

Tests d'homogénéité spatiale basés sur les espacements

Lionel Cucala & Christine Thomas-Agnan

Groupe Spatial

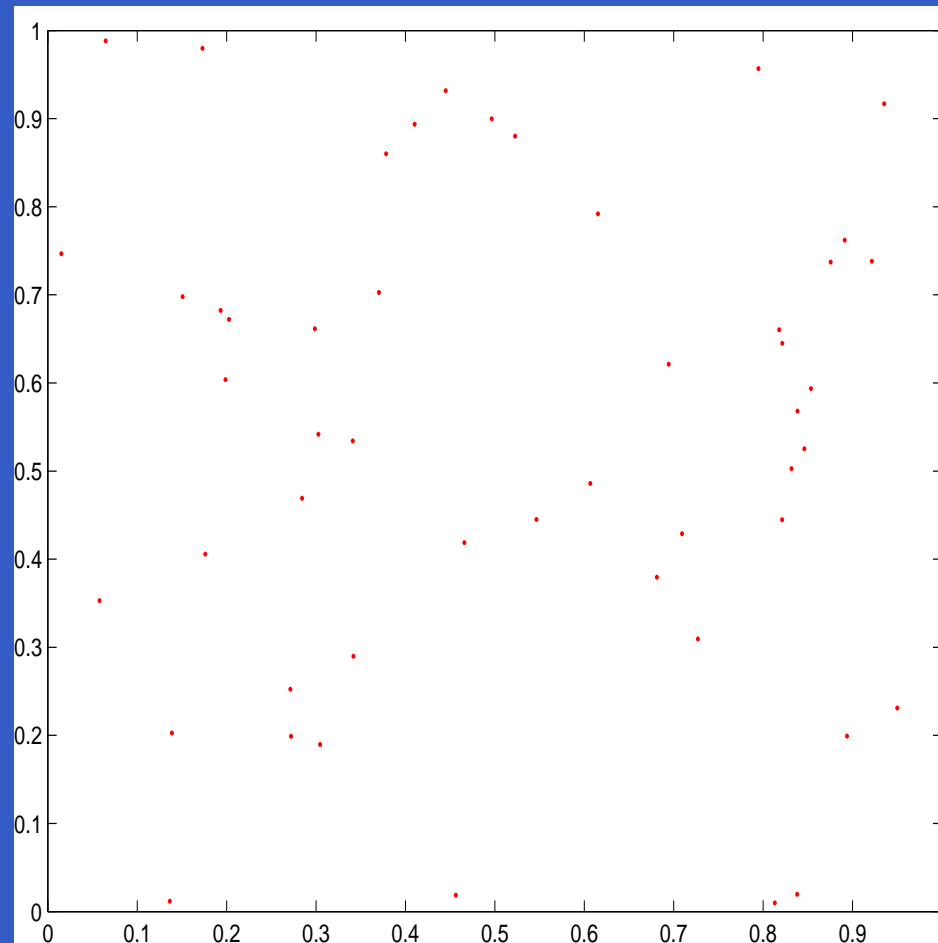
Mai 2005

- Introduction aux processus ponctuels.
- Théorie des espacements sur $[0, 1]$.
- De nouvelles statistiques pour tester l'homogénéité spatiale:
 - Normalité asymptotique des statistiques.
 - Procédure de test multiple.
 - Puissance des tests.

Processus ponctuels

4 types principaux:

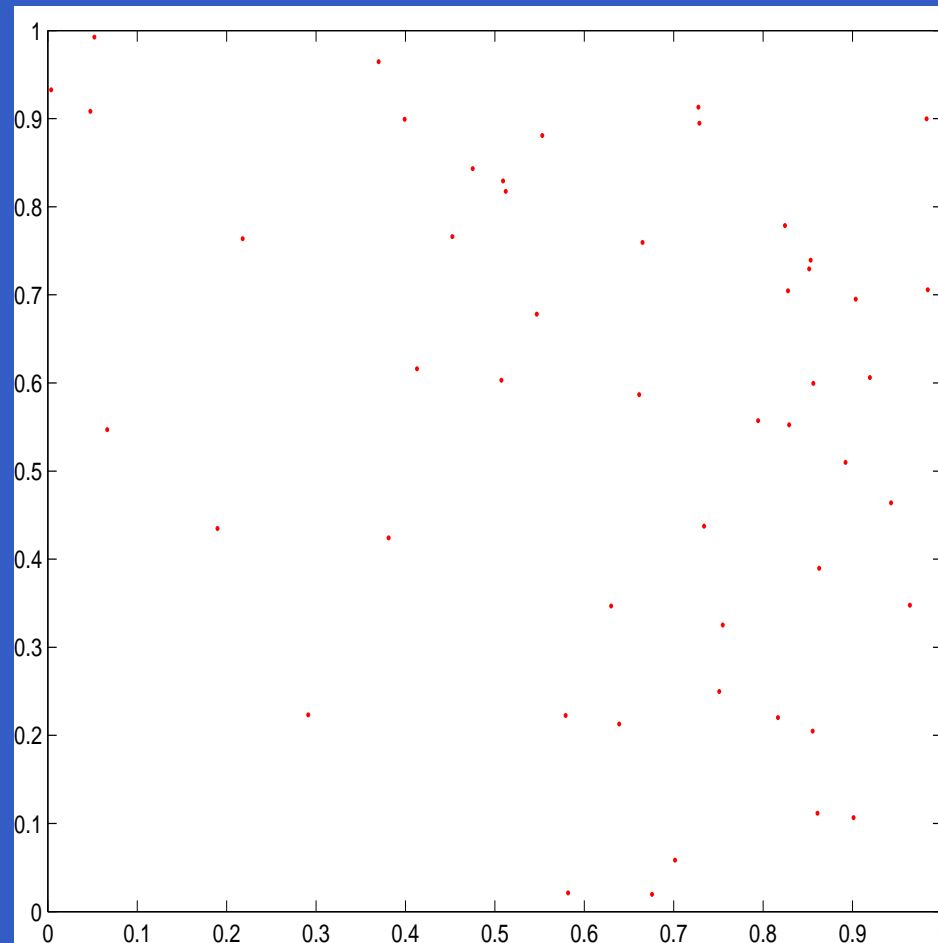
- Processus de Poisson homogène



Processus ponctuels

4 types principaux:

