Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
Journal of Algebra 314 (2007) 252–266
JOURNAL OF Algebra
www.elsevier.com/locate/jalgebra

Algèbre de Clifford d'un antiautomorphisme

Anne Cortella

Laboratoire de Mathématique de Besançon, UMR CNRS 6623, Université de Franche-Comté, 16 Route de Gray, 25030 Besançon Cedex, France

Reçu le 22 août 2006

Disponible sur Internet le 21 mars 2007

Communiqué par Eva Bayer-Fluckiger

Résumé

Nous définissons l'algèbre de Clifford d'un antiautomorphisme d'algèbre centrale simple, et la calculons pour les algèbres de degré 2.

Abstract

We give a definition of the Clifford algebra of an antiautomorphism of a central simple algebra, and compute it for the algebras of degree 2.

Keywords: Central simple algebras; Matrix algebras; Bilinear forms; Involutions; Clifford algebras

L'algèbre de Clifford d'une involution linéaire de type orthogonal sur une algèbre centrale simple A a été définie par Jacobson dans [J], par descente galoisienne, pour généraliser la partie paire de l'algèbre de Clifford d'une forme quadratique. Tits [TI] l'a ensuite définie comme un quotient de l'algèbre tensorielle de l'espace vectoriel sous-jacent à A.

Dans cet article, une définition de l'algèbre de Clifford pour un antiautomorphisme σ, linéaire, non nécessairement involutif, sur une algèbre centrale simple A, est proposée (définition 2.1). Elle généralise la définition de Tits. Cela définit un nouvel invariant de la classe d'isomorphie de (A,σ) (théorème 2.2), se comportant bien par extension des scalaires. Pour A déployée, c'est la partie paire de ce qu'on peut définir comme la généralisation aux formes bilinéaires non neces-

Adresse e-mail : anne.cortella@univ-fcomte.fr.

0021-8693/$ – see front matter
doi:10.1016/j.jalgebra.2007.03.011

sairement symétriques de l'algèbre de clifford classique des formes quadratiques (théorème 2.5 et définition 2.6).

Avant de détailler cette définition et ces propriétés dans la deuxième partie, nous commencerons, dans la première partie, par rappeler les définitions du discriminant et de l'algèbre de Clifford dans le cas involutif orthogonal, puis celles d'invariants des antiautomorphismes issus de [CT] et utilisés dans notre définition principale.

Enfin, une troisième partie est consacrée au calcul de notre nouvel invariant si l'algèbre A est de degré 2. On fait alors le lien avec le discriminant et l'asymétrie de l'antiautomorphisme (proposition 3.1).

Notations. Soit F un corps de caractéristique différente de 2. Si V et W sont deux F-espaces vectoriels, si $\psi : V \to W$ est une application F-linéaire et si L est une extension de F, on pose $V_L = V \otimes_F L$ et on note $\psi_L : V_L \to W_L$ l'application L-linéaire $\psi \otimes_F \mathrm{Id}_L$. Si σ est un F-endomorphisme de V, on pose $\mathrm{Sym}(V,\sigma) = \{v \in V \mid \sigma(v) = v\}$ et $\mathrm{Skew}(V,\sigma) = \{v \in V \mid \sigma(v) = -v\}$. L'algèbre tensorielle de V sur F sera notée $T(V)$.

Si A est une F-algèbre centrale simple, on note $\underline{A}$ l'espace vectoriel sous-jacent à A, A^{op} l'algèbre opposée. On note respectivement $\mathrm{Trd} : A \to F$ et $\mathrm{Nrd} : A \to F$ la trace réduite et la norme réduite.

1. Quelques rappels

1.1. Le discriminant et l'algèbre de Clifford d'une involution de type orthogonal

Ici, A est une algèbre centrale simple sur F et σ est une involution de type orthogonal sur A, c'est-à-dire un antiautomorphisme F-linéaire involutif de l'algèbre A tel que : si L est un corps qui déploie A, en identifiant $A_L \simeq \mathrm{End}_L(L^n)$, alors σ_L est l'adjonction σ_b pour un forme bilinéaire symétrique non dégénérée b sur $V = L^n$:

$$\forall f \in \mathrm{End}_L V,\ \forall x, y \in V,\ b\big(f(x), y\big) = b\big(x, \sigma_b(f)(y)\big). \tag{1.0}$$

Si A est déployée, la classe de similitude de b est un invariant de la classe d'isomorphie de (A,σ).

Proposition 1.1. *(Knus–Parimala–Sridharan [KPS], voir aussi [BOI, proposition 7.1, p. 81].) Si* $\deg A = 2m$ *est pair, alors* $\mathrm{Skew}(A,\sigma) \cap A^\times \neq \varnothing$ *et* $\mathrm{Nrd}\, x \in F^\times/(F^\times)^2$ *est indépendant de* x *pris dans cet ensemble.*

Cela leur permet de définir le discriminant pour les algèbres de degré pair $2m$:

Définition 1.2. On appelle discriminant de (A,σ), et on note $\mathrm{disc}\,\sigma$, la classe de $(-1)^m \,\mathrm{Nrd}\, x$ dans $F^\times/(F^\times)^2$, où x est un élément quelconque de $\mathrm{Skew}(A,\sigma) \cap A^\times$.

Cela définit un invariant de la classe d'isomorphie de (A,σ) qui étend la notion de discriminant (à signe) des formes bilinéaires symétriques : si b est une telle forme sur un espace vectoriel V de dimension n, on définit $\mathrm{disc}\, b = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \det b \in F^\times/(F^\times)^2$, qui est un invariant de la classe de similitude de b ; si de plus $n = 2m$, alors $\mathrm{disc}\, b = \mathrm{disc}\,\sigma_b$. De plus, le discriminant se comporte bien pour l'extension des scalaires [BOI, proposition 7.3, p. 81].

L'algèbre de Clifford d'une involution de type orthogonal a été à l'origine définie par Jacobson [J], et c'est le centre de cette algèbre qui a donné la première définition du discriminant. Tits [TI] en a cependant donné une définition plus facile à mettre en œuvre. Pour cela, il utilise le sandwich.

L'application $\mathrm{Sand}: A \otimes A^{op} \to \mathrm{End}_F \underline{A}$, $x \otimes y \mapsto (a \mapsto xay)$ est un isomorphisme d'algèbres appelé sandwich. Si σ est une involution orthogonale sur A et si $u \in A \otimes A^{op}$, alors $a \mapsto (\mathrm{Sand}\, u)(\sigma(a))$ est un élément de $\mathrm{End}_F \underline{A}$, donc il existe $\sigma_2(u) \in A \otimes A^{op}$ tel que, pour tout $a \in A$, $(\mathrm{Sand}\, \sigma_2(u))(a) = (\mathrm{Sand}\, u)(\sigma(a))$. Cela définit une application linéaire involutive σ_2 sur l'espace vectoriel $\underline{A} \otimes \underline{A}$. Notons encore μ la multiplication : $\underline{A} \otimes \underline{A} \to A$; $u \mapsto (\mathrm{Sand}\, u)(1)$.

