LE PRINCIPE DE HASSE POUR LES SIMILITUDES DE FORMES QUADRATIQUES ET HERMITIENNES.

par Anne Cortella

Ce chapitre donne une démonstration plus conceptuelle du théorème démontré par Ono [3]. On utilise, après les avoir redémontrés de manière plus simple, des résultats de Dieudonné [1] sur les multiplicateurs de similitude.

Le paragraphe 1 donnera la structure du groupe des multiplicateurs de similitude pour les formes quadratiques puis pour les formes hermitiennes.

Le paragraphe 2 sera consacré à la démonstration du théorème de Ono : le principe de Hasse vaut pour les similitudes de formes quadratiques sur les corps de nombres. On montre aussi le principe de Hasse pour les formes hermitiennes.

1. Cadre et notations

V désigne un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps K de caractéristique différente de 2.

$f : V \times V \to K$ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur K (ou une forme hermitienne non dégénérée relative à l'involution $^-$: $K \to K$ de corps fixe K_0).

Un isomorphisme $u : V \to V$ est une similitude s'il existe

$$\lambda \in K^* \text{ tel que : } \forall\ x, y \in V\ f(u(x), u(y)) = \lambda f(x, y).$$

λ est alors le multiplicateur, ou facteur, de la similitude u.

On note :

$O_n(f)$ (resp. $U_n(f)$) le groupe algébrique orthogonal (unitaire);

$GO_n(f)$ ($GU_n(f)$) le groupe algébrique des similitudes,

$MS_n(f)$ le groupe algébrique des multiplicateurs de similitude.

On les notera O_n , U_n , GO_n , GU_n et MS_n quand f ne porte pas à confusion.

On a alors la suite exacte :

$$1 \to O_n(K, f) \to GO_n(K, f) \to MS_n(K, f) \to 1.$$

Ou si f est hermitienne :

$$1 \to U_n(K, f) \to GU_n(K, f) \to MS_n(K, f) \to 1.$$

Dans le 1, K est un corps quelconque de $car \neq 2$, le cas des corps de nombres sera étudié en particulier. Dans le 2, K est exclusivement un corps de nombres. Ses complétés sont notés $K_v, v \in \Sigma$ l'ensemble des places de K. S est l'ensemble des places réelles de K.

Si $x \in K$, en considérant $K \subset K_v$, on notera x_v l'élément de K_v correspondant (pour bien distinguer le travail dans K ou dans K_v).

2. Structure du groupe des multiplicateurs de similitude

2.1. Pour les formes quadratiques.

<u>Lemme 1</u> : *Si* $n = \dim \mathrm{V}$ *est impair alors* $MS_n(K, f) = K^{*2}$.

<u>Preuve</u> : Soit $u \in GO_n(K, f)$ de facteur λ, alors $\forall\ x, y \in E \quad f(u(x), u(y)) = \lambda f(x, y)$;

soit sur les matrices F et U correspondantes : ${}^tUFU = \lambda F$ et $\det U^2 \det F = \lambda^n \det F$. On a donc

$$\lambda^n = \det \mathrm{U}^2.$$

Si n est impair cela implique $\lambda \in K^{*2}$.

Réciproquement si $\lambda = \mu^2,\ u(x) = \mu x$ définit $u \in GO_n$ de facteur λ.

On supposera dans la suite dim $E = n = 2m$ *paire.*

<u>Notations</u> : $f : V \times V \to K$ de dim n. On note :

$\Delta = \det \mathrm{f} \in \mathrm{K}^*/\mathrm{K}^{*2}$;

$d = d(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Delta \in K^*/K^{*2}$ le discriminant de f ;

Si f se met sous la forme diagonale :

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix} \text{ dans une base de } V, \text{ on note}$$

$f \simeq \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$.

On définit alors l'invariant de Hasse de f :

$$s = s(f) = \prod_{i<j} (a_i, a_j) \in Br_2 K$$

où (a, b) est l'algèbre des quaternions associée à $a, b \in K^*$;
rappelons que $d(f)$ et $s(f)$ sont des invariants de la classe d'isomorphisme de f, indépendants de la diagonalisation choisie pour les définir.

<u>Lemme 2</u> : $\mu \in K^*, s(\mu f) = s(f)(\mu, (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Delta^{n-1})$.