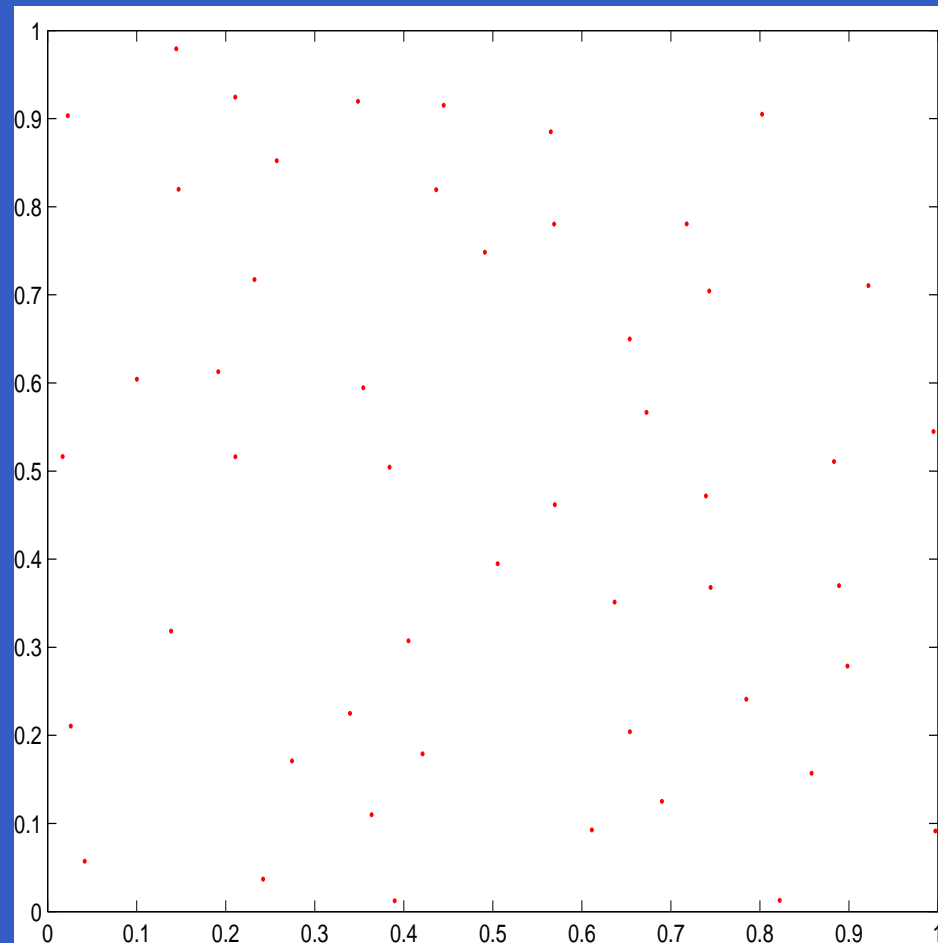
- Processus de Poisson hétérogène



Processus ponctuels

4 types principaux:

