

Estimation de l'intensité d'un processus ponctuel spatial bruité

Lionel Cucala

Journées MAS

Septembre 2006

Plan

- Les processus ponctuels bruités.
- La méthode de déconvolution.
- L'étude asymptotique.
- Le choix de la largeur de bande.
- Une étude de simulation.

Les processus ponctuels bruités

Les processus ponctuels bruités

- Υ processus ponctuel défini sur $X \subseteq \mathbb{R}^2$.

Les processus ponctuels bruités

- Y processus ponctuel défini sur $X \subseteq \mathbb{R}^2$.
- On observe $Z = \{z_1, \dots, z_n\}$ sur le domaine borné $D \subseteq X$ tel que

Les processus ponctuels bruités

- Y processus ponctuel défini sur $X \subseteq \mathbb{R}^2$.
- On observe $Z = \{z_1, \dots, z_n\}$ sur le domaine borné $D \subseteq X$ tel que

$$z_i = y_i + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Les processus ponctuels bruités

- Y processus ponctuel défini sur $X \subseteq \mathbb{R}^2$.
- On observe $Z = \{z_1, \dots, z_n\}$ sur le domaine borné $D \subseteq X$ tel que

$$z_i = y_i + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\{\epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n\} \text{ i.i.d. } \sim g(\cdot)$$

Les processus ponctuels bruités

- Y processus ponctuel défini sur $X \subseteq \mathbb{R}^2$.
- On observe $Z = \{z_1, \dots, z_n\}$ sur le domaine borné $D \subseteq X$ tel que

$$z_i = y_i + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\{\epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n\} \text{ i.i.d. } \sim g(\cdot)$$

$$\epsilon_i \perp\!\!\!\perp y_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Les processus ponctuels bruités

- Y processus ponctuel défini sur $X \subseteq \mathbb{R}^2$.
- On observe $Z = \{z_1, \dots, z_n\}$ sur le domaine borné $D \subseteq X$ tel que

$$z_i = y_i + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\{\epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n\} \text{ i.i.d. } \sim g(\cdot)$$

$$\epsilon_i \perp\!\!\!\perp y_i, \quad i = 1, \dots, n$$

- But: estimer l'intensité $\lambda_Y(s)$ sur D .

L'estimateur à noyau de l'intensité

L'estimateur à noyau de l'intensité

Diggle (1985):

L'estimateur à noyau de l'intensité

Diggle (1985):

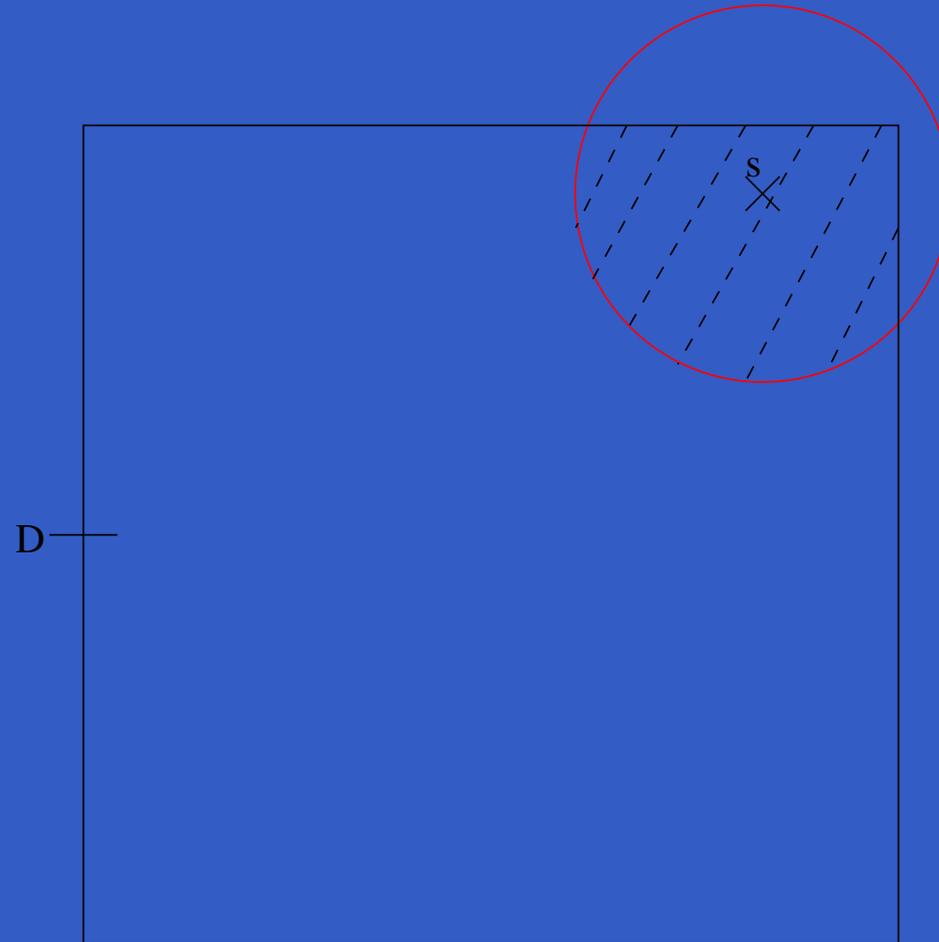
$$\begin{aligned}\forall s \in \mathbb{R}^2, \hat{\lambda}_{Z,h}(s) &= \frac{\sum_{j=1}^n \frac{1}{h^2} K\left(\frac{s-z_j}{h}\right)}{\int_D \frac{1}{h^2} K\left(\frac{s-u}{h}\right) \nu(du)} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^n \frac{1}{h^2} K\left(\frac{s-z_j}{h}\right)}{p_h(s)}\end{aligned}$$

L'estimateur à noyau de l'intensité

Correction au bord:

L'estimateur à noyau de l'intensité

Correction au bord:



La méthode de déconvolution

La méthode de déconvolution

- On suppose $\forall t \in \mathbb{R}^2, |\mathcal{F}(g)(t)| > 0$.

La méthode de déconvolution

■ On suppose $\forall t \in \mathbb{R}^2, |\mathcal{F}(g)(t)| > 0$.



$$z_i = y_i + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \lambda_Z = \lambda_Y * g$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(\lambda_Z)(\cdot) = \mathcal{F}(\lambda_Y)(\cdot) \mathcal{F}(g)(\cdot)$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(\lambda_Y)(\cdot) = \mathcal{F}(\lambda_Z)(\cdot) / \mathcal{F}(g)(\cdot)$$

$$\Rightarrow \lambda_Y = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\lambda_Z)(\cdot) / \mathcal{F}(g)(\cdot))$$

Les estimateurs à noyau de déconvolution

Les estimateurs à noyau de déconvolution

- Sans correction de bord:

Les estimateurs à noyau de déconvolution

- Sans correction de bord:

$$\begin{aligned}\lambda_{Y,h}^*(s) &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{is't} \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} e^{-it'z} \frac{1}{h^2} K\left(\frac{z - z_j}{h}\right) \right. \\ &\quad \left. \nu(dz) / \mathcal{F}(g)(t) \right\} \nu(dt) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{h^2} K_h^*\left(\frac{s - z_j}{h}\right),\end{aligned}$$

$$\text{où } K_h^*(t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{it'y} \mathcal{F}(K)(y) / \mathcal{F}(g)(y/h) dy.$$

Les estimateurs à noyau de déconvolution

Les estimateurs à noyau de déconvolution

- Correction de bord a priori:

Les estimateurs à noyau de déconvolution

- Correction de bord a priori:

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_{Y,h}(s) &= \mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(\hat{\lambda}_{Z,h})(t)/\mathcal{F}(g)(t)\right)(s) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{is't} \left\{ \int_{G_h} \frac{e^{-it'z} \frac{1}{h^2} K\left(\frac{z-z_j}{h}\right)}{p_h(z)} \right. \\ &\quad \left. \nu(dz)/\mathcal{F}(g)(t) \right\} \nu(dt).\end{aligned}$$

Les estimateurs à noyau de déconvolution

Les estimateurs à noyau de déconvolution

- Correction de bord a posteriori:

Les estimateurs à noyau de déconvolution

- Correction de bord a posteriori:

$$\lambda_{Y,h}^{**}(s) = \frac{\lambda_{Y,h}^*(s)}{p_h^*(s)}.$$

Conclusions:

Conclusions:

- Aucun estimateur asymptotiquement sans biais.