Définition 1.3. (Tits [TI], voir aussi [BOI, definition 8.7, p. 92].) L'algèbre de Clifford $C(A,\sigma)$ est le quotient

$$C(A,\sigma) = T(\underline{A})/\big(J_1(A,\sigma) + J_2(A,\sigma)\big)$$

où

(1) $J_1(A,\sigma)$ est l'idéal de $T(\underline{A})$ engendré par les $s - \frac{1}{2}\mathrm{Trd}\, s$ pour $s \in \mathrm{Sym}(\underline{A},\sigma)$.
(2) $J_2(A,\sigma)$ est l'idéal de $T(\underline{A})$ engendré par les $u - \frac{1}{2}\mu(u)$ pour $u \in \mathrm{Sym}(\underline{A} \otimes \underline{A}, \sigma_2)$.

Cela définit encore un invariant de la classe d'isomorphie de (A,σ). En particulier, si A est déployée et $\sigma = \sigma_b$ avec b bilinéaire symétrique sur V, alors, en identifiant via

$$\varphi_b : V \otimes V \xrightarrow{\sim} \underline{A} = \underline{\mathrm{End}_F V}; \quad v \otimes w \mapsto \big(x \mapsto vb(w,x)\big),$$

on trouve $C(A,\sigma) = T(V \otimes V)/(I_1 + I_2)$, où I_1 est l'idéal engendré par les $v \otimes v - \frac{1}{2}b(v,v)$, $v \in V$, et I_2 par les $u \otimes v \otimes v \otimes w - \frac{1}{2}b(v,v)(u \otimes w)$, u, v, $w \in V$, et donc $C(A,\sigma)$ est la partie paire de l'algèbre graduée $T(V)/\langle v \otimes v - b(v,v), v \in V\rangle$, qui n'est autre que l'algèbre de Clifford classique pour une forme quadratique (ceci ne dépendant que de la classe de similitude de b, on peut enlever le facteur $\frac{1}{2}$).

De plus, $C(A,\sigma)$ se comporte bien par extension des scalaires.

Signalons encore une propriété structurelle importante.

Théorème 1.4. *(Voir [BOI, théorème 8.10, p. 94].) Si $\deg A = 2m$, le centre de $C(A,\sigma)$ est l'algèbre étale $Z = F[X]/(X^2 - \mathrm{disc}\,\sigma)$. Si c'est un corps, alors $C(A,\sigma)$ est une Z-algèbre centrale simple de degré 2^{m-1}. Sinon, $Z \simeq F \times F$ et $C(A,\sigma)$ est le produit de deux F-algèbres centrales simples de degré 2^{m-1}.*

Enfin, σ induit sur $T(\underline{A})$ une involution par : $\underline{\sigma}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_r) = \sigma(a_r) \otimes \cdots \otimes \sigma(a_1)$, qui passe au quotient et définit ainsi une involution dite canonique sur $C(A,\sigma)$.

1.2. L'asymétrie et le discriminant d'un antiautomorphisme

Soit maintenant une algèbre centrale simple A sur le corps F munie d'un antiautomorphisme F-linéaire σ non nécessairement involutif. Par extension des scalaires à un corps L scindant A et en identifiant $A_L \simeq \mathrm{End}_L V$, où V est un L-espace vectoriel, l'antiautomorphisme σ_L est l'adjonction pour une forme bilinéaire non dégénérée $b: V \times V \to L$ non nécessairement symétrique, définie à similitude près par la classe d'isomorphie de σ, c'est-à-dire que σ_L vérifie 1.0.

Proposition 1.5. *(Cortella–Tignol [CT, propositions 3 et 4].)*

(1) *Si b est une forme bilinéaire non dégénérée sur V, il existe une unique application linéaire γ_b sur $\underline{\mathrm{End}_F V}$ satisfaisant*

$$\forall x, y \in V, \forall f \in \mathrm{End}_F V,\ b\big(x, f(y)\big) = b\big(y, \gamma_b(f)(x)\big).$$

(2) *Si σ est un antiautomorphisme sur A (F-linéaire), il existe une unique application linéaire γ_σ sur $\underline{A}$ telle que si L scinde A, si θ est un isomorphisme de*

$$A_L = A \otimes_F L \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_L V$$

et si b est une forme bilinéaire sur V telle que $\theta \circ \sigma_L \circ \theta^{-1} = \sigma_b$, alors

$$\theta \circ (\gamma_\sigma \otimes_F \mathrm{Id}_L) \circ \theta^{-1} = \gamma_b.$$

De plus, pour tous x, y, $z \in A$, $\gamma_\sigma(xyz) = \sigma(z)\gamma_\sigma(y)\sigma^{-1}(x)$ et $\gamma_\sigma^2 = \mathrm{Id}_A$.

Définition 1.6. L'asymétrie de (A, σ) est l'élément $a_\sigma = \gamma_\sigma(1) \in A^\times$.

Cet élément vérifie en particulier :

(1) Si $\sigma = \sigma_b$, alors, pour tous x, $y \in V$, $b(x, y) = b(y, a_\sigma(x))$.
(2) Pour tout $\alpha \in A$, $\gamma_\sigma(\alpha) = \sigma(\alpha)a_\sigma$.
(3) $\sigma^2 = \mathrm{int}\, a_\sigma$.
(4) $\sigma(a_\sigma) = a_\sigma^{-1}$.
(5) σ est une involution orthogonale si et seulement si $a_\sigma = 1$, et σ est une involution symplectique si et seulement si $a_\sigma = -1$.

De plus, la classe d'isomorphie du couple $(\underline{A}, \gamma_\sigma)$ et la classe de conjugaison de a_σ sont des invariants de la classe d'isomorphie de (A, σ).

Nous pouvons alors, si $\deg A = 2m$, étendre la définition du discriminant de (A, σ) aux antiautomorphismes en utilisant γ_σ.

Proposition 1.7. *(Cortella–Tignol [CT, lemme 3].) Si* $\deg A = 2m$ *est pair, alors* $\mathrm{Skew}(\underline{A}, \gamma_\sigma) \cap A^\times \neq \varnothing$ *et* $\mathrm{Nrd}\, x \in F^\times/(F^\times)^2$ *est indépendant de x pris dans cet ensemble.*

Définition 1.8. On appelle discriminant de (A, σ), et on note $\mathrm{disc}\, \sigma$, la classe de $(-1)^m \mathrm{Nrd}\, x$ dans $F^\times/(F^\times)^2$, où x est un élément quelconque de $\mathrm{Skew}(\underline{A}, \gamma_\sigma) \cap A^\times$.

En particulier, si $\sigma = \sigma_b$, $\mathrm{disc}\, \sigma = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \det b$ et, si σ est une involution orthogonale, le discriminant est bien celui de la definition 1.2. Par ailleurs, si $1 - a_\sigma$ est inversible, alors $\mathrm{disc}\, \sigma = (-1)^m \mathrm{Nrd}(1 - a_\sigma)$.

2. L'algèbre de Clifford d'un antiautomorphisme

2.1. *Définition et invariance*

Fixons une F-algèbre centrale simple A, munie d'un antiautomorphisme F-linéaire σ. Nous définissons ici l'algèbre de Clifford de (A,σ) en suivant la définition 1.3 de Tits.

Définition 2.1. L'algèbre de Clifford $C(A,\sigma)$ est le quotient

$$C(A,\sigma)=T(\underline{A})/\bigl(J_1(A,\sigma)+J_2(A,\sigma)\bigr)$$

où

(1) $J_1(A,\sigma)$ est l'idéal de $T(\underline{A})$ engendré par les $s-\frac{1}{2}\operatorname{Trd}s$ pour $s\in\operatorname{Sym}(\underline{A},\gamma_\sigma)$.
(2) $J_2(A,\sigma)$ est l'idéal de $T(\underline{A})$ engendré par les $u-\frac{1}{2}\mu_\sigma(u)$ pour $u\in\operatorname{Sym}(\underline{A}\otimes\underline{A},\gamma_{\tilde\sigma,2})$, avec
- $\tilde\sigma$ est l'antiautomorphisme $\tilde\sigma=(\operatorname{int}a_\sigma)\circ\sigma$ de A et donc $\gamma_{\tilde\sigma}$ est l'application linéaire involutive de $\underline{A}$ définie par $\gamma_{\tilde\sigma}(x)=a_\sigma\gamma_\sigma(x)a_\sigma$; alors $\gamma_{\tilde\sigma,2}$ est l'application linéaire involutive induite par $\gamma_{\tilde\sigma}$ sur $\underline{A}\otimes\underline{A}$ grâce au sandwich par

$$\forall u\in A\otimes A^{op},\forall x\in A\bigl(\operatorname{Sand}\gamma_{\tilde\sigma,2}(u)\bigr)(x)=(\operatorname{Sand}u)\bigl(\gamma_{\tilde\sigma}(x)\bigr)$$

- si $u\in\underline{A}\otimes\underline{A},\ \mu_\sigma(u)=(\operatorname{Sand}u)(a_\sigma)$.

Avec cette définition, il est clair que si σ est une involution de type orthogonal, alors $C(A,\sigma)$ n'est autre que l'algèbre de Clifford de (A,σ) définie par Tits.

Théorème 2.2. *La classe d'isomorphie de $C(A,\sigma)$ est un invariant de la classe d'isomorphie de (A,σ).*

Démonstration. Supposons (A,σ) et (A',ρ) isomorphes, c'est-à-dire qu'il existe un isomorphisme $\delta: A\xrightarrow{\sim}A'$ tel que $\rho=\delta\circ\sigma\circ\delta^{-1}$. On peut alors supposer que $A=A'$ et, comme elle est centrale simple, d'après le théorème de Skolem–Noether, δ est intérieur. Il existe donc $w\in A^\times$ tel que $\delta=\operatorname{int}w$. Ainsi, $\rho=\operatorname{int}(\rho(w)w)\circ\sigma$. Nous allons alors relier a_σ à a_ρ, γ_σ à γ_ρ et $\gamma_{\sigma,2}$ à $\gamma_{\rho,2}$.

Proposition 2.3. *Si σ et ρ sont deux antiautomorphismes isomorphes de A et si $w\in A^\times$ vérifie $\rho\circ\operatorname{int}w=\operatorname{int}w\circ\sigma$, alors*

(1) $a_\rho=wa_\sigma w^{-1}$.
(2) $\gamma_\rho\circ\operatorname{int}w=\operatorname{int}w\circ\gamma_\sigma$.
(3) $\gamma_{\rho,2}\circ\operatorname{int}(w\otimes w^{-1})=\operatorname{int}(w\otimes w^{-1})\circ\gamma_{\sigma,2}$.

Démonstration. (1) est un calcul direct à partir de [CT, proposition 7] : si $\rho=(\operatorname{int}u)\circ\sigma$, alors $a_\rho=u\sigma(u)^{-1}a_\sigma$ que l'on applique à $u=\rho(w)w=w\sigma(w)$.

(2) est alors obtenu grâce à $\gamma_\sigma(\alpha)=\sigma(\alpha)a_\sigma$ si $\alpha\in A$.

Pour (3), on utilise la structure d'algèbre donnée sur $\underline{A}\otimes\underline{A}$ par $A\otimes A^{op}$, qui fait du sandwich un isomorphisme d'algèbres. On peut alors démontrer :

Lemme 2.4. *Si $w \in A$ et $u \in A \otimes A^{op}$, alors* $\mathrm{Sand}(\mathrm{int}(w \otimes w^{-1})(u)) = \mathrm{int}\, w \circ \mathrm{Sand}\, u \circ \mathrm{int}\, w^{-1}$.

En effet, si $u = \alpha \otimes \beta \in A \otimes A^{op}$ et $x \in A$, alors

$$\begin{aligned}\big[\mathrm{Sand}\big(\mathrm{int}\big(w \otimes w^{-1}\big)(\alpha \otimes \beta)\big)\big](x) &= \big[\mathrm{Sand}\big(\big(w \otimes w^{-1}\big)(\alpha \otimes \beta)\big(w \otimes w^{-1}\big)^{-1}\big)\big](x) \\ &= \big[\mathrm{Sand}\big(w\alpha w^{-1} \otimes w\beta w^{-1}\big)\big](x) \\ &= w\alpha w^{-1} x w\beta w^{-1} \\ &= w\big[\big(\mathrm{Sand}(\alpha \otimes \beta)\big)\big(w^{-1}xw\big)\big]w^{-1},\end{aligned}$$

d'où le lemme.

De ce lemme on déduit que si w est comme dans l'énoncé de la proposition et $u \in A \otimes A^{op}$, alors

$$\begin{aligned}&\mathrm{Sand}\big[\mathrm{int}\big(w \otimes w^{-1}\big) \circ \gamma_{\sigma,2} \circ \mathrm{int}\big(w \otimes w^{-1}\big)^{-1}(u)\big] \\ &\quad = \mathrm{int}\, w \circ \mathrm{Sand}\big[\gamma_{\sigma,2}\big(\mathrm{int}\big(w^{-1} \otimes w\big)(u)\big)\big] \circ \mathrm{int}\, w^{-1} \\ &\quad = \mathrm{int}\, w \circ \mathrm{Sand}\big(\mathrm{int}\big(w^{-1} \otimes w\big)(u)\big) \circ \gamma_\sigma \circ \mathrm{int}\, w^{-1} \\ &\quad = \mathrm{int}\, w \circ \mathrm{int}\, w^{-1} \circ \mathrm{Sand}(u) \circ \mathrm{int}\, w \circ \gamma_\sigma \circ \mathrm{int}\, w^{-1} \\ &\quad = \mathrm{Sand}\, u \circ \gamma_\rho = \mathrm{Sand}\big(\gamma_{\rho,2}(u)\big).\end{aligned}$$

Donc finalement

$$\gamma_{\rho,2} = \mathrm{int}\big(w \otimes w^{-1}\big) \circ \gamma_{\sigma,2} \circ \mathrm{int}\big(w \otimes w^{-1}\big)^{-1},$$

comme annoncé. □

D'après cette proposition, $\mathrm{Sym}(A, \gamma_\rho) = (\mathrm{int}\, w)(\mathrm{Sym}(A, \gamma_\sigma))$ et donc, en notant $T(w)$ l'automorphisme de l'algèbre $T(\underline{A})$ induit par l'application linéaire $\mathrm{int}\, w$ sur $\underline{A}$, $J_1(A, \rho) = T(w)(J_1(A, \sigma))$: en effet, si $s \in \mathrm{Sym}(A, \gamma_\sigma)$, alors $T(w)(s - \frac{1}{2}\,\mathrm{Trd}\, s) = wsw^{-1} - \frac{1}{2}\,\mathrm{Trd}(wsw^{-1})$.

