Contrôle continu 2

Durée 1h30. Les documents, la calculatrice, les téléphones portables, tablettes, ordinateurs ne sont pas autorisés. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1. (Question de cours) Soit E un espace vectoriel et $\|\cdot\|, \|\cdot\|' : E \to [0, +\infty[$ deux normes équivalentes sur E. Montrer que toute suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de E qui converge pour la norme $\|\cdot\|$ converge aussi pour la norme $\|\cdot\|'$.

On utilise les hypothèses :

1. Les deux normes sont équivalentes, ainsi il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha\|\cdot\| \le \|\cdot\|' \le \beta\|\cdot\|$.
2. La suite $u_k \to \ell \in E$ quand $k \to +\infty$ pour la nome $\|\cdot\|$, ainsi

$$0 \le \|u_k - \ell\| \to 0, \quad \text{quand } k \to +\infty$$

En utilisant 1) et 2) on a

$$0 \le \|u_k - \ell\|' \le \beta\|u_k - \ell\|$$

Par le théorème des gendarmes, la suite réelle $(\|u_k - \ell\|')_k$ converge et sa limite est $\lim_k \beta\|u_k - \ell\| = 0$. Autrement dit, $(u_k)_k$ converge vers $\ell \in E$ pour $\|\cdot\|'$.

Exercice 2. (Projection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$) Dans cet exercice, il est fortement recommandé de dessiner, et de se souvenir qu'un dessin n'est jamais une preuve. Si X est un espace vectoriel normé, «$B(x, r[$» désigne la boule ouverte de centre $x \in X$ et de rayon $r > 0$. On rappelle que pour une application $p : X \to Y$, et pour $A \subset X$, l'image de A par p est l'ensemble $p(A) = \{y \in Y, \exists x \in A, y = p(x)\} = \{p(x), x \in A\}$.

Soit $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la première projection ($p(x, y) = x$). On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne et $\mathbb{R}$ de la valeur absolue.

1. Montrer que dans $\mathbb{R}$, $B(a, \epsilon[=]a - \epsilon, a + \epsilon[$.

   On a $B(a, \epsilon[= \{x \in \mathbb{R}, d_{\mathbb{R}}(a, x) < \epsilon\} = \{x \in \mathbb{R}, |x - a| < \epsilon\} = \{x \in \mathbb{R}, -\epsilon < x - a < \epsilon\} = \{x \in \mathbb{R}, a - \epsilon < x < a + \epsilon\} =]a - \epsilon, a + \epsilon[$.

2. Montrer que $p(B((x, y), \epsilon[) = B(x, \epsilon[$. En déduire que l'image d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ par p est un ouvert de $\mathbb{R}$.

   On remarque que pour $(x, y), (a, b) \in \mathbb{R}$, $|x - a| \le \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = d_{\mathbb{R}^2}((x, y), (a, b))$.
   Pour $a = p(a, b) \in p(B((x, y), \epsilon[)$, on a donc $d_{\mathbb{R}}(x, a) \le d_{\mathbb{R}^2}((x, y), (a, b)) < \epsilon$ et donc $a \in B(x, \epsilon[$.
   D'autre part, pour $a \in B(x, \epsilon[$, on a $d_{\mathbb{R}^2}((x, y), (a, y)) = \sqrt{(x - a)^2} = |x - a| < \epsilon$ donc $(a, y) \in B((x, y), \epsilon[$ et $p(a, y) = a$ donc $a \in p(B((x, y), \epsilon[)$.
   Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $x \in p(U)$, il existe $(x, y) \in U$ tel que $p(x, y) = x$. Comme U est ouvert, il existe $\epsilon > 0$ tel que $B((x, y), \epsilon[\subset U$. On a alors $p(B((x, y), \epsilon[) = B(x, \epsilon[\subset p(U)$.

3. Montrer que $F = \{(x, y), xy = 1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ mais que $p(F)$ n'est pas fermé.

   Soit $X_n = (x_n, y_n)$ une suite de F qui converge vers $X = (x, y)$, alors la suite $x_n y_n$ est constante égale à 1, et tend vers xy, donc $xy = 1$ et $X \in F$. L'ensemble F est donc fermé.
   D'autre part, $0 \notin p(F)$, car pour tout $y \in \mathbb{R}$, $(0, y) \notin F$. La suite $x_n = 1/n = p(1/n, n) \in p(F)$ mais $\lim x_n = 0 \notin p(F)$, donc $p(F)$ n'est pas fermé.

