Contrôle Terminal

Durée 2h00. Les documents, la calculatrice, les téléphones portables, tablettes, ordinateurs ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^2}.$$

1. Étudier la continuité de f en chaque point de $\mathbb{R}^2$.

   L'application $(x, y) \mapsto \|(x, y)\|$ (où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne) est continue. L'application f est continue comme le produit de deux applications continues.

2. Calculer les dérivées partielles de f en chaque point où elles existent.

   La fonction est $\mathcal{C}^1$ partout sauf peut être en $(0, 0)$ (à cause de la racine carrée). On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{ si } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0) \\ \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} |h| = 0, \text{ sinon} \end{cases}$$

   et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{ si } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0) \\ \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0, \text{ sinon} \end{cases}$$

3. Étudier la continuité des dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$, puis en $(0, 0)$.

   Sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$, les dérivées partielles sont clairement $\mathcal{C}^0$. Reste à vérifier en l'origine. On a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)\right| \leq \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

   et

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)\right| \leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

   Ainsi, les dérivée partielles sont continues en l'origine et f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

4. Étudier la différentiabilité de f en chaque point de $\mathbb{R}^2$.

   Comme f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, elle est différentiable partout.

5. En déduire une valeur approchée de $f(1.01, 0)$.

   La différentielle de f en $(1, 0)$ est l'application linéaire $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui $(h_1, h_2) \mapsto (1 + 1)h_1 + 0 \times h_2 = 2h_1$. On a donc le DL

$$f(1 + h_1, h_2) = f(1, 0) + L(h_1, h_2) + o(\|(h_1, h_2\|) = 1 + 2h_1 + o(\|(h_1, h_2)\|)$$

   Par suite, $f(1.01, 0) \approx 1 + 0.02 = 1.02$.

Exercice 2. On considère le champ de vecteurs

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (2xy + y\cos(xy), x\cos(xy) + x^2 - 1) \end{aligned}$$

On admettra provisoirement l'existence d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $F = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$.

1. Déterminer les deux points critiques de la fonction f. On note A le point critiques avec une abscisse négative et B le point critiques avec une abscisse positive.

   On cherche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que

   $$F(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} y(2x + \cos(xy)) = 0 \\ x\cos(xy) + x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

   Il faut alors considérer les deux cas suivants :
   - $y = 0$ qui donne $x^2 + x - 1 = 0$. On a alors deux solutions $A = (\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, 0)$ et $B = (\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 0)$.
   - $\cos(xy) = -2x$ qui donne $-x^2 - 1 = 0$ qui n'a pas de solution.

   En résumé, il y a deux points critiques A et B.

2. Calculer la matrice Hessienne de f en tout point de $\mathbb{R}^2$. Vérifier que $\mathrm{Hess}_f(A) = -\mathrm{Hess}_f(B) = -\sqrt{5}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   On a
   $$\mathrm{Hess}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y - y^2\sin(xy) & 2x + \cos(xy) - xy\sin(xy) \\ 2x + \cos(xy) - xy\sin(xy) & -x^2\sin(xy) \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer la nature de la matrice Hessienne de f en chacun des points critiques (*i.e.* la forme quadratique associée est-elle définie ? est-elle positive ? est elle négative ?)

   On a $\mathrm{Hess}_f(A) = -\sqrt{5}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi la forme quadratique

   $$\begin{aligned} Q_A &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ &(h_1, h_2) \mapsto (h_1, h_2)\,\mathrm{Hess}_f(A)(h_1,h_2)^t = -2\sqrt{5}h_1h_2 \end{aligned}$$

   n'est pas définie car $Q_A(0,1) = 0$, n'est pas positive, n'est pas négative car $Q_A(1,1) < 0 < Q(-1,1)$.
   On a $\mathrm{Hess}_f(B) = -\mathrm{Hess}_f(A)$ et les mêmes remarques s'appliquent.

4. Peut-on déduire, de la question précédente, la nature des points critiques de f (*i.e.* minimum, maximum, strict, global) ? Justifier !