Remarquons maintenant que $\tilde{\sigma} = (\mathrm{int}\, a_\sigma) \circ \sigma$ et $\tilde{\rho} = (\mathrm{int}\, a_\rho) \circ \rho = (\mathrm{int}\, w) \circ \tilde{\sigma} \circ (\mathrm{int}\, w)^{-1}$. On peut donc appliquer le (3) du lemme précédent aux antiautomorphismes $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{\rho}$. Ainsi

$$\gamma_{\tilde{\rho},2} \circ \big(\mathrm{int}\, w \otimes w^{-1}\big) = \big(\mathrm{int}\, w \otimes w^{-1}\big) \circ \gamma_{\tilde{\sigma},2},$$

ce qui redonne pour les éléments symétriques $\mathrm{Sym}(\underline{A} \otimes \underline{A}, \gamma_{\tilde{\rho},2}) = (\mathrm{int}\, w \otimes w^{-1})(\mathrm{Sym}(\underline{A} \otimes \underline{A}, \gamma_{\tilde{\sigma},2}))$. Il ne reste plus qu'à remarquer que $\mathrm{int}\, w \otimes w^{-1}$ est la restriction de $T(w)$ à $\underline{A} \otimes \underline{A}$ et que, sur $\underline{A} \otimes \underline{A}$, on a l'égalité

$$\mu_\rho \circ T(w) = T(w) \circ \mu_\sigma$$

d'après le lemme 2.4.

On en déduit que $J_2(A, \rho) = T(w)(J_2(A, \sigma))$, ce qui achève la démonstration du théorème. □

2.2. Le cas déployé

Théorème 2.5. *L'algèbre de Clifford est compatible à l'extension des scalaires : si L est une extension de F, alors $C(A_L, \sigma_L) = C(A, \sigma) \otimes L$. De plus, si A est déployée et si $\sigma = \sigma_b$, où b est une forme bilinéaire sur l'espace vectoriel V sur F, alors $C(A, \sigma)$ est la partie paire $C_0(V, b)$ de l'algèbre $C(V, b) = T(V)/\langle a_b(v) \otimes v - b(v, v), v \in V\rangle$.*

C'est cette deuxième partie du théorème qui justifie que l'on prenne dans la définition de J_2 les éléments symétriques pour $\gamma_{\tilde{\sigma},2}$ au lieu de prendre tout simplement ceux symétriques pour $\gamma_{\sigma,2}$: même si cette autre définition donnerait aussi, en utilisant la proposition 2.3, un invariant de la classe d'isomorphie de (A, σ), il ne serait pas en général dans le cas déployé la partie paire d'un quotient de $T(V)$.

Ce théorème conduit à la définition suivante :

Définition 2.6. Soit b une forme bilinéaire non dégénérée sur l'espace vectoriel V sur F. On appelle algèbre de clifford de b l'algèbre $C(V, b) = T(V)/\langle a_b(v) \otimes v - b(v, v), v \in V\rangle$.

Cette algèbre n'est en général pas du type de celles définie par Hannabuss dans [H], en particulier elles diffèrent dès que b est antisymétrique, ou plus généralement dès que l'asymétrie de b admet -1 comme valeur propre.

Démonstration du Théorème 2.5. La première assertion est claire. Montrons la deuxième : supposons que A est déployée, $A = \mathrm{End}_F V$ et $\sigma = \sigma_b$ où $b : V \times V \to F$ est bilinéaire non dégénérée. Pour simplifier, on oubliera ici d'indexer a, γ et φ par σ. Rappelons que φ est l'isomorphisme $V \otimes V \xrightarrow{\sim} \underline{A}$; $v \otimes w \mapsto (x \mapsto vb(w, x))$. Il induit un isomorphisme d'algèbres $T(\varphi) : T(V \otimes V) \xrightarrow{\sim} T(\underline{A})$. Nous devons alors calculer $T(\varphi)^{-1}(J_1)$ et $T(\varphi)^{-1}(J_2)$.

Pour calculer $T(\varphi)^{-1}(J_1)$, nous allons utiliser le lemme calculatoire suivant :

Lemme 2.7. *Soient $v, w \in V$. Alors*

$$\sigma \circ \varphi(v \otimes w) = \varphi\bigl(a(w) \otimes v\bigr), \ \varphi(v \otimes w) = \varphi\bigl(v \otimes a(w)\bigr) \circ a \text{ et } a \circ \varphi(v \otimes w) = \varphi\bigl(a(v) \otimes w\bigr),$$

dont on déduit que $\gamma \circ \varphi(a(v) \otimes w) = \varphi(a(w) \otimes v)$.

Démonstration. En effet, comme $\sigma = \sigma_b$, il vérifie $\forall f \in \mathrm{End}_L(V), \forall x, y \in V,\ b(f(x), y) = b(x, \sigma(f)(y))$. En particulier, si $f = \varphi(v \otimes w)$, alors pour $x, y \in V$,

$$\begin{aligned} b\bigl(x, \sigma\bigl(\varphi(v \otimes w)\bigr)(y)\bigr) &= b\bigl(\varphi(v \otimes w)(x), y\bigr) \\ &= b\bigl(vb(w, x), y\bigr) \\ &= b(v, y)b(w, x) \\ &= b\bigl(x, a(w)\bigr)b(v, y) \\ &= b\bigl(x, \varphi\bigl(a(w) \otimes v\bigr)(y)\bigr) \end{aligned}$$

d'où la première égalité. De même

$$\begin{aligned} b\bigl(\varphi\bigl(v\otimes a(w)\bigr)\circ a(x),y\bigr) &= b\bigl(vb\bigl(a(w),a(x)\bigr),y\bigr)\\ &= b(v,y)b\bigl(a(w),a(x)\bigr)\\ &= b(v,y)b(w,x)\\ &= b\bigl(\varphi(v\otimes w)(x),y\bigr) \end{aligned}$$

ce qui prouve la deuxième égalité. La troisième se montre de la même manière. On déduit de ces trois égalités que $\gamma\circ\varphi(a(v)\otimes w)=(\sigma\circ\varphi(a(v)\otimes w))\circ a=\varphi(a(w)\otimes a(v))\circ a=\varphi(a(w)\otimes v)$, ce qui achève la preuve du lemme.

Soit maintenant $f\in \operatorname{End}V$, elle est symétrique pour γ si et seulement si $f=\frac{1}{2}(f+\gamma(f))$. Écrivons f comme l'image par φ d'une combinaison linéaire de tenseurs élémentaires :

$$f=\varphi\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a(v_i)\otimes w_i\right).$$

Alors d'après le lemme

$$f+\gamma(f)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\bigl(\varphi\bigl(a(v_i)\otimes w_i\bigr)+\varphi\bigl(a(w_i)\otimes v_i\bigr)\bigr).$$

On en déduit que $f\in \operatorname{Sym}(A,\gamma)$ si et seulement si elle est combinaison linéaire de termes de la forme $\varphi(a(v)\otimes w)+\varphi(a(w)\otimes v)$. Or ceci n'est autre que $\varphi(a(v+w)\otimes(v+w))-\varphi(a(v)\otimes v)-\varphi(a(w)\otimes w)$. Ainsi f est symétrique si et seulement si $\varphi^{-1}(f)$ est combinaison linéaire d'éléments du type $a(w)\otimes w$ avec $w\in V$. De plus, si $v,w\in V$, $\varphi(v\otimes w)$ a pour trace $b(w,v)=b(v,a(w))$, donc $\operatorname{Trd}(\varphi(a(w)\otimes w))=b(a(w),a(w))=b(w,w)$. Ainsi $T(\varphi)^{-1}(J_1)$ est l'idéal $I=\langle a(w)\otimes w-\frac{1}{2}b(w,w),\ w\in V\rangle$.

Pour déterminer $T(\varphi)^{-1}(J_2)$, nous utiliserons encore un lemme calculatoire :

Lemme 2.8. *Soient $y,z,v,w,s,t\in V$. Alors*

$$\bigl(\operatorname{Sand}\bigl(\varphi(v\otimes w)\otimes\varphi(s\otimes t)\bigr)\bigr)\bigl(\varphi(z\otimes y)\bigr)=\bigl(\operatorname{Sand}\bigl(\varphi\bigl(v\otimes a^{-1}(s)\bigr)\otimes\varphi\bigl(a(w)\otimes t\bigr)\bigr)\bigr)\bigl(\varphi(y\otimes z)\bigr)$$

et

$$\gamma_{\tilde\sigma,2}\bigl(\varphi(v\otimes w)\otimes\varphi(s\otimes t)\bigr)=\varphi\bigl(v\otimes a(s)\bigr)\otimes\varphi\bigl(a^{-1}(w)\otimes t\bigr).$$

Démonstration. En effet, si de plus $x\in V$, alors

$$\begin{aligned} \bigl(\operatorname{Sand}\bigl(\varphi(v\otimes w)\otimes\varphi(s\otimes t)\bigr)\bigr)\bigl(\varphi(z\otimes y)\bigr)(x) &= \varphi(v\otimes w)\circ\varphi(z\otimes y)\circ\varphi(s\otimes t)(x)\\ &= vb(w,z)b(y,s)b(t,x)\\ &= vb\bigl(a^{-1}(s),y\bigr)b\bigl(z,a(w)\bigr)b(t,x)\\ &= \varphi\bigl(v\otimes a^{-1}(s)\bigr)\circ\varphi(y\otimes z)\circ\varphi\bigl(a(w)\otimes t\bigr)(x) \end{aligned}$$

d'où la première égalité. Alors si $u \in A \otimes A^{op}$, $\gamma_{\tilde{\sigma},2}(u)$ est défini par : si $y, z \in V$,

$$\begin{aligned}\operatorname{Sand}\bigl(\gamma_{\tilde{\sigma},2}(u)\bigr)\bigl(\varphi(y \otimes z)\bigr) &= (\operatorname{Sand} u)\bigl(\gamma_{\tilde{\sigma}}\bigl(\varphi(y \otimes z)\bigr)\bigr)\\ &= (\operatorname{Sand} u)\bigl(a.(\sigma \circ \varphi)(y \otimes z).a^2\bigr)\\ &= (\operatorname{Sand} u)\bigl(\bigl(a.\varphi\bigl(a(z) \otimes y\bigr).a^2\bigr)\bigr)\\ &= (\operatorname{Sand} u)\bigl(\bigl(a^2.\varphi(z \otimes y).a^2\bigr)\bigr)\\ &= \bigl(\operatorname{Sand}\bigl(u.a^2 \otimes a^2\bigr)\bigr)\bigl(\varphi(z \otimes y)\bigr)\end{aligned}$$

d'après le lemme 2.7. Si de plus $u = \varphi(v \otimes w) \otimes \varphi(s \otimes t)$, toujours d'après ce lemme,

$$\begin{aligned}\bigl(\operatorname{Sand} \gamma_{\tilde{\sigma},2}(u)\bigr)\varphi(y, z) &= \bigl(\operatorname{Sand}\bigl(\varphi(v \otimes w)a^2 \otimes a^2\varphi(s \otimes t)\bigr)\bigr)\bigl(\varphi(z \otimes y)\bigr)\\ &= \bigl(\operatorname{Sand}\bigl(\varphi\bigl(v \otimes a^{-2}(w)\bigr) \otimes \varphi\bigl(a^2(s) \otimes t\bigr)\bigr)\bigr)\bigl(\varphi(z \otimes y)\bigr)\\ &= \bigl(\operatorname{Sand}\bigl(\varphi\bigl(v \otimes a(s)\bigr) \otimes \varphi\bigl(a^{-1}(w) \otimes t\bigr)\bigr)\bigr)\bigl(\varphi(y \otimes z)\bigr)\end{aligned}$$

en utilisant la première égalité. D'où le résultat. □

Un élément

$$u = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} \lambda_{ijkl}\varphi\bigl(e_i \otimes a(e_j)\bigr) \otimes \varphi\bigl(e_k \otimes a(e_l)\bigr) \in \underline{A} \otimes \underline{A}$$

est donc symétrique pour $\gamma_{\tilde{\sigma},2}$ si et seulement si

$$\forall i, l \in \{1, \dots, n\} \sum_{j,k=1}^{n} \lambda_{ijkl} a(e_k) \otimes e_j = \sum_{j,k=1}^{n} \lambda_{ijkl} a(e_j) \otimes e_k,$$

c'est-à-dire, en appliquant $1 \otimes a$, si et seulement si les vecteurs

$$\sum_{j,k=1}^{n} \lambda_{ijkl} a(e_j) \otimes e_k,$$

sont tous symétriques pour γ. On en déduit que $u \in \operatorname{Sym}(\underline{A} \otimes \underline{A}, \gamma_{\tilde{\sigma},2})$ si et seulement si $T(\varphi)^{-1}(u)$ est combinaison linéaire de tenseurs de la forme $(v \otimes a(s)) \otimes (s \otimes t)$ avec v, s et $t \in V$.

Or, pour $u = \varphi(v \otimes a(s)) \otimes \varphi(s \otimes t)$ et $x \in V$,

$$\begin{aligned}\mu_\sigma(u)(x) &= \bigl((\operatorname{Sand} u)(a)\bigr)(x) = \bigl(\varphi\bigl(v \otimes a(s)\bigr) \circ a \circ \varphi(s \otimes t)\bigr)(x)\\ &= \bigl(\varphi\bigl(v \otimes a(s)\bigr) \circ \varphi\bigl(a(s) \otimes t\bigr)\bigr)(x) = v.b\bigl(a(s), a(s)\bigr).b(t, x)\\ &= v.b(s, s).b(t, x) = \varphi\bigl(b(s, s)(v \otimes t)\bigr)(x).\end{aligned}$$

Donc $T(\varphi)^{-1}(J_2) = \langle v \otimes a(s) \otimes s \otimes t - \frac{1}{2}b(s,s)v \otimes t,\ v,s,t \in V\rangle$. Ceci achève de démontrer le résultat, quitte à prendre la forme similaire $\frac{1}{2}b$ à la place de b. □

2.3. Dimension finie de l'algèbre de Clifford

Théorème 2.9. *L'algèbre de Clifford d'une forme bilinéaire non dégénérée sur un espace vectoriel V est de dimension finie inférieure ou égale à $2^{\dim V}$.*

L'algèbre de Clifford d'un antiautomorphisme d'une algèbre centrale simple A est de dimension finie inférieure ou égale à $2^{\deg A} - 1$.

