estimateur Monte Carlo basique est

$$C_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( x e^{\sigma\sqrt{T}X_k - \frac{\sigma^2 T}{2}} - K e^{-rT} \right)_+,$$

avec  $X_k$  iid de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

2. Donner un estimateur de antithétique simple de  $C$ .

La loi normale centrée réduite est symétrique. On peut donc poser

$$C_n^a = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \left( x e^{\sigma\sqrt{T}X_k - \frac{\sigma^2 T}{2}} - K e^{-rT} \right)_+ + \left( x e^{-\sigma\sqrt{T}X_k - \frac{\sigma^2 T}{2}} - K e^{-rT} \right)_+,$$

avec  $X_k$  iid de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

Dans toute la suite, on suppose que  $x = K$  et  $r = \sigma^2/2$ .

3. Montrer que

$$C = \frac{x e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \mathbb{E} \left[ \frac{e^{\sigma\sqrt{2TU}} - 1}{\sqrt{2U}} \right],$$

où  $U$  est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1.

En utilisant  $x = K$  et  $r = \sigma^2/2$ , il vient

$$\begin{aligned} C &= \mathbb{E} \left[ \left( x e^{\sigma\sqrt{T}X - \frac{\sigma^2 T}{2}} - x e^{-\frac{\sigma^2 T}{2}} \right)_+ \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \left( e^{\sigma\sqrt{T}X} - 1 \right)_+ \right] \\ &= x e^{-\frac{\sigma^2 T}{2}} \mathbb{E}[(e^{\sigma\sqrt{T}X} - 1)\mathbf{1}_{\{X \geq 0\}}] \end{aligned}$$

car l'exponentielle dépasse 1 si et seulement si  $X$  est positif. En faisant le changement de variable  $u = y^2/2$  on obtient

$$\begin{aligned} C &= \frac{x e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} (e^{\sigma\sqrt{T}y} - 1) e^{-y^2/2} dy \\ &= \frac{x e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{\sigma\sqrt{T}\sqrt{2u}} - 1}{\sqrt{2u}} e^{-u} du \\ &= \frac{x e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \mathbb{E} \left[ \frac{e^{\sigma\sqrt{2TU}} - 1}{\sqrt{2U}} \right] \end{aligned}$$

où  $U$  est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1.

4. En déduire un nouvel estimateur d'échantillonnage préférentiel de  $C$ .

On a

$$C_n^c = \frac{xe^{-rT}}{n\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^n \frac{e^{\sigma\sqrt{2TU_k}} - 1}{\sqrt{2U_k}},$$

avec  $U_k$  iid de loi  $\mathcal{E}(1)$ .

5. Dans le modèle de Balck et Scholes, le prix  $P$  d'une option européenne de vente (put) au temps 0 avec prix d'exercice  $K$ , date échéance  $T$  et actif risqué de valeur initiale  $x$  est

$$P = \mathbb{E} \left[ \left( Ke^{-rT} - xe^{\sigma\sqrt{TX} - \frac{\sigma^2 T}{2}} \right)_+ \right].$$

Démontrer la relation de parité call-put :  $C = P + x(1 - e^{-rT})$ .

On a

$$\begin{aligned} C - P &= \mathbb{E} \left[ \left( xe^{\sigma\sqrt{TX} - \frac{\sigma^2 T}{2}} - Ke^{-rT} \right)_+ \right] - \mathbb{E} \left[ \left( Ke^{-rT} - xe^{\sigma\sqrt{TX} - \frac{\sigma^2 T}{2}} \right)_+ \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \left( xe^{\sigma\sqrt{TX} - \frac{\sigma^2 T}{2}} - Ke^{-rT} \right)_+ - \left( xe^{\sigma\sqrt{TX} - \frac{\sigma^2 T}{2}} - Ke^{-rT} \right)_- \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ xe^{\sigma\sqrt{TX} - \frac{\sigma^2 T}{2}} - Ke^{-rT} \right] \\ &= xe^{-rT} \mathbb{E} \left[ e^{\sigma\sqrt{TX}} - 1 \right] \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ e^{\sigma\sqrt{TX}} \right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma\sqrt{T}x} e^{x^2/2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-\sigma\sqrt{T})^2} dx \\ &= e^{\sigma^2 T/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-\sigma\sqrt{T})^2} dx \\ &= e^{\sigma^2 T/2} = e^{rT}. \end{aligned}$$

donc on a

$$\begin{aligned} C - P &= xe^{-rT} \mathbb{E} \left[ e^{\sigma\sqrt{TX}} - 1 \right] \\ &= xe^{-rT} (e^{rT} - 1) = x(1 - e^{-rT}). \end{aligned}$$

6. En déduire un estimateur par variable de contrôle de  $C$ .

A partir de la relation de parité call-put  $C = P + x(1 - e^{-rT})$ , on peut estimer  $C$  par

$$C_n^c = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( Ke^{-rT} - xe^{\sigma\sqrt{TX_k} - \frac{\sigma^2 T}{2}} \right)_+ + x(1 - e^{-rT}),$$

avec  $X_k$  iid de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .