Université Montpellier 2 Année 2014-2015
HLMA 410

Contrôle continu 2

Exercice 1. (Question de cours) Soit E et F deux espaces vectoriels normés et $a \in E$.

1. Donner la définition de la dérivée directionnelle d'une fonction $f : E \to F$. Une fonction qui admet des dérivées partielles en a est-elle nécessairement continue en a (justifier) ?

   (a) Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de E et soit $a \in \mathcal{U}$ et $v \in E$ avec $v \neq 0$. On dit que f admet une dérivée en a suivant la direction v si l'application $t \mapsto f(a + tv)$ est dérivable en 0. Dans ce cas on note :

   $$D_v f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}.$$

   (b) Non, prendre $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ qui admet des dérivées partielles en $a = (0,0)$ mais n'est pas continue en $(0,0)$.

2. Donner la définition d'un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de E sur F. En donner une caractérisation (autrement dit, énoncer le "théorème d'inversion globale").

   (a) Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de E et $\mathcal{V}$ un ouvert de F. On dit que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathcal{U}$ vers $\mathcal{V}$ si f est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{V}$ dont la réciproque f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{V}$.
   (b) Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de E et $f : \mathcal{U} \to F$ une application injective de classe $\mathcal{C}^1$. Alors f définit un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme du $\mathcal{U}$ sur $f(\mathcal{U})$ si et seulement si $d_a f$ est un isomorphisme pour tout $a \in \mathcal{U}$.

Exercice 2. Forme quadratique Les formes quadratiques suivantes sont elles positives ? sont elles définies ? :

1. $q(x,y,z,t) = 2xz + 2xy + x^2 + 2tx$

   $$\begin{aligned} q(x,y,z,t) &= (x^2 + 2x(z+y+t) + (z+y+t)^2) - (z+y+t)^2 \\ &= (x+y+z+t)^2 - (z+y+t)^2 \end{aligned}$$

   N'est pas définie car $q(0,1,0,-1) = 0$ et n'est pas positive car $q(3,-1,-1,-1) < 0 < q(1,0,0,0)$.

2. $q(x,y,z) = -2(x+y)^2 + (x+y+z)^2 + (x+y-z)^2$

   Attention, la décomposition n'est pas en somme de carrée de formes linéaires indépendantes. Il faut développer :

   $$q(x,y,z) = 2z^2$$

   C'est donc clairement un forme quadratique positive. Mais elle n'est pas définie car $q(1,0,0) = 0$.

3. $q(x,y) = e^{\sqrt{\pi}} x^2 + \ln(1+e) y^2 - xy$

   On peut utiliser la méthode des mineurs pour éviter des calculs fastidieux. La matrice associée à q est

   $$\begin{pmatrix} e^{\sqrt{\pi}} & -1/2 \\ -1/2 & \ln(1+e) \end{pmatrix}$$

   Avec les notations du cours : on a $\Delta_1 = e^{\sqrt{\pi}} x^2 > 0$ et $\Delta_2 = e^{\sqrt{\pi}} \ln(1+e) - 1/4 > 0$ (car $\sqrt{\pi} > 0$ implique $e^{\sqrt{\pi}} > 1$ et $1 + e > e$ implique $\ln(1+e) > 1$) et q est définie positive.

Exercice 3. (Étude de fonctions de plusieurs variables) Soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie comme suit :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^m y^2}{x^2+y^2} \text{ si } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Étude de la fonction sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

(a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pour tout $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

(b) Calculer le gradient de f pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pour tout $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$;

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^{m-1}y^2\left(mx^2+my^2-2x^2\right)}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^{m+2}y}{(x^2+y^2)^2}$$

(c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pour tout $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$;

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car quotients de fonctions continues dont les dénominateurs ne s'annulent pas. Alors f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$.

(d) Que peut-on conclure sur la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?

Comme f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ alors f est différentiable sur sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

2. Étude de la fonction en $(0,0)$:

(a) Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ la fonction f est-elle continue en $(0,0)$?

Pour que f soit continue en $(0,0)$ il faut que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. En passant en coordonnées polaires on a

$$|f(x,y)| \leq r^m$$

Le membre de droite de l'inégalité $r^m \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$. Donc (théorème des gendarmes) f est continue en $(0,0)$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

(b) La fonction f admet-elle des dérivées partielles en $(0,0)$ pour tout $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$? si oui, les calculer.

Le gradient de f en $(0,0)$ est le vecteur de composantes

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0$$

(c) Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ la fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?

f est différentiable en $(0,\ 0)$ si et seulement si $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$. On note $r(h,k) = \frac{f(h,k)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{h^m k^2}{(h^2+k^2)^{3/2}}$.

i. Si $m=1$: $r(k,k) = 1/2^{3/2} \neq 0$ et f n'est pas différentiable en $(0,0)$.
ii. Si $m>1$: $|r(h,k)| \leq r^{m-1} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$ et f est bien différentiable en $(0,0)$.

(d) Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ la fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ en $(0,0)$?

i. si $m=1$, f n'est pas différentiable en $(0,0)$ donc elle n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.
ii. si $m>1$, on vérifie que les dérivées partielles sont continues en $(0,0)$. En passant en coordonnées polaires on a :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq mr^{m-1} \text{ et } \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq 2r^{m-1}$$

On en déduit (théorème des gendarmes) que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ et $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$. La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.