Démonstration. D'après le théorème 2.5, quitte à étendre les scalaires ce qui ne change pas la dimension, il suffit de montrer la première partie de l'énoncé, et on peut se limiter à une forme bilinéaire non dégénérée b sur un corps algébriquement clos. Ainsi, on se ramène au cas où l'asymétrie de b est trigonalisable sur le corps de base F. Plaçons nous alors dans une base $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ de V dans laquelle la matrice de $a = a_b$ est la matrice triangulaire supérieure $(\alpha_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$. Notons (b_{ij}) la matrice de la forme b dans cette base.

Alors $C(V,b) = T(V)/I$ où I est l'idéal engendré par les éléments $a(e_i) \otimes e_i - b_{ii}$ pour $i \in \{1,\dots,n\}$ et $a(e_i) \otimes e_j + a(e_j) \otimes e_i - b_{ij} - b_{ji}$ pour $i,j \in \{1,\dots,n\}$ tels que $i < j$.

En notant $u \times v$ le produit dans $C(V,b)$ des classes des éléments $u, v \in V$, on obtient ainsi si i, j sont comme ci-dessus :

$$\sum_{k=1}^{i} \alpha_{ki} e_k \times e_i = b_{ii} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{i} \alpha_{ki} e_k \times e_j + \sum_{l=1}^{j} \alpha_{lj} e_l \times e_i = b_{ij} + b_{ji}.$$

Or a est inversible donc les α_{ii} sont tous non nuls, ce qui permet d'écrire

$$e_i \times e_i = \frac{b_{ii}}{\alpha_{ii}} - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\alpha_{ki}}{\alpha_{ii}} e_k \times e_i \quad \text{et} \quad e_j \times e_i = \frac{b_{ij} + b_{ji}}{\alpha_{jj}} - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\alpha_{lj}}{\alpha_{jj}} e_l \times e_i - \sum_{k=1}^{i} \frac{\alpha_{ki}}{\alpha_{jj}} e_k \times e_j.$$

Cette dernière égalité signifie que si $i < j$, alors $e_j \times e_i$ est combinaison linéaire de 1, des $e_l \times e_i$ pour $l < j$ et des $e_k \times e_j$ pour $k \leqslant i < j$. En appliquant alors successivement ce résultat à chacun des $e_l \times e_i$ pour $i < l < j$, on prouve que $e_j \times e_i$ est combinaison linéaire de 1 et des $e_k \times e_l$ pour $k \leqslant i \leqslant l \leqslant j$: nous appellerons cela des formules de commutation.

Revenons alors à la première égalité. Elle implique que $e_i \times e_i$ est combinaison linéaire de 1 et des $e_k \times e_i$ pour $k < i$. Donc finalement, si $i_1, \dots, i_k \in \{1,\dots,n\}$, le produit $e_{i_1} \times \cdots \times e_{i_k}$ dans $C(V,b)$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de 1 et des produits $e_{j_1} \times \cdots \times e_{j_l}$ pour tous les l-uplets $j_1, \dots, j_l \in \{1,\dots,n\}$ satisfaisant $j_1 < j_2 < \cdots < j_l$ (et l de même parité que k) : si r est le plus grand indice tel que $i_r > i_{r+1}$, on pousse e_{i_r} successivement vers la droite en utilisant les formules de commutation. On recommence pour les indices plus petits si nécéssaire.

Ainsi 1 et les $e_{j_1} \times \cdots \times e_{j_l}$ pour $j_1 < j_2 < \cdots < j_l$ forment une famille génératrice de l'algèbre de Clifford. □

3. Calculs explicites en degré 2

Calculer $C(A,\sigma)$ est difficile en général, même pour une involution. Je n'effectue ici les calculs que pour le plus bas degré possible pour montrer :

Proposition 3.1. *Si* $\deg A = 2$*, alors* $C(A,\sigma) \simeq F[X]/(X^2 - \operatorname{Nrd}(a_\sigma + 1)\operatorname{disc}(\sigma))$ *et donc en particulier, si* $a_\sigma - 1 \in A^\times$*, alors* $C(A,\sigma) \simeq F[X]/(X^2 - \operatorname{Nrd}(a_\sigma^2 - 1))$.

Bien sûr si σ est une involution de type orthogonal, $a_\sigma = 1$ et on retrouve le cas particulier du théorème 1.4 : $C(A,\sigma) \simeq F[X]/(X^2 - \operatorname{disc}(\sigma))$.

La preuve se fait au cas par cas. On étudie d'abord le cas où A est déployée en utilisant les formes possibles de a_σ. Si A est une algèbre de quaternions, on utilise le fait que $\sigma = (\operatorname{int} u) \circ \rho$, pour $u \in A^\times$ et ρ l'involution canonique sur A et on exprime les calculs en fonction de u.

3.1. Le cas déployé

On suppose ici que $A = \operatorname{End} V$ et que l'antiautomorphisme $\sigma = \sigma_b$, d'asymétrie $a_\sigma = a$, est adjoint à la forme bilinéaire $b : V \times V \to F$ non dégénérée sur $V = F^2$. Dans [CT, Théorème 1], on donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que $a \in A^\times$ soit une asymétrie. En particulier, il est nécessaire que a soit conjugué à son inverse. Donc si λ est valeur propre de a, alors λ^{-1} est aussi valeur propre de a. Ainsi, pour toute asymétrie a, il existe une base (i, j) de V dans laquelle a a une matrice de l'une des formes suivantes :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ou une matrice non trigonalisable. Parmi elles, seules les matrices $\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ et certaines non trigonalisables vérifient les autres conditions nécessaires (avec les notations de [CT], pour $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, V_2^1 est de dimension paire, et pour $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, V_1^{-1} est de dimension impaire, donc ce ne sont pas des asymétries). Il reste donc trois cas à étudier.

On note ici I l'idéal de $T(V)$ engendré par les éléments du type $a(w) \otimes w - b(w,w)$ pour $w \in V$.

Premier cas. Si a a pour matrice $\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{smallmatrix}\right)$ dans la base (i, j), supposons tout d'abord $\lambda = 1$. Alors b est bilinéaire symétrique et c'est le cas classique. Supposons maintenant $\lambda \neq 1$. Alors, comme, pour tous $x, y \in V$, $b(x,y) = b(y, a(x))$, on montre que la matrice de b dans (i, j) est, à un facteur multiplicatif près, la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \lambda^{-1} & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

L'idéal I contient ainsi les trois éléments

$$\begin{gathered} a(i) \otimes i - b(i,i) = \lambda i \otimes i, \\ a(j) \otimes j - b(j,j) = \lambda^{-1} j \otimes j \quad \text{et} \\ a(i) \otimes j + a(j) \otimes i - b(i,j) - b(j,i) = \lambda i \otimes j + \lambda^{-1} j \otimes i - \bigl(1 + \lambda^{-1}\bigr). \end{gathered}$$

Donc la partie paire de $T(V)/I$ est engendrée par $i \times j$, et comme dans le quotient $j \times i = (\lambda + 1) - \lambda^2 (i \times j)$, on en déduit que $(i \times j)^2 = (\lambda + 1)(i \times j)$ et donc

$$C(A,\sigma) = F[X]/\bigl(X\bigl(X - (1 + \lambda)\bigr)\bigr)$$

qui est isomorphe à F^2 si $\lambda \neq -1$ et à $F[X]/(X^2)$ si $\lambda = -1$.