<u>Preuve</u> : Si $f \simeq \langle a_1, \ldots, a_n\rangle \qquad \mu f \simeq \langle \mu a_1, \ldots, \mu a_n\rangle$ et

$$\begin{aligned} s(\mu f) &= \prod_{i<j}(\mu a_i, \mu a_j) = \prod_{i<j}(\mu,\mu)(\mu,a_j)(\mu,a_i)(a_i,a_j) \\ &= \prod_{i<j}(a_i,a_j)(\mu,-a_ia_j) \\ &= s(f)(\mu, \prod_{i<j}(-a_ia_j)) = s(f)(\mu,(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\Delta^{n-1}) \end{aligned}$$

<u>Corollaire</u> : *Si $n = 2m$ alors $s(\mu f) = s(f)(\mu, d)$.*

<u>Theoreme</u> : *Posons $K_1 = K(\sqrt{d})$ et soit $N = N_{K_1/K} : K_1 \to K$ la norme. Alors $MS_n(K, f) \subset N(K_1^*)$.*

<u>Preuve</u> : On a $(a, b) = 1 \iff a \in N(K(\sqrt{b})^*)$ pour $a, b \in K^*$
or $\mu \in MS_n(K) \iff f \simeq \mu f \Longrightarrow s(f) = s(\mu f)$.
Ce qui implique par 1.3 que $(\mu, d) = 1$ donc $\mu \in N(K_1^*)$.

<u>Cas des corps de nombres</u>

Supposons que K est un corps de nombres ; $v \in \Sigma$ une de ses places. Si $f : E \times E \to K$ est isomorphe à $\langle a_1 \ldots a_n\rangle, a_i \in K^*$, on note f_v la forme quadratique de même dimension sur K_v donnée par $f_v = \langle a_1 \ldots a_n\rangle$.

Notons S l'ensemble des places finies de K . D'après le théorème de Sylvester, si $v \in S$ on peut mettre f_v sous la forme $f_v \simeq \langle 1, 1, \ldots 1, -1, \ldots -1\rangle$. On définit la signature :
$\sigma_v(f) =$ (nombre de 1) $-$ (nombre de -1).

Rappelons le théorème :

<u>Théorème</u> (Hasse-Minkovski) [Sch, p. 224] : *Deux formes quadratiques f et f' sont isomorphes si et seulement si*

$$\left\{\begin{array}{lcll} dim\ f &=& dim\ f' & , \\ d(f) &=& d(f') & , \\ s(f) &=& s(f') & et \\ \sigma_v(f) &=& \sigma_v(f') & \forall\ v \in S. \end{array}\right.$$

on en déduit

Théorème (Dieudonné) : *Si f est de dimension $n = 2m$, $m \geq 1$, $MS_n(K, f)$ est le sous-groupe de $N(K(\sqrt{d})^*)$ formé des éléments μ tels que $\mu_v > 0 \; \forall \; v \in S$ où $\sigma_v(f) \neq 0$.*

Preuve : Notons $S_f = \{v \in S, \sigma_v(f) \neq 0\}$. On veut donc montrer : $MS_n(f) = \{\mu \in K^*, (\mu, d) = 1$ et $\mu_v > 0 \; \forall \; v \in S_f\}$.

Appliquons Hasse-Minkovski avec $f' = \mu f$.

Alors

$$\dim f' = \dim f, d(f') = d(f) \in K^*/K^{*2} \text{ car } \dim f \text{ paire}$$

$$s(f') = s(f) \Longleftrightarrow (\mu, d) = 1$$

$$\text{et } (\forall \; v \in S \;\; \sigma_v(f') = \sigma_v(f)) \Longleftrightarrow (\forall \; v \in S_f \;\; \mu_v > 0).$$

ce qui démontre le théorème.

Cas particulier : Si $K = \mathbb{Q}$ et $n = 2m$

$$MS_n(f) = \{\mu \in N(K(\sqrt{d})^*), \mu > 0\}.$$

Si m est impair tous les éléments de $N(K(\sqrt{d})^*)$ sont positifs

$$MS_n(f) = N(K(\sqrt{d})^*).$$

Cela ne donne rien de plus si m est pair.

