Examen

Durée 3h00. Les documents, la calculatrice, les téléphones portables, tablettes, ordinateurs ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

1 Topologie et formes quadratiques

Exercice 1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On pose $N_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$N_{a,b}(x, y) = a\,|x| + b\,|y|\,.$$

1. Démontrer que si $N_{a,b}$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$ alors $a, b > 0$.
2. Réciproquement, démontrer que si $a, b > 0$ alors $N_{a,b}$ est une norme.
3. Dessiner les lignes de niveau 0.5, 1 et 2 de $N_{2,1}$.

Exercice 2. Soit $q : (x, y, z) \mapsto x^2 - 2xy + 2y^2 + 4yz + 8z^2$ une forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$.

1. Écrire q sous forme de somme de carrés d'applications linéaires indépendantes.

   On a $q(x, y, z) = (x - y)^2 + (y + 2z)^2 + 4z^2$.

2. Donner la forme bilinéaire symétrique φ associée à q.

   La fonction $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est définie par $\varphi((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = x_1x_2 - x_1y_2 - y_1x_2 + 2y_1y_2 + 2y_1z_2 + 2y_2z_1 + 8z_1z_2 = (x_1 - y_1)(x_2 - y_2) + (y_1 + 2z_1)(y_2 + 2z_2) + 4z_1z_2$ (on a utilisé la forme factorisée de la question précédente pour la seconde égalité).

3. La fonction φ de la question précédente définit-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$? Justifier.

   Oui, φ est positive (d'après la question 1, c'est bien une somme de carrée) et est définie car $q(x, y, z) = 0$ si et seulement si $x = y = z = 0$ (les formes linéaires étant linéairement indépendantes par construction).

2 Courbes paramétrées

Exercice 3. Soit $\Gamma(t) = (\cos t, \sin(t/3))$ pour $t \in [0, 3\pi/2]$.

1. Donner le tableau de variation de Γ.

   On a de manière immédiate $x'(t) = -\sin t$ et $y'(t) = \frac{1}{3}\cos t/3$. Ce qui donne

t	0		π		$3\pi/2$
$x'(t)$	0	$-$	0	$+$	
$x(t)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
$y'(t)$		$+$		$+$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	1

2. Déterminer les points critiques de Γ.

   Il n'y en a pas.

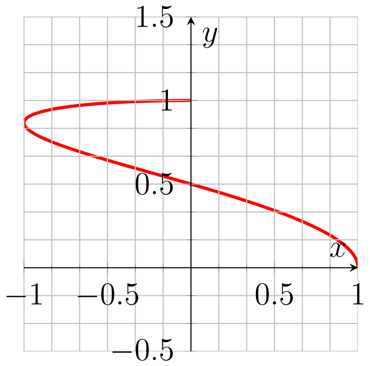
3. Déterminer les points de Γ qui admettent une tangente horizontale ou une tangente verticale.

   Les tangentes verticales sont données par les solutions de $x'(t) = 0$. On est alors en $\Gamma(0) = (1, 0)$ et $\Gamma(\pi) = (-1, 3\pi/2)$.
   Les tangentes horizontales sont données par les solutions de $y'(t) = 0$. On est alors en $\Gamma(3\pi/2) = (0, 1)$.

4. Déterminer le(s) point(s) de Γ qui intersecte(nt) l'axe Oy.

   En posant $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$ on cherche les solutions éventuels de $x(t) = 0$. Il y en a deux dans l'intervalle de définition : pour $t = 3\pi/2$ on a $\Gamma(t) = (0, 1)$ et $t = \pi/2$ on a $\Gamma = (0, 1/2)$.

5. Tracer la courbe.



3 Calcul différentiel

Exercice 4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y = 0 \\ xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

   La fonction f est clairement continue en dehors de l'origine comme quotient de polynôme. Il s'agit donc de vérifier que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. En effet, on a

   $$|f(x,y)| \leq \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$$

   Et f est bien continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. La fonction f est-elle $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$?