Or $\operatorname{disc} \sigma = -\det b = \lambda^{-1}$ et $\operatorname{Nrd}(a + 1) = (\lambda + 1)(\lambda^{-1} + 1)$, donc $\operatorname{Nrd}(a + 1)\operatorname{disc}(\sigma) = 0$ si $\lambda = -1$ et appartient à $(F^\times)^2$ si $\lambda \neq -1$. D'où le résultat.

Deuxième cas. Si a a pour matrice $\left(\begin{smallmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)$ dans la base (i,j), la matrice de b dans (i,j) est (à un facteur près) la matrice $\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ -1 & -1/2\end{smallmatrix}\right)$.

L'idéal I contient ainsi $-i\otimes i$, $-j\otimes j+\frac{1}{2}$ et $-i\otimes j-j\otimes i+i\otimes i-1+1$. On en déduit que $C(A,\sigma)$ est engendré par $i\times j$, que dans $T(V)/I$, $j\times i=-i\times j$ et donc que $(i\times j)^2=0$. D'où $C(A,\sigma)=F[X]/(X^2)$, ce qui est le résultat attendu car $\mathrm{Nrd}(a+1)=0$.

Troisième cas. Si a n'a pas de valeur propre sur F. Alors sur la clôture algébrique de F, elle a deux valeurs propres distinctes inverses l'une de l'autre λ et λ^{-1}. Notons $\alpha=\lambda+\lambda^{-1}$. Alors le polynôme minimal de a est $P=(X-\lambda)(X-\lambda^{-1})=X^2-\alpha X+1=\det(X-a)$. En particulier,

$$\mathrm{Nrd}(a+1)=\det(a+1)=P(-1)=2+\alpha \quad \text{et}$$
$$\mathrm{disc}(\sigma)=-\mathrm{Nrd}(1-a)=-P(1)=-2+\alpha.$$

Finalement $\mathrm{disc}(\sigma)\,\mathrm{Nrd}(a+1)=-4+\alpha^2$ est le discriminant de P, et ainsi

$$F[X]/(P)=F[X]/\big(X^2-\mathrm{disc}\,\sigma\,\mathrm{Nrd}(a+1)\big).$$

De plus, P étant irréductible sur F, il existe une base (i,j) de V dans laquelle la matrice de a est la matrice compagnon $\left(\begin{smallmatrix}0 & -1\\ 1 & \alpha\end{smallmatrix}\right)$ de P. On en déduit que la matrice de b est $\left(\begin{smallmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)$ à un facteur multiplicatif près.

L'idéal I contient alors $j\otimes i-1$, $-i\otimes j+\alpha j\otimes j-1$ et $j\otimes j-i\otimes i+\alpha j\otimes i-1-(\alpha-1)$, donc aussi $j\otimes j-i\otimes i$. On en déduit que $C(A,\sigma)$ est engendrée par $j\times j$, que dans $T(V)/I$,

$$j\times j=i\times i,\quad i\times j=\alpha j\times j-1\quad \text{et } j\times i=1$$

et donc que

$$(j\times j)^2=(j\times i)\times(i\times j)=i\times j=\alpha j\times j-1.$$

Ainsi $j\times j$ a pour polynôme minimal P et $C(A,\sigma)=F[X]/(P)$. Ceci achève la preuve dans le cas déployé.

3.2. *Pour une algèbre de quaternions*

Soit $A=(\alpha,\beta)_F$ une algèbre de quaternions sur F, dans laquelle on note $(1_A,i,j,k)$ la base usuelle (telle que $i^2=\alpha$, $j^2=\beta$ et $ij=-ji=k$). Soit ρ l'involution canonique (de type symplectique), $\rho: A\to A$; $q=x+yi+zj+tk\mapsto x-yi-zj-tk$.

Rappellons que d'après le théorème de Skolem–Noether, si σ est un antiautomorphisme de A, il existe $u\in A^\times$ tel que $\sigma=\mathrm{int}\,u\circ\rho$. D'après [CT, proposition 7], et puisque $a_\rho=-1$, cela donne $a_\sigma=u\rho(u)^{-1}a_r=-u\rho(u)^{-1}$.

Notons enfin que si $q\in A$ alors $\mathrm{Trd}\,q$ est la coordonnée de $q+\rho(q)$ sur 1_A.

Afin d'éviter des lourdeurs de notations, le neutre 1_A de l'algèbre A est noté 1 quand il n'y a pas de confusion possible. Il faut cependant noter que cet élement $1_A\in A=\underline{A}^{\otimes 1}$ n'est pas le neutre de l'algèbre tensorielle $T(\underline{A})$: ce neutre est le neutre 1_F de $F=\underline{A}^{\otimes 0}$.

Nous distinguons trois cas.

Premier cas. Si σ est une involution orthogonale, il est connu que $C(A,\sigma)=F(u)$. Or $1=a_\sigma$ donc u est un quaternion pur, et quitte à changer de base, on peut supposer que $u=i$ et donc que

$\sigma(q) = x - yi + zj + tk$. Ainsi, $C(A,\sigma) = F(i) = F[X]/(X^2 - \alpha)$, et comme $i \in \mathrm{Skew}(A, \gamma_\sigma) \cap A^\times$, $\mathrm{Nrd}(a_\sigma + 1)\operatorname{disc}\sigma = -\mathrm{Nrd}\,2\,\mathrm{Nrd}\,i = 4\alpha$, on obtient le résultat souhaité.

Deuxième cas. Si $\sigma = \rho$ (la seule involution symplectique).

Comme $\gamma_\rho(q) = -\rho(q)$, $q \in A$ est symétrique pour γ_ρ si et seulement si sa trace est nulle et J_1 est engendré par les quaternions purs, c'est-à-dire par i, j, k.

De plus

$$\begin{aligned} s \in \mathrm{Sym}(\underline{A} \otimes \underline{A}, \gamma_{\tilde\rho,2}) &\Leftrightarrow \forall q \in A\ \ \mathrm{Sand}\, s\bigl(-\rho(q)\bigr) = \mathrm{Sand}\, s(q) \\ &\Leftrightarrow \forall q \in A\ \ \mathrm{Sand}\, s\bigl(q + \rho(q)\bigr) = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Sand}\, s(1) = \mu(s) = 0. \end{aligned}$$

De plus $\mu = -\mu_\sigma$, donc J_2 est engendré par les $s + \frac{1}{2}\mu(s)$ pour $\mu(s) = 0$, et n'est autre que l'idéal engendré par $\ker\mu$.

Ainsi l'algèbre $C(A,\rho) = T(\underline{A})/(J_1 + J_2)$ est engendrée par 1_A, et comme

$$\mu(\alpha\beta 1_A \otimes 1_A + k \otimes k) = \alpha\beta 1_A.1_A + k.k = 0,$$

on obtient $1_A^2 = 0$ dans $C(A,\rho)$. Ceci signifie que cette algèbre est exactement

$$C(A,\rho) = F[X]/\bigl(X^2\bigr) = F[X]/\bigl(X^2 - \mathrm{Nrd}(a+1)\operatorname{disc}\rho\bigr).$$

Troisième cas. Si maintenant σ n'est pas involutive, c'est-à-dire si $a_\sigma \neq \pm 1$, alors u n'est ni un scalaire, ni un quaternion pur. Donc u est de la forme $\lambda(1 + i_0)$ où i_0 est un quaternion pur. Ainsi $\mathrm{int}\,u = \mathrm{int}(1 + i_0)$ et on peut donc se ramener à une base $(1_A, i, j, k)$ de A telle que $u = 1 + i$.