L'étude asymptotique

Conclusions:

- Aucun estimateur asymptotiquement sans biais.
- On choisit:

$$\lambda_{Y,h}^{**}(s) = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{1}{h^2} K_h^* \left(\frac{s-z_j}{h} \right)}{\int_D \frac{1}{h^2} K_h^* \left(\frac{s-u}{h} \right) \nu(du)}, \forall s \in G'_h.$$

L'étude asymptotique

Conclusions:

- Aucun estimateur asymptotiquement sans biais.
- On choisit:

$$\lambda_{Y,h}^{**}(s) = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{1}{h^2} K_h^* \left(\frac{s-z_j}{h} \right)}{\int_D \frac{1}{h^2} K_h^* \left(\frac{s-u}{h} \right) \nu(du)}, \forall s \in G'_h.$$

- asymptotiquement sans biais pour des processus de Poisson homogènes,

L'étude asymptotique

Conclusions:

- Aucun estimateur asymptotiquement sans biais.
- On choisit:

$$\lambda_{Y,h}^{**}(s) = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{1}{h^2} K_h^* \left(\frac{s-z_j}{h} \right)}{\int_D \frac{1}{h^2} K_h^* \left(\frac{s-u}{h} \right) \nu(du)}, \forall s \in G'_h.$$

- asymptotiquement sans biais pour des processus de Poisson homogènes,
- se ramène à l'estimateur de Diggle si erreur nulle.

Le choix de la largeur de bande

Le choix de la largeur de bande

Adaptation de la règle de référence gaussienne au cas bidimensionnel et bruité.

Un noyau à bande limitée

Un noyau à bande limitée

$$K_0(t) = \frac{48 t^3 \cos(t) - 6t^2 \sin(t) + 15 \sin(t) - 15t \cos(t)}{\pi t^7}$$

Un noyau à bande limitée

$$K_0(t) = \frac{48 t^3 \cos(t) - 6t^2 \sin(t) + 15 \sin(t) - 15t \cos(t)}{\pi t^7}$$

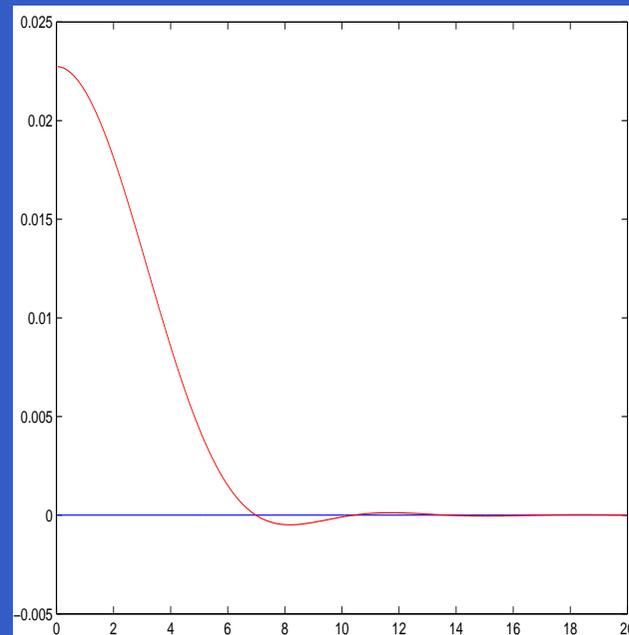


Figure 3: Profil du noyau K_0

Les transformées de Fourier

Les transformées de Fourier

- $\mathcal{F}(K)(t) = (1 - t_1^2)^3 (1 - t_2^2)^3 \mathbb{1}_{[-1,1]^2}(t).$

Les transformées de Fourier

- $\mathcal{F}(K)(t) = (1 - t_1^2)^3(1 - t_2^2)^3 \mathbb{1}_{[-1,1]^2}(t)$.
- $\mathcal{F}(g)$ généralement explicite.

Les transformées de Fourier

- $\mathcal{F}(K)(t) = (1 - t_1^2)^3(1 - t_2^2)^3 \mathbb{1}_{[-1,1]^2}(t)$.
- $\mathcal{F}(g)$ généralement explicite.
- Les transformées de Fourier inverses sont obtenues par procédure numérique (Simpson).