   La fonction f admet des dérivées partielles en dehors de l'origine comme quotient de polynôme. On calcul les dérivées partielles pour $(x,y) \neq (0,0)$:

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\frac{x^4-y^4+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\frac{x^4-y^4-4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

En $(0,0)$, on remarque que les fonctions partielles $f(x,0) = f(0,y) = 0$ et on a immédiatement que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.
Reste donc à voir si les dérivées partiels sont continues en l'origine. C'est bien le cas car si on passe en coordonnées polaire on a :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq 6r$$

qui tends vers 0 avec r. De même pour $\frac{\partial f}{\partial x}$ est aussi continue en l'origine.

3. La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

   Oui, car elle est $\mathcal{C}^1$.

4. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Quelle conclusion sur f peut-on en tirer ?

   Calculons les dérivées secondes croisées à l'origine, en revenant à la définition

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y}$$

   Ce qui donne avec $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{-y}{y} = -1$$

   les dérivées secondes croisées à l'origine ne sont pas égales et f' n'est donc pas de classe C^2 (cf.théorème de Schwarz).

Exercice 5. Calculer les points critiques de la fonction $(x,y) \mapsto xe^{-x^2-y^2}$ définie sur $\mathbb{R}^2$. En donner leur nature.

On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (1-2x^2)e^{-x^2-y^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2xye^{-x^2-y^2}$ et $Hess_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x(3-2x^2) & -2y(1-2x^2) \\ -2y(1-2x^2) & -2x(1-2y^2) \end{pmatrix}$ e
Les points critiques sont $(1/\sqrt{2}, 0)$ (maximum local) et $(-1/\sqrt{2}, 0)$ (minimum local).

4 Intégration

Exercice 6. Calculer l'intégrale $\iint_D xydxdy$ où D est le domaine du plan qui est l'intersection du disque de centre $(0,1)$ et de rayon 1 et du disque de centre $(1,0)$ et de rayon 1.

Le domaine D est symétrique par rapport à la première bissectrice. Sur D, on a $f(y,x) = f(x,y)$. On a donc

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy = 2\iint_{D_1} f(x,y)dxdy$$

où D_1 est la partie du domaine D située sous la première bissectrice. L'équation du cercle de centre $(0,1)$ est $x^2 + (y-1)^2 = 1$ ou encore $x^2 + y^2 - 2y = 0$. La partie inférieure du cercle a donc pour équation $x = \sqrt{2y - y^2}$. Lorsque y est fixé entre 0 et 1, le nombre x varie de y à $\sqrt{2y-y^2}$ et donc

$$(I_x)_1(y) = \int_y^{\sqrt{2y-y^2}} xydx = \left[y\frac{x^2}{2}\right]_{x=y}^{x=\sqrt{2y-y2}} = y^2 - y^3$$

Puis

$$I = 2\int_0^1 (I_x)_1(y)dy = 2\int_0^1 (y^2 - y^3)dy = 2\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_{y=0}^1 = 2(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{6}$$

Exercice 7. Soit $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ tels que $h_1 < h_2$ et

$$V(h_1, h_2) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, h_1 \leq z \leq h_2 \text{ et } \ x^2 + y^2 \leq 2z^2\right\}.$$

1. Dessiner l'intersection de $V(1, 2)$ avec le plan Oxz.
2. Quel objet géométrique simple représente $V(h_1, h_2)$?

   C'est un cône tronqué.

3. Calculer le volume de $V(h_1, h_2)$ en fonction de h_1 et h_2.

   En passant en coordonnées cylindrique le cône a pour équation cylindrique $r = \sqrt{2}z$. On intègre donc sur le domaine $D = \{(r, \theta, z)|0 \leq r \leq \sqrt{2}z, -\pi \leq \theta \leq \pi, h_1 \leq z \leq h_2\}$ et le volume demandé est

   $$V(h_1, h_2) = \iint_D r dr d\theta dz.$$

   Si (θ, z) appartient à $D_1 = [-\pi, \pi] \times [h_1, h_2]$ on calcule tout d'abord

   $$I_r(\theta, z) = \int_0^{\sqrt{2}z} r dr = \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2}z} = z^2.$$

   Par suite (les variables se séparent)

   $$V(h_1, h_2) = \iint_{D_1} I_r(\theta, z) d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{h_1}^{h_2} z^2 dz = \frac{2}{3}\pi(h_2^3 - h_1^3).$$