Exercice 3. (La deltoïde) Soit la courbe paramétrée Γ définie par $\begin{cases} x(t) = 2\cos t + \cos 2t \\ y(t) = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$ pour $t \in [-\pi, \pi]$

1. Étudier la parité des fonctions $x(\cdot)$ et $y(\cdot)$. Quelle(s) symétrie(s) cela implique-t-il sur le support de la courbe Γ ?

   On a $x(-t) = 2\cos(-t) + \cos(-2t) = 2\cos(t) + \cos(2t) = x(t)$ et la fonction x est paire. De même, $y(-t) = 2\sin(-t) - \sin(-2t) = -2\sin t + \sin 2t = -y(t)$ et la fonction y est impaire. Cela donne une symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses.

2. Calculer Γ', Γ'' et Γ'''. On a

$$\Gamma'(t) = \begin{cases} x'(t) = -2\sin t - 2\sin 2t \\ y'(t) = 2\cos t - 2\cos 2t \end{cases}$$
$$\Gamma''(t) = \begin{cases} x''(t) = -2\cos t - 4\cos 2t \\ y''(t) = -2\sin t + 4\sin 2t \end{cases}$$
$$\Gamma'''(t) = \begin{cases} x'''(t) = 2\sin t + 8\sin 2t \\ y'''(t) = -2\cos t + 8\cos 2t \end{cases}$$

3. Soit $t \in [-\pi, \pi[$. Montrer que $\cos(t) - \cos(2t) = 0$ a trois solutions $t = 0$ et $t = 2\pi/3$ et $t = -2\pi/3$.

   Une solution consiste à se souvenir que $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$. Ansi,

$$\cos t - \cos 2t = 0$$
$$\Leftrightarrow \cos t - 2\cos^2 t + 1 = 0$$

   On cherchant les racines du polynôme de degré deux, $X \mapsto -2X^2 + X + 1$, on arrive à $\cos t = -1/2$ ou $\cos t = 1$. Ce qui donne le résultat escompté (faire un dessin avec un cercle trigonométrique !).

4. Calculer la position des points stationnaires. Donner leur nature ainsi que le comportement local de la courbe en leur voisinage (faire un petit dessin à chaque fois).

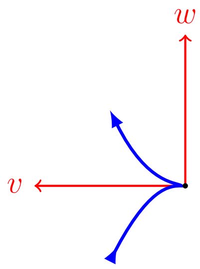
   La question précédentes donne les temps en lesquels x' s'annule. Reste à vérifier si y' s'annule aussi en ces temps. C'est bien le cas, on a

$$y'(0) = y'(2\pi/3) = y'(-2\pi/3) = 0$$

   Il y a donc 3 points stationnaires en $t = -2\pi/3, 0, 2\pi/3$.
   Étude des points stationnaires :
   (a) $t = 0$ on a $\Gamma(0) = \binom{3}{0}$, $\Gamma''(0) = \binom{-6}{0}$ et $\binom{0}{6}$. Cela donne le DL suivant,

$$\Gamma(0 + h) = \begin{pmatrix} 3-3h^2+o(|h|^3) \\ h^3+o(|h|^3) \end{pmatrix}$$

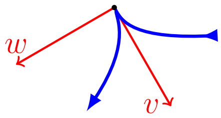
   Avec les notations du cours on a $p = 2$ et $q = 3$. Ainsi, c'est un point de rebroussement de première espèce.



(b) $t = 2\pi/3$ on a $\Gamma(2\pi/3) = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 3\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$, $\Gamma''(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -3\sqrt{3} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -3\sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix}$. Cela donne le DL suivant,

$$\Gamma(0+h) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3+3h^2-\sqrt{3}h^3 o(|h|^3) \\ 3\sqrt{3}-3\sqrt{3}h^2-h^3+o(|h|^3) \end{pmatrix}$$

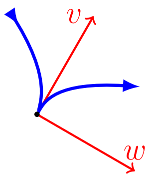
Avec les notations du cours on a $p = 2$ et $q = 3$. Ainsi, c'est un point de rebroussement de première espèce.