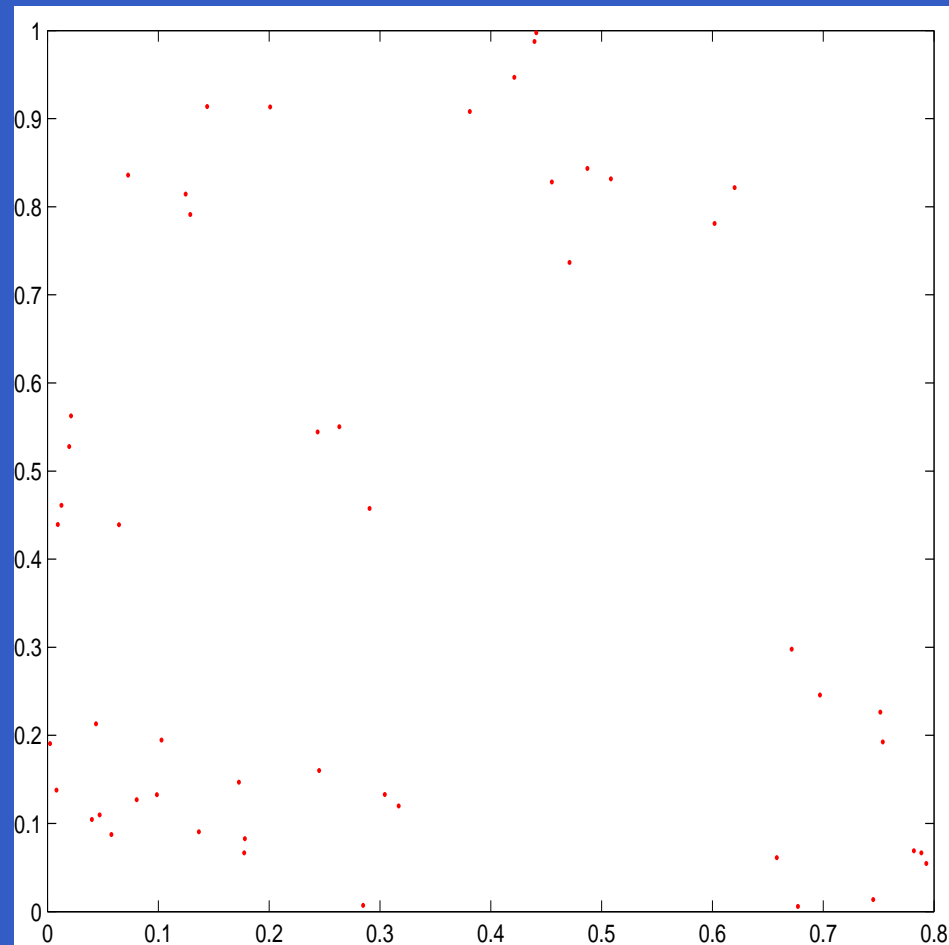
- Processus réguliers



Processus ponctuels

4 types principaux:

- Processus agrégés



Homogénéité spatiale (CSR)

Homogénéité spatiale (CSR)

- $\left((X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n) \right)$ i.i.d. $\sim U([0, 1]^2)$.

Homogénéité spatiale (CSR)

- $\left((X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n) \right)$ i.i.d. $\sim U([0, 1]^2)$.

Hypothèse nulle car:

Homogénéité spatiale (CSR)

- $\left((X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n) \right)$ i.i.d. $\sim U([0, 1]^2)$.

Hypothèse nulle car:

- pas de paramètre à estimer,

Homogénéité spatiale (CSR)

- $\left((X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n) \right)$ i.i.d. $\sim U([0, 1]^2)$.

Hypothèse nulle car:

- pas de paramètre à estimer,
- pas de prédiction possible.

Homogénéité spatiale (CSR)

- $\left((X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n) \right)$ i.i.d. $\sim U([0, 1]^2)$.

Hypothèse nulle car:

- pas de paramètre à estimer,
- pas de prédiction possible.

\Rightarrow Premier réflexe: tester la CSR.

Comment tester la CSR?

Comment tester la CSR?

- tests basés sur les quadrats,
(ex.: de type Khi 2)

Comment tester la CSR?

- tests basés sur les quadrats,
(ex.: de type Khi 2)
- tests basés sur les distances,
(ex.: fonction K de Ripley)

Comment tester la CSR?

- tests basés sur les quadrats,
(ex.: de type Khi 2)
- tests basés sur les distances,
(ex.: fonction K de Ripley)
- tests basés sur la fonction de répartition empirique.
(ex.: Kolmogorov-Smirnov et Cramer-Von Mises)

Théorie des espacements sur $[0, 1]$

Théorie des espacements sur $[0, 1]$

- $(U_1, \dots, U_{n-1}) \in [0, 1]^{n-1}$

Théorie des espacements sur $[0, 1]$

- $(U_1, \dots, U_{n-1}) \in [0, 1]^{n-1}$
- $\rightarrow U_{(0)} = 0 \leq U_{(1)} \leq \dots \leq \dots U_{(n-1)} \leq U_{(n)} = 1$

Théorie des espacements sur $[0, 1]$

- $(U_1, \dots, U_{n-1}) \in [0, 1]^{n-1}$
- $\rightarrow U_{(0)} = 0 \leq U_{(1)} \leq \dots \leq \dots U_{(n-1)} \leq U_{(n)} = 1$
- $\rightarrow (D_1, \dots, D_n)$, où $D_i = U_{(i)} - U_{(i-1)}$.

Théorie des espacements sur $[0, 1]$

- $(U_1, \dots, U_{n-1}) \in [0, 1]^{n-1}$
- $\rightarrow U_{(0)} = 0 \leq U_{(1)} \leq \dots \leq \dots U_{(n-1)} \leq U_{(n)} = 1$
- $\rightarrow (D_1, \dots, D_n)$, où $D_i = U_{(i)} - U_{(i-1)}$.
- H_0 : Uniformité et indépendance \Rightarrow
 $(D_i, i = 1, \dots, n)$ i.d. mais $\sum_{i=1}^n D_i = 1$.

Théorie des espacements sur $[0, 1]$

- $(U_1, \dots, U_{n-1}) \in [0, 1]^{n-1}$
- $\rightarrow U_{(0)} = 0 \leq U_{(1)} \leq \dots \leq \dots \leq U_{(n-1)} \leq U_{(n)} = 1$
- $\rightarrow (D_1, \dots, D_n)$, où $D_i = U_{(i)} - U_{(i-1)}$.
- H_0 : Uniformité et indépendance \Rightarrow
 $(D_i, i = 1, \dots, n)$ i.d. mais $\sum_{i=1}^n D_i = 1$.
- Idée: tester H_0 en observant la dispersion des espacements.

Quelles mesures de dispersion choisir?

Quelles mesures de dispersion choisir?

- Variance $\rightarrow V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (nD_i - 1)^2.$

Quelles mesures de dispersion choisir?

- Variance $\rightarrow V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (nD_i - 1)^2.$

- Déviation en valeur absolue $\rightarrow R_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |nD_i - 1|.$

Théorie des espacements sur $[0, 1]$

Quelles mesures de dispersion choisir?

- Variance $\rightarrow V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (nD_i - 1)^2$.

- Déviation en valeur absolue $\rightarrow R_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |nD_i - 1|$.

- Formule générale:

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(nD_i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N} \text{ sous } H_0 \quad (\text{Le Cam, 1958}).$$

Théorie des espacements sur $[0, 1]$

Quelles mesures de dispersion choisir?

- Variance $\rightarrow V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (nD_i - 1)^2$.

- Déviation en valeur absolue $\rightarrow R_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |nD_i - 1|$.