Cas des corps $\mathfrak{p}-$adiques :

Il y a alors équivalence entre f et f' si et seulement si $\dim f = \dim f'$, $d(f) = d(f')$ et $s(f) = s(f')$. Donc $MS_n(f) = N(K(\sqrt{d})^*)$.
On se reportera a [1] pour un contre-exemple pour les corps valués non archimédiens.

2.2. **Pour les formes hermitiennes.**

K est un corps quelconque de caractéristique différente de 2 muni d'une involution non triviale $^- : K \to K$ de corps fixe K_0 , $[K : K_0] = 2$;
$f : V \times V \to K$ est une forme hermitienne de dim n.

$MS_n(K, f)$ est alors un sous-groupe de K_0^*.

On note $N = N_{K/K_0}$ la norme.

Lemme 1' : *Si n est impair $MS_n(K, f) = N(K^*)$.*

La preuve est analogue à celle du lemme 1.

Notation : On note $\det f \in K_0^*/N(K^*)$ le déterminant de f.

<u>Si K est un corps de nombres</u>

Soit S_0 l'ensemble des places réelles v de K_0 telles que $K_v = (K_0)_v \otimes K$ soit totalement imaginaire. $v \in S_0$ donne lieu a une signature : si $f \simeq \langle a, \dots, a_n \rangle,\ a_i \in K_0^*$, sur $K, \sigma_v(f)$ est la signature de la forme quadratique $\langle a_1 \dots a_n \rangle$ sur $K_{0,v}$.

<u>Théorème</u> (Landherr [Sch, p. 348]) : *Deux formes hermitiennes non dégénérées f et f' sur un corps de nombre K sont isomorphes si et seulement si :*
$dim\ f = dim\ f'$, $det\ f = det\ f'$ et $\forall\ v \in S_0\ \sigma_v(f) = \sigma_v(f')$.

On en déduit le théorème :

<u>Théorème</u> (Dieudonné) : *Si n est pair et $K = K_0(\sqrt{\delta})$ est un corps de nombres, alors $MS_n(K, f)$ est le sous-groupe de K_0^* des μ tels que $\mu_v > 0\ \forall\ v \in S_0$.*

<u>Preuve</u> : Les conditions sur la dimension et le déterminant sont toujours réalisées. Celles sur les σ_v le sont si et seulement si $\mu_v > 0\ \forall\ v \in S_0$.

<u>Si K est un corps $\mathfrak{p}-$adique</u>

Deux formes hermitiennes sont équivalentes si elles ont même dimension et même déterminant.

Donc $MS_{2m}(f) = K_0^*$.

3. Principe de Hasse pour les similitudes

3.1. Le diagramme commutatif pour les formes quadratiques.

K est dorénavant un corps de nombres. $\overline{K}$ une clôture algébrique de K , alors $MS_n(K^s, f) = K^{s*}$ pour toute forme quadratique f (tous les éléments de K^{s*} étant des carrés).

On a les suites exactes :

$$1 \to O_n(K, f) \to GO_n(K, f) \to MS_n(K, f) \to 1 \tag{1}$$

$$1 \to O_n(f) \to GO_n(f) \to \mathbb{G}_m \to 1 \tag{2}$$

(suite exacte de groupes algébriques , où $\mathbb{G}_m$ est le groupe multiplicatif).

De (2) on déduit la suite exacte de cohomologie :

$$1 \to O_n(K) \to GO_n(K) \to K^* \to H^1(K, O_n) \to H'(K, GO_n) \to H^1(K, \mathbb{G}_m)$$

or, d'après Hilbert 90, on a $H^1(K, \mathbb{G}_m) = 1$. Donc en combinant avec (1), on obtient :

$$1 \to K^*/MS_n(K) \to H^1(K, O_n) \to H^1(K, GO_n) \to 1 \tag{3}$$

La même chose est vraie en remplaçant K par chacun de ses complétes K_v pour les valuations v de K :

$$1 \to \prod_v K_v^*/MS_n(K_v) \to \prod_v H^1(K_v, O_n) \to \prod_v H^1(K_v, GO_n) \to 1.$$

De plus, on dispose d'applications naturelles d'ensembles pointés :

$\Psi : K^*/MS_n(K) \to \prod_v K_v^*/MS_n(K_v)$ issue des $K^* \hookrightarrow K_v^*$ étant donné que $MS_n(K) \hookrightarrow MS_n(K_v)$,

$\Phi : H^1(K, O_n) \to \prod_v H^1(K_v, O_n)$ et

$\varphi : H^1(K, GO_n) \to \prod_v H^1(K_v, GO_n)$
issues de la restriction sur chacune des composantes.