Une étude de simulation

Une étude de simulation

- $\{y_i, i = 1, \dots, n\}$ issues d'un P.P. inhomogène d'intensité

$$\lambda_Y(s) = C \left[1 + 0.7 \cos \left(2\pi (\|s\| - 0.5) \right) \right].$$

Une étude de simulation

- $\{y_i, i = 1, \dots, n\}$ issues d'un P.P. inhomogène d'intensité

$$\lambda_Y(s) = C [1 + 0.7 \cos(2\pi(\|s\| - 0.5))].$$

- $\{\epsilon_i, i = 1, \dots, n\}$ i.i.d. $\sim g$.

Une étude de simulation

- $\{y_i, i = 1, \dots, n\}$ issues d'un P.P. inhomogène d'intensité

$$\lambda_Y(s) = C [1 + 0.7 \cos(2\pi(\|s\| - 0.5))].$$

- $\{\epsilon_i, i = 1, \dots, n\}$ i.i.d. $\sim g$.

- $z_i = y_i + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$

Une étude de simulation

Notons

Une étude de simulation

Notons

$$ISE = \int_{[0,1]^2} \left(\hat{\lambda}_{Z, h_{opt}} - \lambda_Y(s) \right)^2 \nu(ds)$$

Notons

$$ISE = \int_{[0,1]^2} \left(\hat{\lambda}_{Z, h_{opt}} - \lambda_Y(s) \right)^2 \nu(ds)$$

$$ISE^* = \int_{[0,1]^2} \left(\lambda_{Y, h^*}^*(s) - \lambda_Y(s) \right)^2 \nu(ds)$$

Une étude de simulation

Notons

$$ISE = \int_{[0,1]^2} \left(\hat{\lambda}_{Z, h_{opt}} - \lambda_Y(s) \right)^2 \nu(ds)$$

$$ISE^* = \int_{[0,1]^2} \left(\lambda_{Y, h^*}^*(s) - \lambda_Y(s) \right)^2 \nu(ds)$$

$$ISE^{**} = \int_{[0,1]^2} \left(\lambda_{Y, h^*}^{**}(s) - \lambda_Y(s) \right)^2 \nu(ds).$$

Une étude de simulation

Une étude de simulation

Table 3: Erreur gaussienne, $\sigma=0.02$

	<i>ISE</i>	<i>ISE</i> *	<i>ISE</i> **
1er quartile ($*10^3$)	1.0600	1.6745	0.9038
médiane ($*10^3$)	1.3939	1.9613	1.0279
3ème quartile ($*10^3$)	1.5899	2.2432	1.3158

Une étude de simulation

Table 5: Erreur gaussienne, $\sigma=0.02$

	<i>ISE</i>	<i>ISE*</i>	<i>ISE**</i>
1er quartile ($*10^3$)	1.0600	1.6745	0.9038
médiane ($*10^3$)	1.3939	1.9613	1.0279
3ème quartile ($*10^3$)	1.5899	2.2432	1.3158

Table 6: Erreur gaussienne, $\sigma=0.05$

	<i>ISE</i>	<i>ISE*</i>	<i>ISE**</i>
1er quartile ($*10^3$)	0.8185	1.4153	0.6655
médiane ($*10^3$)	1.2474	1.7199	0.9298
3ème quartile ($*10^3$)	1.5281	1.8908	1.2138

Une étude de simulation

Une étude de simulation

Table 9: Erreur laplacienne, $\sigma=0.02$

	<i>ISE</i>	<i>ISE*</i>	<i>ISE**</i>
1er quartile ($*10^3$)	1.0444	1.4676	0.8274
médiane ($*10^3$)	1.4129	1.7275	1.0025
3ème quartile ($*10^3$)	2.1357	1.9753	1.2334

Une étude de simulation

Table 11: Erreur laplacienne, $\sigma=0.02$

	<i>ISE</i>	<i>ISE*</i>	<i>ISE**</i>
1er quartile ($*10^3$)	1.0444	1.4676	0.8274
médiane ($*10^3$)	1.4129	1.7275	1.0025
3ème quartile ($*10^3$)	2.1357	1.9753	1.2334

Table 12: Erreur laplacienne, $\sigma=0.05$

	<i>ISE</i>	<i>ISE*</i>	<i>ISE**</i>
1er quartile ($*10^3$)	0.7869	1.1814	0.7689
médiane ($*10^3$)	1.4859	1.4223	1.1308
3ème quartile ($*10^3$)	2.0375	1.5114	1.4210