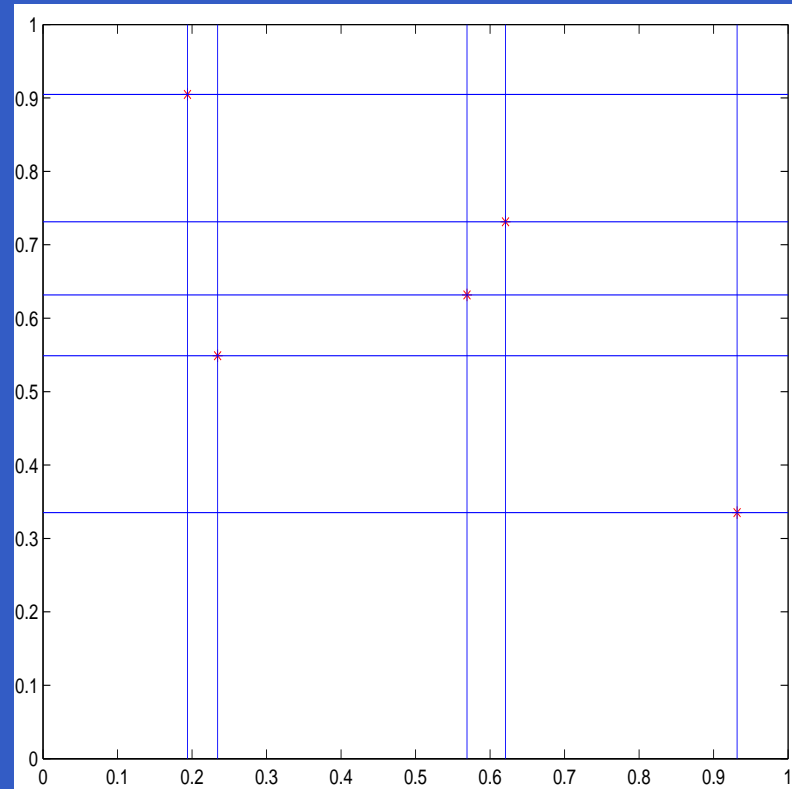
- Formule générale:

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(nD_i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N} \text{ sous } H_0 \quad (\text{Le Cam, 1958}).$$

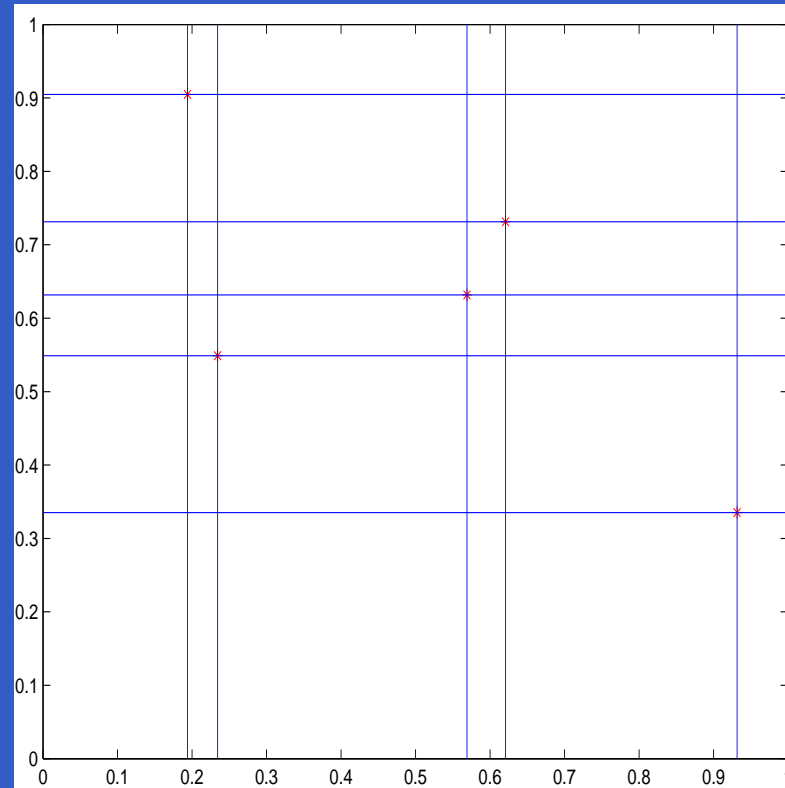
- Tests basés sur S_n : puissants contre la dépendance.