Ces applications forment un diagramme commutatif :

$$(\mathcal{D}) \qquad \begin{array}{ccccccc} 1 \to & K^*/MS_n(K) & \stackrel{\alpha}{\to} & H^1(K, O_n) & \stackrel{\beta}{\to} & H^1(K, GO_n) & \to 1 \\ & \downarrow \psi & & \downarrow \Phi & & \downarrow \varphi & \\ 1 \to & \prod_v K_v^*/MS_n(K_v) & \stackrel{\alpha'}{\to} & \prod_v H^1(K_v, O_n) & \stackrel{\beta'}{\to} & \prod_v H^1(K_v, GO_n) & \to 1 \end{array}$$

Ceci s'interprète de façon plus concrète si l'on considère la signification de ces ensembles H^1 en termes de classes d'équivalence ou de similitude de formes quadratiques :
d'après [**?**, p. 161], $H^1(K, O_n(\overline{K}))$ est l'ensemble pointé des classes d'isomorphisme de formes quadratiques de rang : $n =$ rang f sur K. De même $H^1(K, GO_n(\overline{K}))$ est l'ensemble des classes de similitude de ces mêmes formes quadratiques, le point base étant la classe de f.

β associe à la classe d'isomorphisme de q' sur K sa classe de similitude.

α associe à $\lambda \in K^*$ la classe de λf.

$q' \in$ ker β si et seulement si $q' \simeq \lambda f$ c'est-à-dire si et seulement si $q' = \alpha(\lambda)$, où λ est défini modulo $MS_n(K)$.

La deuxième ligne du diagramme a exactement les mêmes interprétations.

ψ est alors l'application naturelle $\lambda \mapsto (\lambda_v)_{v\in\Sigma}$ et Φ et φ sont celles : $[q'] \mapsto ([q'_v])_{v\in\Sigma}$, où $[\cdot]$ est alternativement la classe d'équivalence et celle de similitude et où q'_v est la forme quadratique sur K_v obtenue par extension des scalaires de K à K_v .

Le théorème de Hasse-Minkovski s'écrit alors :

Théorème : *ker* $\Phi = 1$.

3.2. **Le théorème de Ono.**

<u>Théorème</u> (Ono) : *Deux formes quadratiques sur K similaires sur tous les complétés de K sont similaires sur K lui-même.*

Il suffit en fait de montrer que pour une forme quadratique f fixée :

<u>Théorème</u> : $ker\ \varphi = 1$.

<u>Preuve</u> : Soit $x \in H^1(K, GO_n)$ tel que $\varphi(x) = 1$.
On a $x = \beta(y)$, $y \in H^1(K, O_n)$.
Alors $\Phi(y) = (y_v)_{v\in\Sigma}$ est dans le noyau de β' ,
donc $(y_v)_{v\in\Sigma} = \alpha'((z_v)_{v\in\Sigma})$ où $z_v \in K_v^*/MS_n(K_v)$.
On veut montrer que $(z_v)_{v\in\Sigma}$ est dans l'image de ψ : $(z_v)_v = \psi(z')$.
On aura alors $\beta \circ \alpha(z') = x = 1$.

En termes de formes quadratiques, y est la classe d'équivalence d'une forme q' et $q'_v \simeq z_v f_v$ pour toutes les places v de K.

Deux cas se présentent alors :

<u>Cas dim $f = n = 2m + 1$ impaire</u> (cas facile)

D'après le lemme 1 $\forall\ v \in \Sigma$ $MS_n(K_v) = K_v^{*2}$ et $MS_n(K) = K^{*2}$
$q'_v \underset{K_v}{\simeq} z_v f_v$ donc le discriminant de q'_v est :

$$d_v(q'_v) = z_v^n\ d_v(f_v) = z_v d_v(f_v) \text{ dans } K_v^*/K_v^{*2}.$$

d'où $z_v = d_v(q'_v)d_v(f_v)^{-1} = z'_v$ ou $z' = d(q')d(f)^{-1} \in K^*/K^{*2}$.
Ceci signifie que $\psi(z') = z_v$.

