Contrôle continu 1

Durée 1h10. Les documents, la calculatrice, les téléphones portables, tablettes, ordinateurs ne sont pas autorisés. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

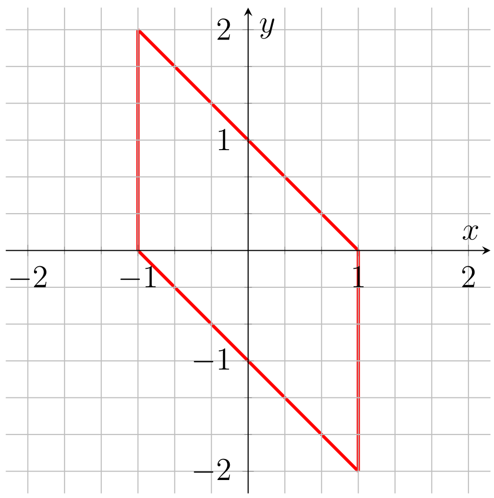
Exercice 1. Soit $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie pour $u = (x, y)$ par $N(u) = \sup_{0\leq t\leq 1} |x + ty|$

1. Montrer que N est une norme.

   Dans cette question $u = (x, y)$ et $v = (x_0, y_0)$ sont deux éléments quelconques de $\mathbb{R}^2$.
   - La borne supérieure $N(u)$ existe car elle représente le maximum (atteint au moins pour une valeur t_0) de l'application $t \mapsto |x + ty|$, définie et continue sur $[0, 1]$.
   - On a évidemment l'inégalité $N(x, y) \geq 0$. D'autre part $N(x, y) = 0 \Rightarrow \forall t \in [0, 1], x + ty = 0 \Rightarrow x = y = 0$ (choisir $t = 0$ et $t = 1$.)
   - Pour tout réel λ :
   $$N(\lambda u) = \sup_{0\leq t\leq 1} |(\lambda x) + t(\lambda y)| = \sup_{0\leq t\leq 1} |\lambda||x + ty| = |\lambda| \sup_{0\leq t\leq 1} |x + ty| = |\lambda|N(u)$$
   - Pour tout réel t de $[0, 1]$, $|(x + x_0) + t(y + y_0)| \leq |x + ty| + |x_0 + ty_0| \leq N(u) + N(v)$. On peut alors passer à la borne supérieure dans $|(x + x_0) + t(y + y_0)|$ et écrire : $N(u + v) \leq N(u) + N(v)$

   L'application $u \mapsto N(u)$ est donc une norme sur $\mathbb{R}^2$.

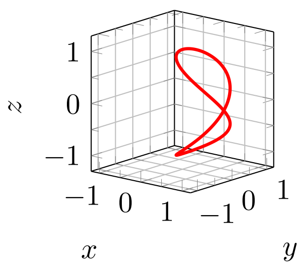
2. Représenter la boule unité fermée de centre 0. Justifier.



Soit $u = (x, y)$ un élément quelconque de $\mathbb{R}^2$, et soit ϕ définie sur $[0, 1]$ par $\phi(t) = |x + ty|$. L'application positive ϕ^2 est convexe sur $[0, 1]$ (sa dérivée seconde est positive ou nulle). L'application ϕ^2 atteint donc son maximum en $t = 0$ ou en $t = 1$. Il en est de même de ϕ. On a donc :

$$N(u) \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \phi(0) \leq 1 \\ \phi(1) \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq 1 \\ |x + y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -x - 1 \leq y \leq -x + 1 \end{cases}$$

Exercice 2. (Courbe de Viviani) Dans cet exercice, on se propose d'étudier la courbe :



Dont une paramamétrisation est pour tout $t \in]-\pi, \pi[$

$$\phi : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) & = & \cos^2 t \\ y(t) & = & \sin t \cos t \\ z(t) & = & \sin t \end{pmatrix}$$

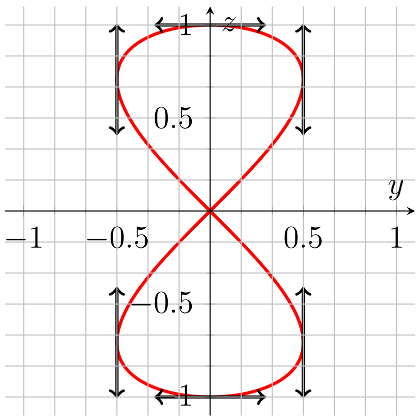
1. On considère la projection sur le plan yz. Soit donc la courbe paramétrée $\phi_{yz} : t \mapsto \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer les points de ϕ_{yz} admettant, dans le plan yz, une tangente horizontale ou une tangente verticale

   Avant de commencer, on remarque que y et z sont impaires et la courbe admet donc une symétrie centrale par rapport à l'origine O et deux symétries axiales par rapport à chacun des axes Oy et Oz.
   On a $\phi'_{yz}(t) = \begin{pmatrix} y'(t) = \cos^2 t - \sin^2(t) \\ z'(t) = \cos t \end{pmatrix}$. Les tangentes verticales sont en les points pour lesquels $y'(t) = 0$ et $z'(t) \neq 0$ (*i.e.* pour $t = \pm\pi/4, \pm 3\pi/4$) et les tangentes horizontales sont en les points pour lesquels $z'(t) = 0$ et $y'(t) \neq 0$ (*i.e.* pour $t = \pm\pi/2$).