Espacements 2D

Espacements 2D

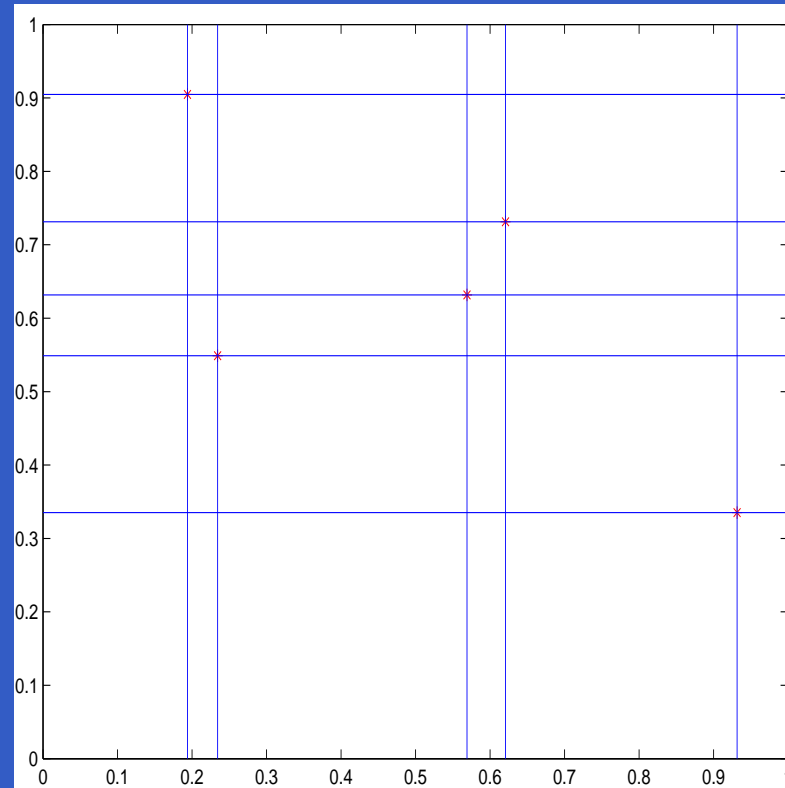


Espacements 2D



■ $A_{ij} = D_i^x D_j^y, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n.$

Espacements 2D



- $A_{ij} = D_i^x D_j^y, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n.$

- $S_n = \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g(n^2 A_{ij}).$

Généralisation du théorème de Le Cam

Généralisation du théorème de Le Cam

- Idée 1: $(nD_1, \dots, nD_n) \sim \left(\frac{E_1}{\bar{E}}, \dots, \frac{E_n}{\bar{E}} \right)$,
où $(E_1, \dots, E_n) i.i.d. \sim \mathcal{E}(1)$.

Généralisation du théorème de Le Cam

- Idée 1: $(nD_1, \dots, nD_n) \sim \left(\frac{E_1}{\bar{E}}, \dots, \frac{E_n}{\bar{E}} \right)$,
où $(E_1, \dots, E_n) i.i.d. \sim \mathcal{E}(1)$.
- $\Rightarrow S_n \sim G_n = \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g\left(\frac{X_i}{\bar{X}} \frac{Y_j}{\bar{Y}}\right)$
où $(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n) i.i.d. \sim \mathcal{E}(1)$.

Généralisation du théorème de Le Cam

- Idée 1: $(nD_1, \dots, nD_n) \sim \left(\frac{E_1}{\bar{E}}, \dots, \frac{E_n}{\bar{E}}\right)$,
où $(E_1, \dots, E_n) i.i.d. \sim \mathcal{E}(1)$.

- $\Rightarrow S_n \sim G_n = \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g\left(\frac{X_i Y_j}{\bar{X} \bar{Y}}\right)$

où $(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n) i.i.d. \sim \mathcal{E}(1)$.

- Idée 2: Développement de Taylor

$$\rightarrow g\left(\frac{X_i Y_j}{\bar{X} \bar{Y}}\right) \sim_{n \rightarrow \infty} g(X_i Y_j) - c(\bar{X} - 1) - c(\bar{Y} - 1),$$

où $c = Cov(g(X_1 Y_1), X_1)$.

Généralisation du théorème de Le Cam

Généralisation du théorème de Le Cam

Décomposition: $G_n = U_n + R_n,$

Généralisation du théorème de Le Cam

Décomposition: $G_n = U_n + R_n,$

où $U_n = \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [g(X_i Y_j) - c(X_i - 1) - c(Y_j - 1)],$ et

Généralisation du théorème de Le Cam

Décomposition: $G_n = U_n + R_n,$

où $U_n = \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [g(X_i Y_j) - c(X_i - 1) - c(Y_j - 1)],$ et

$R_n =$

$$\frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[g\left(\frac{X_i Y_j}{\bar{X} \bar{Y}}\right) - g(X_i Y_j) + c(X_i + Y_j - 2) \right].$$

Généralisation du théorème de Le Cam

Décomposition: $G_n = U_n + R_n$,

où $U_n = \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [g(X_i Y_j) - c(X_i - 1) - c(Y_j - 1)]$, et

$R_n =$

$$\frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[g\left(\frac{X_i Y_j}{\bar{X} \bar{Y}}\right) - g(X_i Y_j) + c(X_i + Y_j - 2) \right].$$

- U_n est une U-statistique généralisée $\Rightarrow U_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}$.

Généralisation du théorème de Le Cam

Décomposition: $G_n = U_n + R_n$,

où $U_n = \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [g(X_i Y_j) - c(X_i - 1) - c(Y_j - 1)]$, et

$R_n =$

$$\frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[g\left(\frac{X_i Y_j}{\bar{X} \bar{Y}}\right) - g(X_i Y_j) + c(X_i + Y_j - 2) \right].$$

- U_n est une U-statistique généralisée $\Rightarrow U_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}$.
- $\mathbb{E}(R_n^2) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Généralisation du théorème de Le Cam

Décomposition: $G_n = U_n + R_n$,

où $U_n = \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [g(X_i Y_j) - c(X_i - 1) - c(Y_j - 1)]$, et

$R_n =$

$$\frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[g\left(\frac{X_i Y_j}{\bar{X} \bar{Y}}\right) - g(X_i Y_j) + c(X_i + Y_j - 2) \right].$$

■ U_n est une U-statistique généralisée $\Rightarrow U_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}$.

■ $\mathbb{E}(R_n^2) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

$\Rightarrow S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}$.

Statistiques utilisées et leurs lois limites

Statistiques utilisées et leurs lois limites

■ Variance

$$\rightarrow V_n = \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \{(n^2 A_{ij} - 1)^2 - 3\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, 32).$$

Statistiques utilisées et leurs lois limites

■ Variance

$$\rightarrow V_n = \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \{(n^2 A_{ij} - 1)^2 - 3\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, 32).$$

■ Déviation en valeur absolue

$$\rightarrow R_n = \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \{|n^2 A_{ij} - 1| - \mu\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Statistiques utilisées et leurs lois limites

■ Variance

$$\rightarrow V_n = \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \{(n^2 A_{ij} - 1)^2 - 3\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, 32).$$

■ Déviation en valeur absolue

$$\rightarrow R_n = \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \{|n^2 A_{ij} - 1| - \mu\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Limitation: $n \leq 100 \Rightarrow$ fractiles empiriques sensiblement différents des fractiles de la loi limite.

