Contrôle continu 1

Exercice 1. Soit ϕ la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\phi(x, y) = (x_1 - 2x_2)(y_1 - 2y_2) + x_2 y_2 + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3)$$

pour tout $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$.

1. Vérifier que ϕ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

   L'application $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est d'après l'énoncé bilinéaire et symétrique. Reste à voir qu'elle est bien définie et positive. Sa matrice est

$$\phi(x, y) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=M} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

   Les déterminants mineurs principaux de M sont $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 4$ et $\Delta_3 = 1$. D'après le critère de Sylvester, ϕ est définie positive. C'est un donc bien un produit scalaire.

2. On note $\|\cdot\|_\phi$ la norme associée à ϕ. Soit $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$ et $k = (0, 0, 1)$. Calculer les coordonnées de

$$e_1 = \frac{i}{\|i\|_\phi}, \quad e_2 = \frac{j - \phi(e_1, j)e_1}{\|j - \phi(e_1, j)e_1\|_\phi}, \quad e_3 = \frac{k - \phi(e_1, k)e_1 - \phi(e_2, k)e_2}{\|k - \phi(e_1, k)e_1 - \phi(e_2, k)e_2\|_\phi}$$

   On a
   - $\|i\|_\phi^2 = \phi(i, i) = 1$ et
   $$e_1 = i = (1, 0, 0)$$
   - $\phi(j, e_1) = -2$ et $u_2 = j - \phi(e_1, j)e_1 = (2, 1, 0)$. De plus $\|u_2\|_\phi^2 = \phi(u_2, u_2) = 2$. Ainsi
   $$e_2 = (2, 1, 0)/\sqrt{2} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}/2, 0)$$
   - $\phi(k, e_1) = 0$, $\phi(k, e_2) = 1/\sqrt{2}$ et $u_3 = k - \phi(e_1, k)e_1 - \phi(e_2, k)e_2 = (-1, -1/2, 1)$. De plus $\|u_3\|_\phi^2 = \phi(u_3, u_3) = 1/2$. Ainsi
   $$e_3 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}/2, \sqrt{2}).$$

3. Vérifier que (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormale pour ϕ.

   Le procédé de la question précédente s'appelle orthonormalisation. Vérifions directement que $\phi(e_i, e_j) = 1$ si $i = j$ et 0 sinon. Cela revient à vérifier que le produit matriciel suivant est correct
   $$E^t M E = Id_3.$$
   avec $E = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ est triangulaire (les colonnes de E sont les vecteurs e_1, e_2 et e_3).

4. Déterminer (sans calcul) la matrice de ϕ dans la base (e_1, e_2, e_3).

   Par définition la matrice A de ϕ dans la base (e_1, e_2, e_3) est la matrice $A = [\phi(e_i, e_j)]_{i,j=1}^3$. Or d'après les deux questions précédente $A = Id_3$.

Exercice 2. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

1. Étudier la continuité de f.

   La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme somme et produit de fonctions continues (le dénominateur ne s'annulant pas en dehors de l'origine). Reste à étudier en $(0,0)$:

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \frac{|x|y^2}{x^2+y^2} \leq (x^2+y^2)^{3/2-1} = (x^2+y^2)^{1/2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

   La fonction f est continue sur tout le plan.

2. Soit $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que la dérivée directionnelle $D_v f(x,y)$ existe en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Calculer ensuite $D_v f(x,y)$.

   La fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme somme et produit de fonctions différentiables. Elle admet donc des dérivées directionnelles en tout point différent de l'origine. De plus,

$$D_v f(x,y) = d_{(x,y)}f(v) = \frac{y^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}v_1 + \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}v_2.$$

3. Soit $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que la dérivée directionnelle $D_v f(0,0)$ existe. La fonction f est elle différentiable en l'origine ?

   Par définition on a

$$D_v f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(hv_1, hv_2) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{hv_1h^2v_2}{(h^2v_1^2 + h^2v_2^2)} = \frac{v_1v_2}{v_1^2+v_2^2} \in \mathbb{R}.$$

   De plus, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = D_{(1,0)}f(0,0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = D_{(0,1)}f(0,0) = 0$. Or il existe une dérivée directionnelle non nulle et f ne peut être différentiable en 0. En effet, il existe $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $D_v f(0,0) \neq v_1\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + v_2\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Exercice 3. Trouver les points sur le paraboloïde $z = 4x^2 + y^2$ où le plan tangent est parallèle au plan $x + 2y + z = 6$.

Le plan $x + 2y + z = 6$ est normal au vecteur $(1,2,1)$. Le plan tangent au paraboloïde est normal au vecteur $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, 1)$. Trouver un plan tangent parallèle revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2 \end{cases}$$

On trouve une unique solution $(x,y) = (-1/8, -1)$.