Une étude de simulation

Une étude de simulation

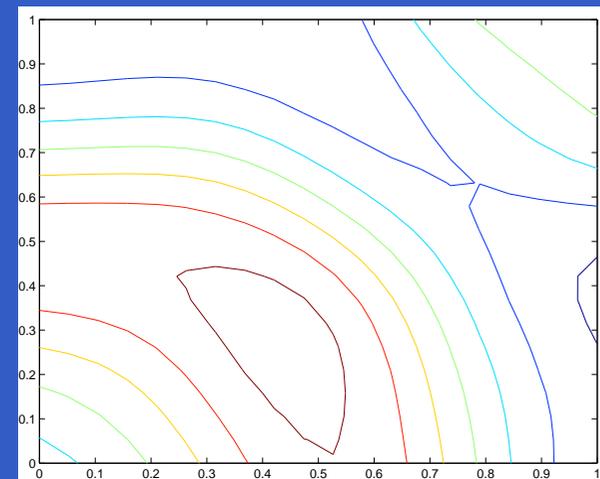
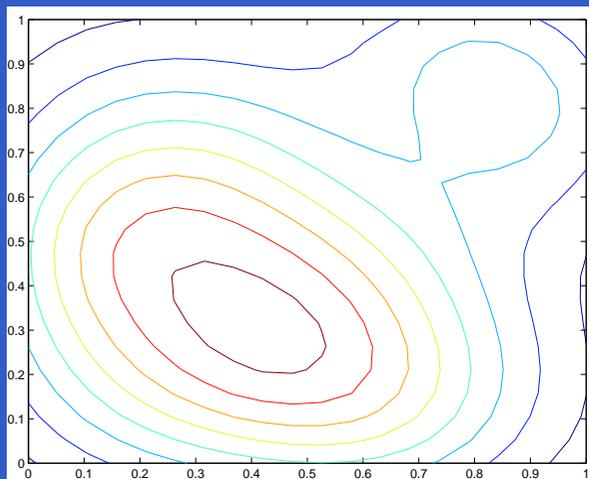
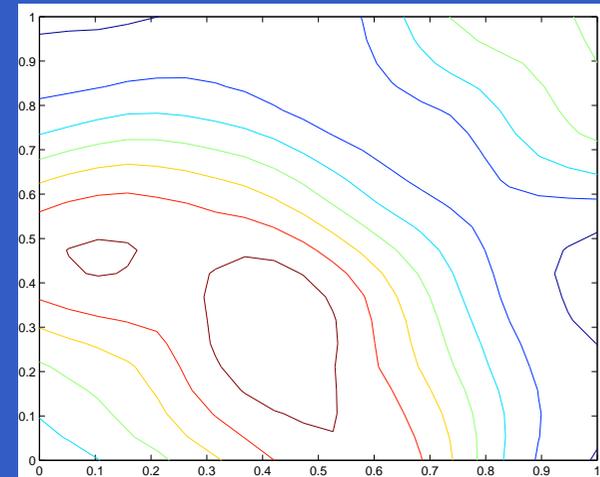
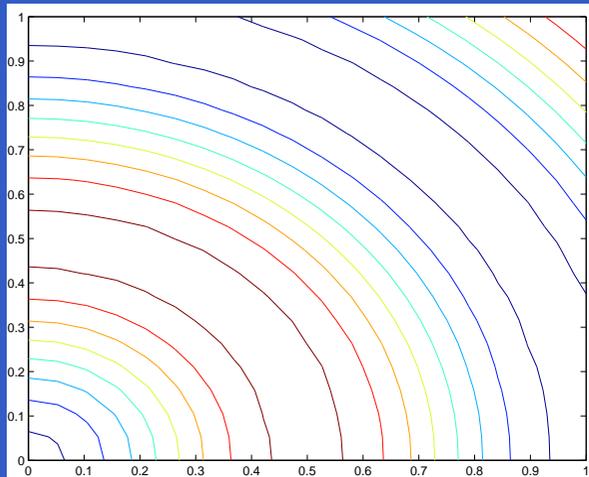


Figure 3 : En haut à gauche: Contours de λ_Y . En haut à droite: Contours de $\hat{\lambda}_{Z, h_{opt}}$. En bas à gauche: Contours de λ_{Y, h^*}^* . En bas à droite: Contours de λ_{Y, h^*}^{**}