Université Montpellier 2 Année 2014-2015
HLMA 410

Examen - session 2

Durée 2h00. Les documents, la calculatrice, les téléphones portables, tablettes, ordinateurs ne sont pas autorisés. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

1 Analyse

Exercice 1. Question de cours Soit $\Gamma = ([a,b], \phi)$ un arc paramétré dans $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs continu.

1. Qu'appelle-t-on circulation de V le long de Γ ?

Soit $\theta : [c,d] \to [a,b]$ un C^1-difféomorphisme et $\psi = \phi \circ \theta$.

2. Quelle relation y a-t-il entre la circulation de V le long de $\Gamma' = ([c,d], \psi)$ et la circulation le long de Γ ?
3. Le-démontrer.

Exercice 2. Question de cours Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient u, v deux vecteurs de E.

1. Donner la définition d'une norme $\|\cdot\|$ sur E.
2. Montrer que
$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\| .$$
Indication : on pourra montrer dans un premier temps que $\|u\| \leq \|v - u\| + \|v\|$

Exercice 3. Soit D le domaine borné du plan délimité par la droite $y = 2x$ et la parabole $y^2 = 4x$.

1. Calculer l'aire de D.
2. Calculer l'intégrale $\iint_D (y - x)dxdy$.
3. Soit C une courbe paramétrée décrivant le bord orienté positivement de D (de sorte à laisser D sur sa gauche).
   (a) Déterminer une expression possible pour C.
   (b) Calculer la circulation du champs de vecteur $(u, v) \mapsto (v^2, uv)$ le long de C de manière directe.
   (c) Calculer la circulation du champs de vecteur $(u, v) \mapsto (v^2, uv)$ le long de C avec l'aide de la formule de Green-Riemann.

Exercice 4. Soit $f(x, y) = \left|4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 39\right|$.

1. Déterminer les réels a_1, a_2, c_1, c_2 et b tels que $f(x, y) = \left|a_1(x - c_1)^2 + a_2(y - c_2)^2 - b\right|$.
2. Étudier la continuité f. Sur quel ensemble f est-elle $\mathcal{C}^\infty$? Justifier la réponse.
3. Donner les points de minimum de f sur $\mathbb{R}^2$. Indiquer aussi la nature de ces points (minimum global ou local).
4. Calculer le gradient et la Hessienne de f en les points de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels ces quantités sont bien définies.
5. Déterminer alors le(s) point(s) critique(s) de f donner leur nature (minimum/maximum, local/global, point selle,...).

2 Probabilité

Exercice 5. Un étudiant tente désespérément de passer son examen de HLMA410. On suppose qu'il a une probabilité $p \in]0, 1[$ de réussite à chaque essai. On suppose que les essais sont indépendants et on note N le nombre d'essais nécessaires pour qu'il valide cet unité d'enseignement (UE).

1. (a) Donner la loi de N et calculer $\mathbb{P}(N > 2)$.
   (b) La moyenne de N existe-t-elle ? Si oui la calculer (on demande le détail du calcul, pas uniquement le résultat).
2. Soit $Z = \min\{3, N\}$.
   (a) La moyenne de Z existe-t-elle ? Si oui la calculer.
   (b) La variance de Z existe-t-elle ? Si oui la calculer.