Remarquons que l'on peut écrire tout élément de A de manière unique sous la forme $q = v + wj$ avec $v, w \in F(i)$, et que ce sous-corps commutatif $F(i)$ de A est stable par ρ et σ et contient u et donc aussi a_σ. De plus si $v \in F(i)$ alors $vj = j\rho(v)$.

Nous pouvons maintenant écrire :

$$\begin{aligned} a_\sigma &= -u\rho(u)^{-1} = -\frac{1+i}{1-i}, \\ \gamma_\sigma(q) &= \sigma(q)a_\sigma = -(1+i)\rho(q)(1+i)^{-1}\frac{1+i}{1-i} = -(1+i)\rho(q)(1-i)^{-1} \quad \text{et} \\ \gamma_{\tilde\sigma}(q) &= a_\sigma\sigma(q)a_\sigma^2 = -\frac{(1+i)^2}{1-i}\rho(q)\frac{1+i}{(1-i)^2}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire si $q = x + yi + zj + tk = (x + yi) + (z + ti)j$, alors

$$\gamma_\sigma(q) = (-x + yi)\frac{1+i}{1-i} + (z + ti)j \quad \text{et} \quad \gamma_{\tilde\sigma}(q) = (-x + yi)\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 + (z + ti)j.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
&\gamma_\sigma(q) = q \\
&\quad \Leftrightarrow (-x+yi)(1+i) = (x+yi)(1-i) \\
&\quad \Leftrightarrow x = \alpha y.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{Sym}(a, \gamma_\sigma) = \langle \alpha 1_A + i, j, k\rangle$ et donc

$$J_1 = \left\langle \alpha 1_A + i - \frac{1}{2}\operatorname{Trd}(\alpha 1_A + i), j - \frac{1}{2}\operatorname{Trd} j, k - \frac{1}{2}\operatorname{Trd} k \right\rangle = \big\langle i + \alpha(1_A - 1_F), j, k\big\rangle.$$

De plus

$$\begin{aligned}
&\gamma_{\tilde\sigma}(q) = -q \\
&\quad \Leftrightarrow z = t = 0 \text{ et } (-x+yi)\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 = -x - yi \\
&\quad \Leftrightarrow z = t = 0 \text{ et } y(1+3\alpha) = x(\alpha+3).
\end{aligned}$$

Alors comme $1 + 3\alpha$ et $\alpha + 3$ ne sont pas conjointement nuls, $\mathrm{Skew}(A, \gamma_{\tilde\sigma})$ est un sous espace vectoriel de A de dimension 1. Or il contient $(1+i)^3$, qui en est donc un générateur.

Mais $s \in \mathrm{Sym}(A, \gamma_{\tilde\sigma,2}) \Leftrightarrow \forall x \in A\ (\operatorname{Sand} s)(\gamma_{\tilde\sigma}(x) - x) = 0$, et comme $\gamma_{\tilde\sigma}$ est une une application linéaire involutive, cela équivaut encore à $\forall x \in \mathrm{Skew}(A, \gamma_{\tilde\sigma})\ (\operatorname{Sand} s)(x) = 0$ et donc à

$$(\operatorname{Sand} s)(1+i)^3 = 0.$$

Finalement, dans $C(A,\sigma)$, $j = k = 0$ et $i = \alpha(1_F - 1_A)$, ce qui signifie que $C(A,\sigma)$ est engendrée par 1_A (ou par i). Mais comme 1_A et i commutent dans A avec $1 + i$ et donc avec $(1+i)^3$ et a, on obtient

$$\begin{gathered}
\big(\operatorname{Sand}(\alpha 1_A \otimes 1_A - i \otimes i)\big)(1+i)^3 = \alpha(1+i)^3 - i^2(1+i)^3 = 0 \quad \text{et} \\
\mu_\sigma(\alpha 1_A \otimes 1_A - i \otimes i) = -\alpha a + i^2 a = 0.
\end{gathered}$$

On en déduit que l'élément $\alpha 1_A \otimes 1_A - i \otimes i - \frac{1}{2}\mu_\sigma(\alpha 1_A \otimes 1_A - i \otimes i)$ est dans J_2 et donc que dans $C(A,\sigma)$,

$$\alpha 1_A \times 1_A = i \times i = \big(\alpha(1_F - 1_A)\big)^2.$$

Ceci prouve que 1_A a pour polynôme minimal $(\alpha - 1)X^2 - 2\alpha X + \alpha$, dont le discriminant modulo les carrés est α, d'où

$$C(A,\sigma) = F[X]/\big(X^2 - \alpha\big)$$

(et est isomorphe, comme dans le cas d'une involution orthogonale au sous-corps $F(u)$ de A).

De plus, ici $a_\sigma - 1 \neq 0$ donc $\operatorname{disc}\sigma = -\operatorname{Nrd}(a_\sigma - 1)$ et ainsi

$$\operatorname{disc}\sigma \operatorname{Nrd}(a_\sigma + 1) = -\operatorname{Nrd}\big(a_\sigma^2 - 1\big) = \operatorname{Nrd}\left(\frac{4i}{(1-i)^2}\right) = \alpha$$

dans $F^{\times}/F^{\times 2}$, ce qui achève la démonstration.

Remerciements

Je remercie chaleureusement Anne Queguiner-Mathieu pour ses remarques et conseils judicieux sur ce travail et pour l'intérêt qu'elle y a porté.

Références

[CT] A. Cortella, J.-P. Tignol, The asymetry of an anti-automorphism, J. Pure Appl. Algebra 167 (2002) 175–193.

[H] K.C. Hannabuss, Bilinear forms, Clifford algebras, q-commutation relations, and quantum groups, J. Algebra 228 (2000) 227–256.

[J] N. Jacobson, Clifford algebra for algebras with involution of type D, J. Algebra 1 (1964) 288–300.

[BOI] M.-A. Knus, A.S. Merkurjev, M. Rost, J.-P. Tignol, The Book of Involutions, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 44, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[KPS] M.-A. Knus, Parimala, Sridharan, On the discriminant of an involution, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 43 (1–2) (1991) 89–98.

Pour en savoir plus

[A] A.A. Albert, Structure of Algebras, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 24, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1939.

[L1] D.W. Lewis, Involutions and antiautomorphisms of central simple algebras, J. Pure Appl. Algebra 182 (2003) 253–261.

[L2] D.W. Lewis, Antiautomorphisms of the second kind, in: Contemp. Math., vol. 344, 2004, pp. 257–264.

[R] C. Riehm, The equivalence of bilinear forms, J. Algebra 31 (1974) 45–66.

[S] D.J. Saltman, Azumaya algebras with involution, J. Algebra 52 (1978) 526–539.

[TAO] D. Tao, The generalized even Clifford algebra, J. Algebra 172 (1994) 184–204.

[TI] J. Tits, Formes quadratiques, groupes orthogonaux, et algèbres de Clifford, Invent. Math. 5 (1968) 19–41.