Nécessité d'une procédure multiple

Nécessité d'une procédure multiple

Premier exemple:

Nécessité d'une procédure multiple

Premier exemple:

- $U^x = \{U_1^x, \dots, U_{n-1}^x\}$ i.i.d. $U([0, 1])$.

Nécessité d'une procédure multiple

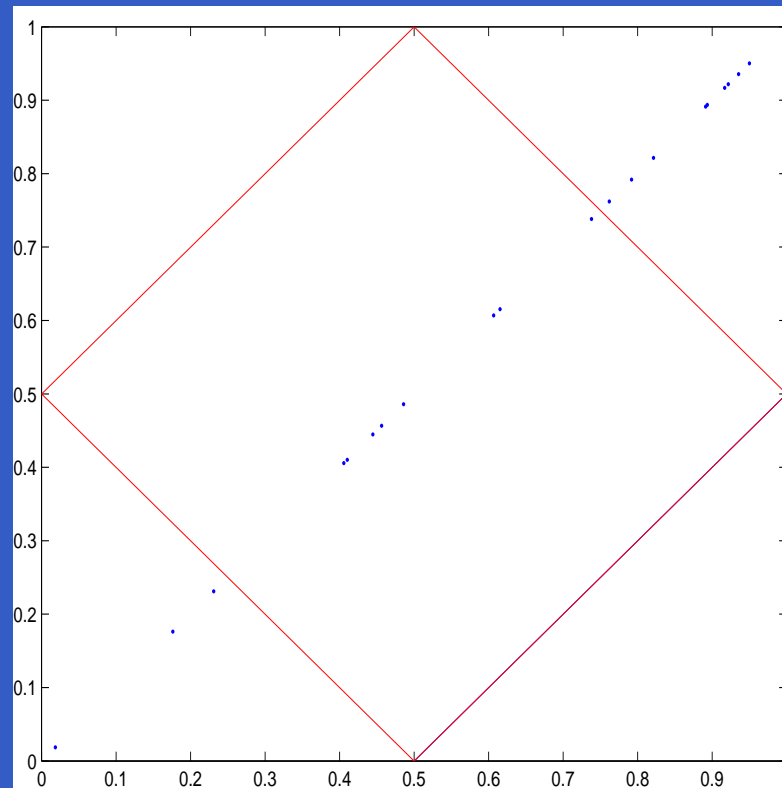
Premier exemple:

- $U^x = \{U_1^x, \dots, U_{n-1}^x\}$ i.i.d. $U([0, 1])$.
- $U^y = U^x$.

Nécessité d'une procédure multiple

Premier exemple:

- $U^x = \{U_1^x, \dots, U_{n-1}^x\}$ i.i.d. $U([0, 1])$.
- $U^y = U^x$.



Nécessité d'une procédure multiple

Nécessité d'une procédure multiple

Second exemple:

Nécessité d'une procédure multiple

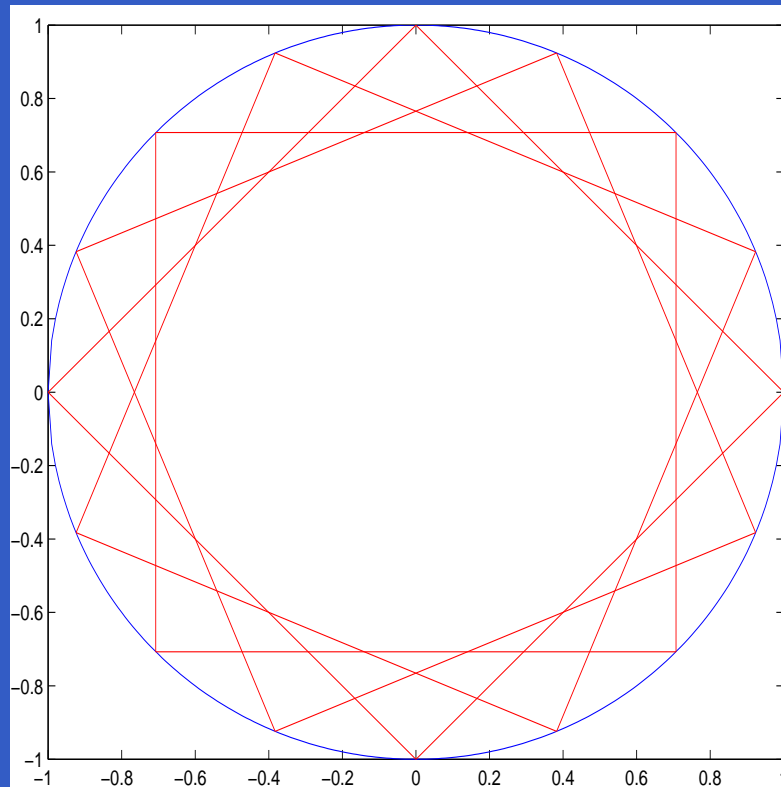
Second exemple:

- Domaine D du processus ponctuel non rectangulaire.

Nécessité d'une procédure multiple

Second exemple:

- Domaine D du processus ponctuel non rectangulaire.



Description de la procédure multiple

Description de la procédure multiple

Processus U. Axes d'origine: X et Y . $\omega = 0$.

Description de la procédure multiple

Processus U. Axes d'origine: X et Y . $\omega = 0$.