$(\mathcal{D})$ étant commutatif, $\alpha' \circ \psi(z') = y_v = \Phi \circ \alpha(z') = \Phi(y)$.
Or Φ est injectif donc $y = \alpha(z')$ et $\beta \circ \alpha(z') = x = 1$. On a fini.

<u>Cas dim $f = n = 2m$ paire</u> (cas difficile)

D'après le 1-a) :

$$MS_n(K) = \{x \in N(K(\sqrt{d})^*), x_v > 0 \text{ si } v \text{ réelle et } \sigma_v \neq 0\}$$

$$MS_n(K_v) = N(K_v(\sqrt{d})^*) \quad \text{si } v \text{ finie}$$

$$MS_n(K_v) = K_v^{*+} = \mathbb{R}^{*+} \quad \text{si } v \text{ réelle et } \sigma_v \neq 0,$$

$$MS_n(K_v) = K_v^* \text{ si } v \text{ réelle et } \sigma_v = 0, \text{ ou } v \text{ complexe.}$$

Remarquons que $z_v f_v$ et q'_v sont isomorphes sur K_v. Donc elles ont mêmes invariants : dimension, discriminant d_v et invariant de Hasse s_v.

Plus précisément : $d_v(q'_v) = d_v(z_v f_v) = z_v^{2m} d_v(f) = d_v(f)$ dans K_v^*/K_v^{*2} est automatique, tout comme dim $q'_v =$ dim $f_v =$ dim $z_v f_v$.

Mais on a aussi $s_v(q'_v) = s_v(z_v f_v) = (z_v, d_v)_v s_v(f_v)$ avec $d_v = d_v(f_v) = (d(f))_v$ (d'après le théorème de Hasse-Minkovski).

Or $s_v(q'_v) = (s(q'))_v = 1$ presque partout, ainsi que $s_v(f_v) = (s(f))_v$.
On obtient donc $(z_v, d_v)_v = 1$ presque partout.

De plus $\prod_v s_v(q'_v) = \prod_v (s(q'))_v = 1 = \prod_v s_v(f_v)$ donc $\prod_v (z_v, d_v)_v = 1$.

Or on dispose du théorème :

Théorème [OM th. 71 : 19] : *K un corps de nombres. $d \in K^*$ si $(z_v)_{v\in\Sigma}$ est une famille d'éléments de $(K_v^*)_{v\in\Sigma}$ vérifiant :*

(i) $(d_v, z_v)_v = 1$ *presque partout.*

(ii) $\prod_v (d_v, z_v)_v = 1$.

Alors $\exists\ z' \in K^*\ ,\ \forall\ v \in \Sigma\ (z_v, d_v)_v = (z'_v, d_v)_v$.

Ce théorème s'applique ici, ainsi que le lemme :

Lemme : *Soit $L = K(\sqrt{d})$, $\mathcal{M} = \{v$ places réelles, $d_v > 0\}$. Alors il existe $c \in L$ tel que $N_{L/K}(c)$ ait un signe donné pour chaque place $v \in \mathcal{M}$.*

Terminons la démonstration en supposant le lemme.

Posons

$$\mathcal{M} = \{v \text{ réelles telles que } d_v = d(f)_v > 0\}.$$
$$\mathcal{M}' = \{v \text{ réelles telles que } d_v > 0 \text{ et } z' z_v^{-1} < 0\}.$$

Le lemme montre qu'il existe $c \in N(K(\sqrt{d}))$ avec $c_v < 0$ si $v \in \mathcal{M}'$ et $c_v > 0$ si $v \in \mathcal{M}\backslash\mathcal{M}'$.

On a :

(i) Pour v finie $(z'_v, d_v)_v = (z_v, d_v)_v$ donc $(z'_v z_v^{-1}, d_v)_v = 1$ et $z'_v z_v^{-1} \in MS_n(K_v)$.
Dans $K_v^*/MS_n(K_v)(cz')_v = z'_v = z_v$ (car $c \in N(K(\sqrt{d})$ donc $c_v \in N(K_v(\sqrt{d}))$.

(ii) Pour v réelle et $\sigma_v(f) = 0$ ou v complexe $MS_n(K_v) = K_v^*$ donc $(cz')_v = z_v$ dans $K_v^*/MS_n(K_v)$.

