Contrôle continu 1

Durée 1h30. Les documents, la calculatrice, les téléphones portables, tablettes, ordinateurs ne sont pas autorisés. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1. (Question de cours) Calculer la moyenne et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. (On demande la démonstration complète)

On a $\mathbb{P}(X = i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

- On a :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} i \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{(i-1)!} = e^{-\lambda}\, \lambda \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = \lambda.$$

- Calculons d'abord :

$$\mathbb{E}\big(X(X-1)\big) = \sum_{i=0}^{+\infty} i(i-1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{(i-2)!} = e^{-\lambda}\, \lambda^2 \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = \lambda^2,$$

ce qui nous permet d'obtenir :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \mathbb{E}\big(X(X-1)\big) + \mathbb{E}(X) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

On remarque que, pour une variable aléatoire de Poisson, le paramètre représente à la fois la moyenne et la variance.

Exercice 2. On jette 2 dés équilibrés.

1. Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux montre 6, sachant que les 2 résultats sont différents ?
   On a $\Omega = \{1, \cdots, 6\}^2$ munie de la probabilité uniforme. On note $\neq$ l'évènement "les deux résultats sont différents".

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{5} (i,6) \cup \bigcup_{i=1}^{5} (6,i) \middle| \neq \right) = \frac{5+5}{36-6} = \frac{1}{3}.$$

2. Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux montre 6, sachant que leur somme vaut i ? Calculer le résultat pour toutes les valeurs possibles de i.

   Soient X le résultat du premier tirage et Y le résultat du second tirage. On pose $A = \{X = 6\} \cup \{Y = 6\}$. Les résultats possibles de $S = X + Y$ sont $i = 2, 3, \cdots, 12$. On cherche la valeur de $\mathbb{P}(A|S = i)$ en fonction de i.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A|S = i) &= 0, \qquad \forall i = 2, \cdots, 6 \\
\mathbb{P}(A|S = 7) &= \mathbb{P}(\{(1,6)\} \cup \{(6,1)\} \,|S = 7) = \frac{1}{3}, \\
\mathbb{P}(A|S = 8) &= \frac{2}{5}, \\
\mathbb{P}(A|S = 9) &= \frac{1}{2}, \\
\mathbb{P}(A|S = 10) &= \frac{2}{3}, \\
\mathbb{P}(A|S = 11) &= \mathbb{P}(A|S = 12) = 1.
\end{aligned}$$

Exercice 3. Une machine à sous fonctionne de la manière suivante : on introduit une pièce de 1 euro et 3 roues se mettent à tourner : ces roues représentent les dix chiffres de 0 à 9 et chaque roue s'arrête en montrant un chiffre au hasard. Si les trois chiffres sont différents, le joueur perd sa mise ; s'il y a un "double", le joueur récupère sa mise plus deux euros ; s'il y a un "triple", le joueur récupère sa mise plus a euros.

1. Soit X la variable aléatoire associée au gain d'un joueur. Déterminer la loi de X.

   Le support de X est $\{-1, 2, a\}$. On a :

$$\mathbb{P}(X=2) = \frac{9 \times 10 \times 3}{10^3} = 0.27, \quad \begin{cases} \text{nbre de places possible pour l'élément singulier} \\ \text{nbre de possibilités pour l'élément singulier} \\ \text{nbre de possibilités pour l'élément doublé} \end{cases}$$
$$\mathbb{P}(X=a) = \frac{10}{10^3} = 0.01, \quad \begin{cases} \text{nbre de possibilités pour l'élément triplé.} \end{cases}$$
$$\mathbb{P}(X=2) = \frac{9 \times 10 \times 8}{10^3} = 0.72, \quad \begin{cases} \text{nbre d'injections de } \{1,2,3\} \text{ dans } \{1, \cdots, 10\}. \end{cases}$$

2. On dit que le jeu est favorable au propriétaire de la machine si l'espérance de gain du joueur est négative. Jusqu'à quelle valeur de a le jeu est-il favorable au propriétaire de la machine ?

   $\mathbb{E}(X) = 0.01(18+a)$. Le jeu est donc favorable au propriétaire de la machine pour $a < 18$.

Exercice 4. 0n réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce équilibrée, chaque lancer amenant donc “Pile” ou “Face” avec la probabilité 1/2.

On note P_k (resp. F_k) l'événement : “on obtient Pile (resp. Face) au k-ième lancer”. Pour ne pas surcharger l'écriture on écrira, par exemple, P_1F_2 à la place de $P_1 \cap F_2$. On note X la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient, pour la première fois, “Pile” puis “Face” dans cet ordre aux lancers $k-1$ et k (k désignant un entier supérieur ou égal à 2), X prenant la valeur 0 si l'on n'obtient jamais une telle succession.

L'objet de l'exercice est de calculer l'espérances de X (i.e. la durée moyenne d'une partie)

1. Calculer $\mathbb{P}(X=2)$.

   On a $\mathbb{P}(\{X=2\}) = \mathbb{P}(P_1F_2) = 1/4$ par indépendance.

2. Soit k un entier supérieur ou égal à 3.
   (a) Remarquer que que si le premier lancer est un “Pile”, alors il faut et il suffit que $P_2P_3 \dots P_{k-1}F_k$ se réalise pour que $\{X=k\}$ se réalise. En déduire que : $\forall k \geq 3$, on a $\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X=k-1) + \frac{1}{2^k}$

   Les évènements P_1 et P_1^c forment un système complet. On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{X=k\}) &= \mathbb{P}(\{X=k\} \cap P_1) + \mathbb{P}(\{X=k\} \cap P_1^c) \\ &= \mathbb{P}(P_2P_3 \cdots P_{k-1}F_k \cap P_1) + \mathbb{P}(\{X=k\} \,|F_1)\mathbb{P}(F_1) \\ &= \mathbb{P}(P_2P_3 \cdots P_{k-1}F_k)\mathbb{P}(P_1) + \mathbb{P}(\{X=k-1\}) \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X=k-1) \end{aligned}$$

(b) On pose, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $u_k = 2^k \mathbb{P}(X = k)$. Déterminer u_k,

On a $u_k = 2^k \mathbb{P}(\{X = k\}) = 2^{k-1}\mathbb{P}(\{X = k-1\}) + 1 = u_{k-1} + 1$. On reconnaît une suite arithmétique de raison 1. Ainsi $u_k = k - 1$ pour tout $k \geq 2$.

(c) Donner alors la loi de X.

En compilant les résultats de la question 1) et 2 b) on a $\mathbb{P}(X = k) = \frac{u_k}{2^k} = \frac{k-1}{2^k}$ pour $k \geq 2$.

3. Montrer que X a une espérance, notée $\mathbb{E}(X)$, et la calculer.

La variable aléatoire X admet bien une espérance car la série de terme générale $\frac{k(k-1)}{2^k}$ est convergente. On a ;

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)(1/2)^k = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2}{\restriction_{x=1/2}} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2}x^k{\restriction_{x=1/2}} \\
&= \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(1-x)^{-1}{\restriction_{x=1/2}} \\
&= \frac{2}{4}(1-x)^{-3}{\restriction_{x=1/2}} \\
&= \frac{2 \times 8}{4} = 4
\end{aligned}
$$

En moyenne, une partie dure 4 lancers.