- Axes X_ω et Y_ω . Construire R_ω plus grand rectangle inclus dans D de côtés parallèles aux axes.

Description de la procédure multiple

Processus U . Axes d'origine: X et Y . $\omega = 0$.

- Axes X_ω et Y_ω . Construire R_ω plus grand rectangle inclus dans D de côtés parallèles aux axes.
- Repérer les $m - 1$ points de U inclus dans R_ω et en déduire la statistique $V_{m,\omega}$.

Description de la procédure multiple

Processus U . Axes d'origine: X et Y . $\omega = 0$.

- Axes X_ω et Y_ω . Construire R_ω plus grand rectangle inclus dans D de côtés parallèles aux axes.
- Repérer les $m - 1$ points de U inclus dans R_ω et en déduire la statistique $V_{m,\omega}$.
- p_ω est la p-valeur associée.

Description de la procédure multiple

Processus U . Axes d'origine: X et Y . $\omega = 0$.

- Axes X_ω et Y_ω . Construire R_ω plus grand rectangle inclus dans D de côtés parallèles aux axes.
- Repérer les $m - 1$ points de U inclus dans R_ω et en déduire la statistique $V_{m,\omega}$.
- p_ω est la p-valeur associée.
- $\omega = \omega + \pi/(2a)$.

Description de la procédure multiple

Processus U . Axes d'origine: X et Y . $\omega = 0$.

- Axes X_ω et Y_ω . Construire R_ω plus grand rectangle inclus dans D de côtés parallèles aux axes.
- Repérer les $m - 1$ points de U inclus dans R_ω et en déduire la statistique $V_{m,\omega}$.
- p_ω est la p-valeur associée.
- $\omega = \omega + \pi/(2a)$.

Itérer jusqu'à $\omega = \pi/2$.

Description de la procédure multiple

Description de la procédure multiple

- a p-valeurs: $p_0, \dots, p_{\pi/2 - \pi/(2a)}$.

Description de la procédure multiple

- a p-valeurs: $p_0, \dots, p_{\pi/2 - \pi/(2a)}$.
- $\rightarrow p_{(1)} \leq \dots \leq p_{(a)}$.

Description de la procédure multiple

- a p-valeurs: $p_0, \dots, p_{\pi/2 - \pi/(2a)}$.
- $\rightarrow p_{(1)} \leq \dots \leq p_{(a)}$.

Test de niveau nominal α . On rejette H_0 ssi:

Description de la procédure multiple

- a p-valeurs: $p_0, \dots, p_{\pi/2 - \pi/(2a)}$.
- $\rightarrow p_{(1)} \leq \dots \leq p_{(a)}$.

Test de niveau nominal α . On rejette H_0 ssi:

- $p_{(1)} < \alpha/a$ (Bonferroni).

Description de la procédure multiple

- a p-valeurs: $p_0, \dots, p_{\pi/2 - \pi/(2a)}$.
- $\rightarrow p_{(1)} \leq \dots \leq p_{(a)}$.

Test de niveau nominal α . On rejette H_0 ssi:

- $p_{(1)} < \alpha/a$ (Bonferroni).
- $\exists i = 1, \dots, a \quad p_{(i)} < i\alpha/a$ (Simes).

Description de la procédure multiple

Description de la procédure multiple

- Bonferroni: Erreur 1^{ère} espèce $\leq \alpha$.

Description de la procédure multiple

- Bonferroni: Erreur 1^{ère} espèce $\leq \alpha$.
- Simes: puissance supérieure.

Description de la procédure multiple

- Bonferroni: Erreur 1^{ère} espèce $\leq \alpha$.
- Simes: puissance supérieure.
- Estimation de l'erreur de 1^{ère} espèce pour $\alpha = 0.04$:

Description de la procédure multiple

- Bonferroni: Erreur 1^{ère} espèce $\leq \alpha$.
- Simes: puissance supérieure.
- Estimation de l'erreur de 1^{ère} espèce pour $\alpha = 0.04$:

a	Erreur I estimée:			
	BV_n	SV_n	BR_n	SR_n
5	0.037	0.038	0.0415	0.042
10	0.0345	0.0355	0.0375	0.0375

Description de la procédure multiple

- Bonferroni: Erreur 1^{ère} espèce $\leq \alpha$.
- Simes: puissance supérieure.
- Estimation de l'erreur de 1^{ère} espèce pour $\alpha = 0.04$:

a	Erreur I estimée:			
	BV_n	SV_n	BR_n	SR_n
5	0.037	0.038	0.0415	0.042
10	0.0345	0.0355	0.0375	0.0375

- Nous adoptons Simes avec $a = 10$.

Application à des données réelles

Application à des données réelles

4 jeux de données respectivement considérés homogène, agrégé, régulier et hétérogène.

Application à des données réelles

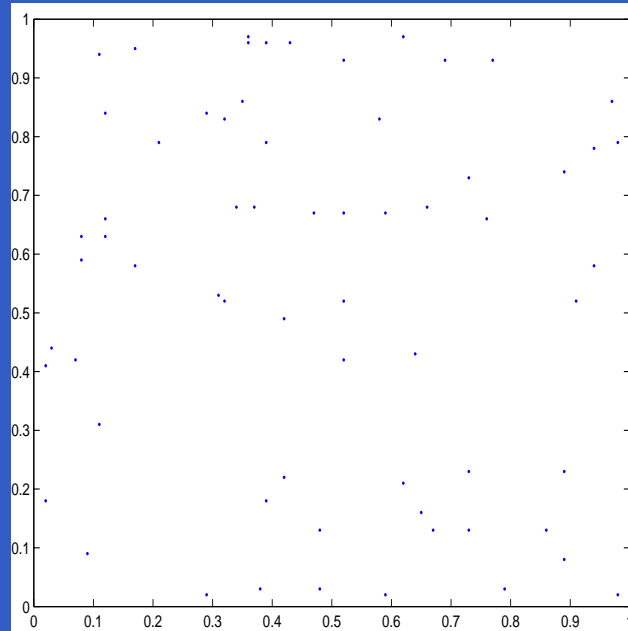
4 jeux de données respectivement considérés homogène, agrégé, régulier et hétérogène.