(c) $t = -2\pi/3$. C'est l'image par la symétrie axiale du point traité en (b). On a donc : $\Gamma(-2\pi/3) = \begin{pmatrix} -3/2 \\ -3\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$, $\Gamma''(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -3\sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}$. Cela donne le DL suivant,

$$\Gamma(0+h) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3+3h^2-\sqrt{3}h^3 o(|h|^3) \\ -3\sqrt{3}+3\sqrt{3}h^2+h^3+o(|h|^3) \end{pmatrix}$$

Avec les notations du cours on a $p = 2$ et $q = 3$. Ainsi, c'est un point de rebroussement de première espèce.



5. Calculer les tangentes aux points stationnaires et montrer qu'elles s'intersectent toutes en un même et unique point.

   Comme la tangente au point $\Gamma(0)$ est l'axe des abscisses, il suffit de calculer où les 2 autres tangentes coupent cet axe. Par exemple, la tangente au point $\Gamma(2\pi/3)$ est

$$t \mapsto 3/2\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + 3t\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

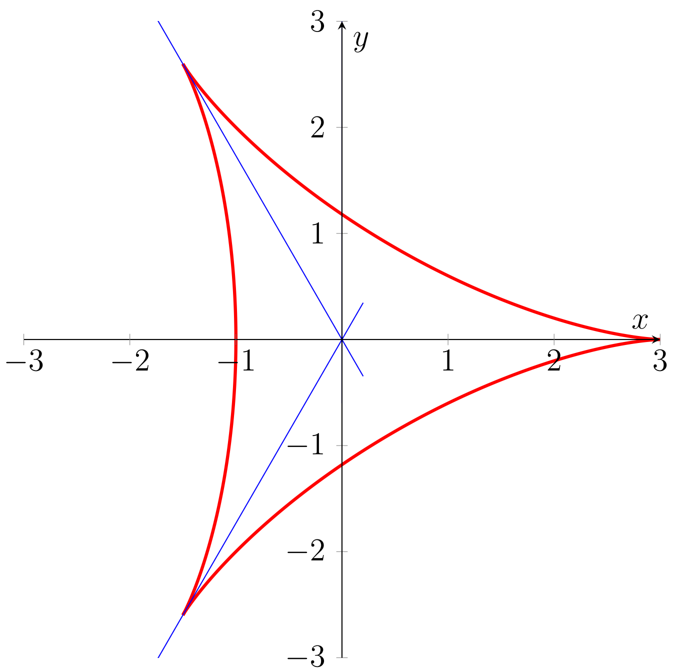
   Elle annule sa deuxième coordonnée en $t = 1/2$ en passant par l'origine. Par symétrie, on vérifie immédiatement que la troisième tangente passe elle aussi par l'origine.

6. Compléter le tableau de variations suivant :

   On utilise les propriétés de parité de x et de y !

t	$-\pi$		$-2\pi/3$		0		$2\pi/3$		π
signe de $x'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
variation de $x(t)$	-1	$\searrow$	$-3/2$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-3/2$	$\nearrow$	-1
signe de $y'(t)$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0
variation de $y(t)$	0	$\searrow$	$-3\sqrt{3}/2$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$3\sqrt{3}/2$	$\searrow$	0

7. Sur le graphique suivant, tracer la courbe Γ ainsi que les tangentes étudiées aux questions précédentes. *Indication : on commencera par tracer les tangentes aux points stationnaires (ces points apparaissent déjà sur le graphique).*



8. La courbe $(\Gamma, [-\pi, \pi[)$ est-elle paramétrée par l'abscisse curviligne ? *Indication : c'est la justification qui sera notée.*

   Non, car la norme de son vecteur dérivée n'est pas constante. En effet, $\|\Gamma'\|^2 = 8(1 - \cos(3t)) = 16\sin^2(3t/2)$ pour tout $t \in]-\pi, \pi]$.

9. **(Question Bonus)** Montrer que la longueur de Γ est 16. *Indication : aucun point ne sera donné pour la définition de la longueur, c'est bel et bien le calcul qui sera évalué.*

$$L = 4\int_{-\pi}^{\pi} |\sin(3t/2)|\, dt = 12\int_0^{2\pi/3} \sin(3t/2)dt = 8\int_0^{\pi} \sin(t)dt = 8\,[\cos(t)]_{t=0}^{\pi} = 16.$$