   (b) Compléter le tableau de variations suivant pour ϕ_{yz} :

t	$-\pi$		$-3\pi/4$		$-\pi/2$		$-\pi/4$		0		$\pi/4$		$\pi/2$		$3\pi/4$		π
signe de $y'(t)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
variation de $y(t)$	0	$\nearrow$	$1/2$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-1/2$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1/2$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-1/2$	$\nearrow$	0
signe de $z'(t)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
variation de $z(t)$	0	$\searrow$	$-\sqrt{2}/2$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-\sqrt{2}/2$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}/2$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\sqrt{2}/2$	$\searrow$	0

   (c) Tracer la courbe ϕ_{yz} ainsi que ses tangentes :



2. On se place maintenant dans le plan xy. Calculer $\left\| \begin{pmatrix} x(t) - 1/2 \\ y(t) \end{pmatrix} \right\|$. Quelle interprétation géométrique peut-on faire ?

   On a

$$\begin{aligned} (x(t) - 1/2)^2 + y^2(t) &= \cos^4(t) - \cos^2(t) + 1/4 + \sin^2(t)\cos^2(t) \\ &= -\cos^2(t)\sin^2(t) + 1/4 + \cos^2(t)\sin^2(t) = 1/4 \end{aligned}$$

   La courbe ϕ_{xy} appartient donc au cercle de centre $(x, y) = (1/2, 0)$ et de rayon $1/2$.

3. On se place dans le plan xz. On considère alors $\phi_{xz}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

   (a) Trouver les points critiques de ϕ_{xz}.

   On a $x'(t) = 2\sin t \cos t$ qui s'annule en $t = \pm\pi/2, 0$. Comme $z'(t)$ s'annule aussi en $\pm\pi/2$, il y a 2 points critiques.

   (b) Compléter le tableau de variation suivant pour ϕ_{xz} :

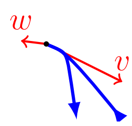
t	$-\pi$		$-\pi/2$		0		$\pi/2$		π
signe de $x'(t)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
variation de $x(t)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1
signe de $z'(t)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
variation de $z(t)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

   (c) Étudier la nature des points critiques de ϕ_{xz}. On admettra que $\phi_{xz}(\pi/2 + t) = \begin{pmatrix} (1-\cos(2t))/2 \\ \cos(t) \end{pmatrix}$.

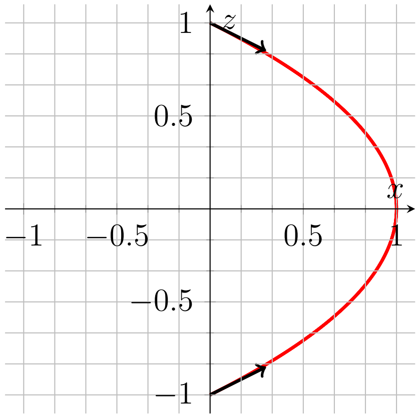
   On remarque que la courbe admet une symétrie axiale par rapport à l'axe Ox. On peut donc se contenter d'étudier le point critique correspondant à $t = \pi/2$. On écrit le développement de Taylor

$$\begin{aligned}\phi_{xz}(\pi/2 + h) &= \begin{pmatrix} ((2h)^2/2 - (2h)^4/4! + o(h^4))/2 \\ 1 - h^2/2 + h^4/4! + o(h^4) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} h^2 + \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/24 \end{pmatrix} h^4 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} o(h^4)\end{aligned}$$

   Avec les notations du cours on a $p = 2$, $q = 4$, la tangente est alors la droite portée par $v = (1, -1/2)$ et on a $w = (-1/3, 1/24)$. C'est donc un point de rebroussement de deuxième espèce :



   (d) Tracer la courbe de ϕ_{xz} ainsi que les tangentes en les points critiques.



4. Retour dans $\mathbb{R}^3$.
   (a) Calculer $\|\phi(t)\|$. Quelle interprétation géométrique peut on faire ?

   On a

$$\begin{aligned} x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) &= \cos^4 t + \sin^2 t \cos^2 t + \sin^2 t \\ &= \cos^2 t(1 - \sin^2 t) + \sin^2 t \cos^2 t + \sin^2 t \\ &= 1 \end{aligned}$$

   Les points $\phi(t)$ sont donc portés par la sphère unitée centrée en l'origine.

   (b) Les questions 2 et 4a nous apprennent que la courbe ϕ est à l'intersection de 2 objets géométriques simples. Lesquels ? justifier.

   La courbe ϕ est à l'intersection de la sphère unité centrée en l'origine et du cylindre de rayon 1/2 et de droite de révolution vertical passant par le point $(1/2, 0, 0)$.