(iii) Pour v réelle et $\sigma_v(f) \neq 0$
$(a, b)_v = -1$ si et seulement si a et $b < 0$ (pour $a, b \in K_v^*$), ici $(z' \circ z_v^{-1}, d_v)_v = 1$ donc :

• ou bien $d_v < 0$ $(v \notin \mathcal{M})$
alors $z'_v z_v^{-1} > 0$; de plus $c_v > 0$ car c est une norme d'où $(cz')_v z_v^{-1} > 0$ et :
$(cz')_v = z_v$ dans $K_v^*/MS_n(K_v)$.

• ou bien $d_v > 0$ $(v \in \mathcal{M})$
alors $(cz')_v z_v^{-1} > 0$; on a encore $(cz')_v = z_v$ dans $K_v^*/MS_n(K_v)$.

On vient donc de montrer que $(cz')_v = z_v$ dans $K_v^*/MS_n(K_v)$ pour toutes les places v de K, ce qui s'écrit encore :

$$\alpha' \circ \psi(cz') = (y_v)_v \in \Sigma.$$

On conclut comme dans le cas de dimension impaire.

Preuve du lemme : Soit $\mathcal{M}'$ l'ensemble des places de $\mathcal{M}$ où on veut le signe $-$, $\mathcal{M}'' = \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}'$.

Les valuations réelles étant indépendantes :

$$\exists\, x \in K, \quad |x_v| > \sqrt{|d_v|} \text{ pour } v \in \mathcal{M}''$$

$$|x_v| < \sqrt{|d_v|} \text{ pour } v \in \mathcal{M}'' \quad (\text{Les } \sqrt{|d_v|} \text{ sont des nombres fixes}).$$

alors $d_v > 0$ pour $v \in \mathcal{M}$ donc :

$$x_v^2 > d_v \text{ pour } v \in \mathcal{M}''$$

$$x_v^2 < d_v \text{ pour } v \in \mathcal{M}''$$

et $x^2 - d = N_{L/K}(x + \sqrt{d}) = N_{L/K}(x)$ a les signes voulus.

3.3. **Cas des similitudes de formes hermitiennes.**

$h : E \times E \to K$ est maintenant une forme hermitienne. Les groupes unitaires, de similitudes, de multiplicateurs de similitude, donnent des suites exactes :

$$(1') \qquad 1 \to U_n(K,h) \to GU_n(K,h) \to MS_n(K,h) \to 1$$

$$(2') \qquad 1 \to U_n(h) \to GU_n(h) \to \mathbb{G}_m \to 1$$

(suite exacte de K_0-groupes algébriques).

d'où, en faisant agir Gal $(\overline{K}_0/K_0)$ sur (2'), la suite de cohomologie :

$$1 \to U_n(K) \to GU_n(K) \to K_0^* \to H^1(K_0, U_n) \to H^1(K_0, GU_n) \to H^1(K_0, \mathbb{G}_m))$$

et en combinant avec (1') et Hilbert 90 (ie $H^1(K_0, \mathbb{G}_m) = 1$) :

$$(3') \qquad 1 \to K_0^*/MS_n(K) \to H^1(K_0, U_n) \to H^1(K_0, GU_n) \to 1.$$

De même sur les complétés $K_{0,v}$ de K_0 , $v \in \Sigma_0$ ensemble des places de K_0 :

$$(3'bis) \qquad 1 \to \prod_v K_{0,v}^*/MS_n(K_v) \to \prod_v H^1(K_0, U_n) \to \prod_v H^1(K_0, GU_n) \to 1.$$

Comme pour les formes quadratiques, on a des morphismes "verticaux" naturels d'ensembles pointés, qui forment avec (3') et (3' bis) un diagramme commutatif :

$$(\mathcal{D}') \qquad \begin{array}{ccccccccc} 1 \to & K_0^*/MS_n(K) & \xrightarrow{\alpha} & H^1(K_0, U_n) & \xrightarrow{\beta} & H^1(K_0, GU_n) & \to 1 \\ & \downarrow \Psi & & \downarrow \Phi & & \downarrow \varphi & \\ 1 \to & \prod_{v \in \Sigma_0} K_{0,v}^*/MS_n(K_v) & \xrightarrow{\alpha'} & \prod_{v \in \Sigma_0} H^1(K_{0,v}, U_n) & \xrightarrow{\beta'} & \prod_{v \in \Sigma_0} H^1(K_{0,v}, GU_n) & \to 1 \end{array}$$

Les interprétations de ces ensembles H^1 comme ensembles de classes d'isomorphie ou de similitude de formes hermitiennes de dimension $n = \dim h$, munis du point base h, conduisent à la nouvelle écriture du théorème de Landherr :

<u>Théorème</u> (Landherr) : *ker* $\Phi = 1$.