   On ne peut pas appliquer les "conditions suffisantes d'ordre 2" pour caractériser les points car les Hessiennes ne sont pas définies. Mais on peut remarquer que $\det(\mathrm{Hess}_f(A)), \det(\mathrm{Hess}_f(B)) < 0$ et les points A, B sont donc des points selles.

5. Trouver une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\nabla f = F$.

   On intègre une première fois en x la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$:

   $$\int (2xy + y\cos(xy))dx = yx^2 + \sin(xy) + \varphi_1(y)$$

   où $\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$. Puis on intégre en y la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$:

   $$\int (x\cos(xy) + x^2 - 1)dy = yx^2 + \sin(xy) - y + \varphi_2(x)$$

   où $\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$. Ainsi, la fonction $f(x,y) = \sin(xy) + x^2y - y$ convient.

6. Soit Γ la courbe paramétrée par $\phi : t \mapsto (t, t^2)$ pour $t \in [0, 1]$. Calculer la circulation de F le long de Γ.

   Le champ de vecteur F est un champ de gradient. On a

$$\int_\Gamma \langle F, d\phi \rangle = f(\phi(1)) - f(\phi(0)) = f(1, 1) - f(0, 0) = \sin(1).$$

Exercice 3.

1. Soient $\alpha, \beta, R > 0$. Calculer l'aire de l'ellipse $E \subset R^2$ définie par l'équation

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} < R^2.$$

   Indication : On pourra utiliser le changement de variables $(u, v) \mapsto (\alpha u, \beta v)$.

   On pose $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} < R^2\right\}$ et $\phi(u, v) = (\alpha u = x, \beta v = y)$. On a $\Delta = \phi^{-1}(D) = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | u^2 + v^2 < R^2\right\}$. Comme le changement de variable ϕ est linéaire, le déterminant du Jacobien est constant et égal à $\alpha\beta > 0$. On a

$$\text{Aire}(E) = \iint_D dxdy = \alpha\beta \iint_\Delta dudv = \alpha\beta \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R rdr = \alpha\beta\pi R^2.$$

   où on a utilisé un changement de variables en coordonnées polaires. Remarquer enfin que si $\alpha = \beta = 1$ on retrouve une formule bien connue.

2. Soit $H_{a,b,c} \subset \mathbb{R}^3$ le solide défini par

$$H_{a,b,c} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 | -1 < z < 2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} < 1\right\}$$

   où a, b et c sont des réels strictement positifs. Calculer le volume de $H_{a,b,c}$.

   On a $H_{a,b,c} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 | -1 < z < 2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 + \frac{z^2}{c^2}\right\}$ et la formule d'intégration par tranche donne :

$$\text{Vol}(H_{a,b,c}) = \iiint_{H_{a,b,c}} dxdydz = \int_{-1}^2 \text{Aire}(D_z)dz$$

   où $D_z = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 + \frac{z^2}{c^2}.\right\}$ et $\text{Vol}(D_z) = ab\pi(1 + \frac{z^2}{c^2})$ d'après la question 1. On a alors

$$\text{Vol}(H_{a,b,c}) = \pi ab \int_{-1}^2 \left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right) dz = 3ab\pi \left(1 + \frac{1}{c^2}\right)$$

3. On suppose que $a = b = 1$ et $c = 2$. Calculer l'intégrale

$$I = \iiint_{H_{1,1,2}} ze^{x^2+y^2} dxdydz.$$

Faire un changement de coordonnées cylindriques :

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{2} \left(2\pi \int_{0}^{\sqrt{1+\frac{z^2}{4}}} e^{r^2} r dr \right) z dz \\
&= \pi \int_{-1}^{2} \left[e^{r^2} \right]_{0}^{\sqrt{1+\frac{z^2}{4}}} z dz \\
&= \pi \left[2e^{1+\frac{z^2}{4}} - \frac{z^2}{2} \right]_{-1}^{2} \\
&= \pi(2e^2 - 2e^{\frac{5}{4}} - \frac{3}{2})
\end{aligned}
$$