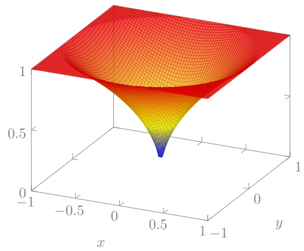
Contrôle Terminal

Durée 1h30. Les documents, la calculatrice, les téléphones portables, tablettes, ordinateurs ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1. On considère le domaine $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\quad 0 \le z \le 1,\ \ x^2 + y^2 \le z^4\,\}$.

1. Dessiner D.

   On a $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \le z \le 1, \underbrace{0 \le \sqrt{x^2 + y^2} \le z^2}_{=A_{z^2}}\}$. On note A_{z^2} le disque de rayon $z^2 > 0$. Le domaine D est donc la partie comprise au dessus du graphe de la fonction $(x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^{1/4}$:



2. Calculer son volume V.

   En appliquant la formule de sommation par tranche on a :

$$V = \int_0^1 \underbrace{\Big(\iint_{A_{z^2}} dxdy\Big)}_{=\pi z^4} dz = \pi \int_0^1 z^4 dz = \frac{\pi}{5}$$

3. Calculer son centre de gravité $G = \frac{1}{D}\left(\iiint_D xdxdydz, \iiint_D ydxdydz, \iiint_D zdxdydz\right)$.

   Le centre de gravité de D appartient clairement à l'axe de révolution Oz. On peut se convaincre que les 2 premières coordonnées s'annulent bien, car on a

$$\iiint_D xdxdydz = \int_0^1 \left(\iint_{A_{z^2}} xdxdy\right) dz = \int_0^1 \Big(\int_0^{z2} rdr \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta}_{=0}\Big) dz = 0,$$

   et

$$\iiint_D ydxdydz = \int_0^1 \left(\iint_{A_{z^2}} ydxdy\right) dz = \int_0^1 \Big(\int_0^{z^2} rdr \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta}_{=0}\Big) dz = 0.$$

   Reste à déterminer la coordonnée sur Oz :

$$\frac{1}{V}\iiint_D zdxdydz = \frac{1}{V}\int_0^1 z\left(\iint_{A_{z^2}} dxdy\right) dz = \frac{\pi}{V}\int_0^1 z^5 dz = \frac{5}{6}.$$

   Pour conclure on a $G = (0, 0, 5/6)$.

Exercice 2. Dans cet exercice, étant donné $r > 0$, on note :

$$D_r = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x^2 + y^2 < r^2\right\} \quad \bar{D}_r = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x^2 + y^2 \leq r^2\right\}$$

Dans la première partie de cet exercice, on se donne $f : D_2 \to \mathbb{R}$ et on suppose que f satisfait :

$$f \in \mathcal{C}^2(D_2), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \in D_1 \tag{H}$$

1. Justifier en une phrase que la restriction de f à $\bar{D}_1$ (notée $f_{\bar{D}_1}$ dans la suite) est bornée et atteint ses bornes.

2. On se donne $(x_0, y_0) \in D_1$.
   (a) Donner le développement limité à l'ordre 2 de f en (x_0, y_0).
   (b) En considérant $t \mapsto f(x_0 + t, y_0)$ et $t \mapsto f(x_0, y_0 + t)$ pour t proche de 0, montrer que l'hypothèse (H) implique que $f_{\bar{D}_1}$ ne peut pas atteindre son maximum en (x_0, y_0).
3. On suppose maintenant que $f_{\bar{D}_1}$ atteint son maximum en $(x_0, y_0) \in \bar{D}_1 \backslash D_1$. On introduit :

$$\begin{aligned} f_\Gamma : \quad & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & t \longmapsto f(\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

   (a) Justifier qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $(x_0, y_0) = (\cos(t_0), \sin(t_0))$ puis que f_Γ admet un maximum en t_0.
   (b) En déduire que
$$y_0 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - x_0 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$
   (c) Quelle propriété satisfont alors les vecteurs $\nabla f(x_0, y_0)$ et (x_0, y_0) ?

Dans la deuxième partie de l'exercice, on pose :

$$f(x, y) = \frac{y}{(x-4)^2 + y^2} + \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(4, 0)\}$$

On rappelle qu'on peut utiliser les résultats de la première partie de l'exercice même sans avoir répondu à ces questions.

4. Justifier que f satisfait (H).
5. En déduire que $f_{\bar{D}_1}$ est bornée et atteint ses bornes puis que sa valeur maximale ne peut pas être atteinte en un $(x_0, y_0) \in D_1$.
6. Soit $(x_0, y_0) \in \bar{D}_1 \backslash D_1$ tel que $f_{\bar{D}_1}$ est maximale en (x_0, y_0). Trouver une équation satisfaite par (x_0, y_0). Puis, en utilisant que $y_0^2 = 1 - x_0^2$, montrer que $x_0 = 8/17$.