Nous allons montrer le principe de Hasse :

<u>Théorème</u> : *deux formes hermitiennes sur K similaires sur tous les complétés de K sont similaires sur K lui-même.*

Il suffit en fait de démontrer que pour une forme hermitienne h fixée :

<u>Théorème</u> : *ker* $\varphi = 1$.

<u>Preuve</u> : Soit $x \in H^1(K_0, GU_n)$ tel que $\varphi(x) = 1$.
On a alors $x = \beta(y)$ où $y \in H^1(K_0, U_n)$.
$\Phi(y) = (y_v)_{v \in \Sigma_0}$ est alors dans le noyau de β' donc $(y_v)_{v\in\Sigma_0} = \alpha'\Big((z_v)_{v\in\Sigma_0}\Big)$, $z_0 \in K_{0,v}^*/MS_n(K_v)$.
Si on considère y comme étant la classe d'équivalence de la forme h', alors $h'_v \simeq z_v h_v$ pour toutes les places v de K_0 (isomorphisme sur $K_v = K_{0,v} \otimes K$).

Distinguons les deux cas :

<u>Cas dim $h = n = 2m+1$ impaire</u>

D'apres (1') pour toute place $v \in \Sigma_0$, $MS_n(K_{0,v}) = N_{K_v/K_{0,v}}(K_0^*)$ et
$MS_n(K) = N_{K/K_0}(K^*)$.
$h'_v \simeq z_v h_v$ donc ces deux formes ont même discriminant :

$$d_v(h'_v) = z_v^n d_v(h_v) = z_v d_v(h_v) \text{ dans } K_{0,v}^*/N_{K_v/K_{0,v}}(K_v^*).$$

D'où $z_v = z'_v$ avec $z' = d(h')d(h)^{-1} \in K_0^*/N_{K/K_0}(K^*)$.
Ce qui signifie que $\psi(z') = z_v$.
On termine comme dans le cas quadratique.

<u>Cas dim $h = n = 2m$ paire</u>

Alors $MS_n(K) = \{\mu \in K_0^*, \mu_v > 0, v \in S_0\}$ (avec les notations du 1)
et si v finie $MS_n(K_v) = K_{0,v}^*$,
si v réelle et K_v complexe $MS_n(K_v) = K_{0,v}^{*+} = \mathbb{R}^{*+}$,
si v réelle et K_v réel, ou si v complexe $MS_n(K_v) = K_{0,v}^*$

Or $z_v \in K_{0,v}^*/MS_n(K_v)$.

Soit donc $z' \in K_0^*$ tel que $z'_v = z_v$ pour les places $v \in S_0$ (z' existe par indépendance linéaire des places réelles) alors la classe de z' dans $K_0^*/MS_n(K)$ est telle que :

$$\psi(z') = (z_v)_{v\in\Sigma_0} \in \prod_{v\in\Sigma_0} K_{0,v}^*/MS_n(K_v).$$

On termine la démonstration comme dans le cas précédant.

References

[1] Jean Dieudonné, "Sur les multiplicateurs de similitude". Oeuvres, p. 408 a 418.
[2] O.T. O'MEARA, "Introduction to quadratic forms". Grundlehren der Math. Wissenschaften, n° 117 (1963)
[3] Takashi Ono, "Arithmetic of orthogonal groups". Journal of the Math. Society of Japan, vol. 7 (1955), p. 79 a 91.
[4] Winfried Scharlau, "Quadratic and hermitian forms". Grundlehren der Math. Wissenschaften, n° 270 (1985).
[5] Jean-Pierre Serre, "Corps locaux". Hermann.

URA 741 CNRS
Laboratoire de Mathematiques
UFR Sciences et Techniques
16, Route de Gray
25030 Besanon Cedex