L2 : STATISTIQUE MATHÉMATIQUE
Feuille TD 2 :
Construction d'estimateurs : Méthodes des moments et du maximum de vraisemblance

Exercice 1

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre inconnu p. Construire un estimateur de p par la méthode des moments. Construire un nouvel estimateur de p par la technique du maximum de vraisemblance.

Exercice 2

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires correspondant, pour n lancers indépendants, à la valeur observée sur la face supérieure d'un dé déséquilibré. Construire l'estimateur du maximum de vraisemblance de la probabilité q que la face supérieure du dé porte un nombre multiple de 3.

Exercice 3

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, chacune suivant une loi de Poisson de paramètre θ.

1. On s'intéresse dans cette question au problème de l'estimation du paramètre θ. Construire un estimateur de θ en utilisant la technique des moments. En construire un autre en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance. Étudier et comparer les propriétés mathématiques de ces deux estimateurs.

2. Dans cette question, on se pose le problème de l'estimation du paramètre $\lambda = e^{-\theta}$. Expliquer ce que représente ce paramètre. Construire un estimateur de λ en utilisant la technique des moments. En construire un autre en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance. Étudier et comparer les propriétés mathématiques de ces deux estimateurs.

Exercice 4

Soient λ_1 et λ_2 deux paramètres d'intérêt dans un même modèle statistique. On suppose que $\lambda_2 = \phi(\lambda_1)$ avec ϕ injective. Montrer que, si l'estimateur du maximum de vraisemblance de λ_1 (que l'on notera $\hat{\lambda}_1$) existe, alors celui de λ_2 existe et vaut $\phi(\hat{\lambda}_1)$.

Exercice 5

Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance peut ne pas exister. On pourra construire un contre-exemple en utilisant une structure de Bernoulli et en choisissant correctement le paramètre d'intérêt.

Exercice 6

À la fête foraine, un jeu consiste à lancer un ballon dans un panier (en un lancer). La partie vaut 5 euros. Si le lancer est réussi, le joueur gagne un lot d'une valeur de 20 euros. Si le lancer est manqué, il ne gagne rien. Un joueur a une probabilité $p \in [0;1]$ (inconnue) de réussir son lancer.

1. On désigne par X la variable aléatoire représentant le gain (positif ou négatif) du joueur.
a. Quelles sont les valeurs possibles prises par X ? Donner la loi de X.
b. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

2. Le joueur effectue n parties que l'on supposera indépendantes. On note $X_1, \ldots, X_n$ les variables aléatoires correspondant aux gains obtenus à chaque partie. On souhaite estimer le paramètre p.
a. Déterminer une structure statistique adaptée à ce problème. Préciser le paramètre du modèle et le paramètre d'intérêt.
b. En utilisant la méthode des moments, construire un estimateur $\widehat{p}_M$ de p.
c. Montrer que $\widehat{p}_M$ est un estimateur sans biais de p et convergent en moyenne quadratique.
d. Montrer que la loi de X peut s'écrire :

$$P(X = k) = (1-p)^{-\frac{1}{20}k+\frac{3}{4}} p^{\frac{1}{20}k+\frac{1}{4}}, k \in \{-5; 15\}.$$

e. En utilisant la méthode du maximum de vraisemblance, construire un estimateur $\widehat{p}_V$ de p.
f. Montrer que $\widehat{p}_V$ est un estimateur sans biais de p et convergent en moyenne quadratique.