Statistique	Resultats pour les données suivantes			
	Japanese pines	Redwoods	Biological cells	Scouring rushes
V_n	< 0.002	0.042	0.064	0.024
R_n	< 0.002	< 0.002	0.832	0.044
MV_n	< 0.02	<0.02	0.06	0.248
MR_n	< 0.02	< 0.02	0.24	0.54
$\bar{\omega}^2$	0.712	0.692	0.006	0.004
D_n	0.26	0.908	0.014	0.044
T	0.915	< 0.001	< 0.001	0.936
Li	0.918	< 0.002	< 0.002	0.102
L_m	0.90	< 0.01	< 0.01	0.32

Application à des données réelles

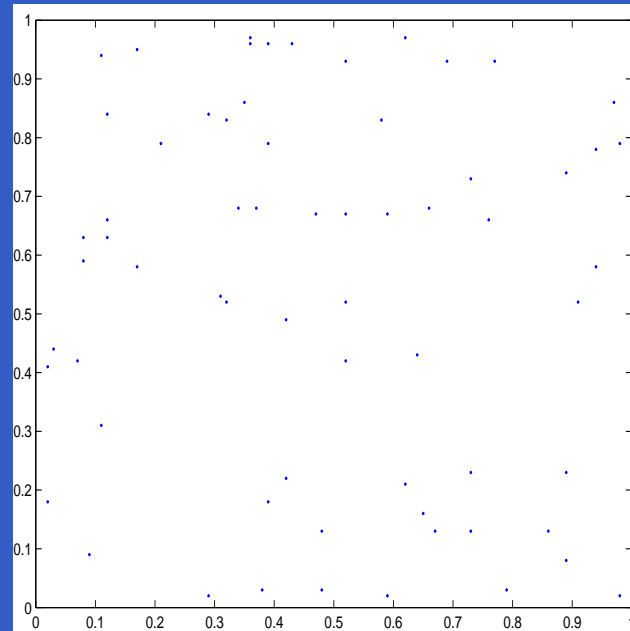
Application à des données réelles

Japanese Pines:



Application à des données réelles

Japanese Pines:



Processus de Poisson hétérogène (grille)

d'intensité $\lambda(x, y) = \lambda_1(x)\lambda_2(y)$

où $\lambda_1(x) = \max_{x_1, \dots, x_m} \exp(-c_x |x - x_i|)$

et $\lambda_2(y) = \max_{y_1, \dots, y_l} \exp(-c_y |y - y_j|)$.

Application à des données simulées

Application à des données simulées

Processus régulier:

ϵ	Puissance estimée:						
	L_m	$\bar{\omega}^2$	D_n	V_n	R_n	SV_n	SR_n
0.03	0.467	0.053	0.047	0.059	0.045	0.064	0.054
0.05	1	0.121	0.099	0.078	0.062	0.117	0.089
0.07	1	0.324	0.279	0.126	0.101	0.204	0.154

Application à des données simulées

Processus régulier:

ϵ	Puissance estimée:						
	L_m	$\bar{\omega}^2$	D_n	V_n	R_n	SV_n	SR_n
0.03	0.467	0.053	0.047	0.059	0.045	0.064	0.054
0.05	1	0.121	0.099	0.078	0.062	0.117	0.089
0.07	1	0.324	0.279	0.126	0.101	0.204	0.154

Processus agrégé:

μ	ρ	t	Puissance estimée:						
			L_i	$\bar{\omega}^2$	D_n	V_n	R_n	SV_n	SR_n
10	10	0.15	0.998	0.849	0.768	0.817	0.712	0.932	0.864
10	10	0.25	0.752	0.716	0.605	0.469	0.371	0.556	0.433
20	5	0.3	0.869	0.852	0.760	0.659	0.541	0.702	0.564

Application à des données simulées

Application à des données simulées

Processus hétérogène (tendance plane):

θ_1	θ_2	Puissance estimée:						
		Li	$\bar{\omega}^2$	D_n	V_n	R_n	SV_n	SR_n
4	4	0.230	0.795	0.766	0.191	0.151	0.129	0.096
6	6	0.378	0.937	0.914	0.326	0.237	0.229	0.164
8	4	0.339	0.906	0.888	0.293	0.222	0.191	0.150

Application à des données simulées

Processus hétérogène (tendance plane):

θ_1	θ_2	Puissance estimée:						
		Li	$\bar{\omega}^2$	D_n	V_n	R_n	SV_n	SR_n
4	4	0.230	0.795	0.766	0.191	0.151	0.129	0.096
6	6	0.378	0.937	0.914	0.326	0.237	0.229	0.164
8	4	0.339	0.906	0.888	0.293	0.222	0.191	0.150

Processus hétérogène (grille d'angle 0):

m	c	Puissance estimée:						
		T	$\bar{\omega}^2$	D_n	V_n	R_n	SV_n	SR_n
5	25	0.361	0.026	0.045	0.680	0.724	0.302	0.431
5	30	0.582	0.024	0.055	0.893	0.916	0.581	0.748
7	30	0.095	0.028	0.030	0.309	0.450	0.083	0.201
7	40	0.162	0.029	0.036	0.695	0.862	0.291	0.626

Application à des données simulées

Application à des données simulées

Processus hétérogène (grille d'angle $\pi/3$):

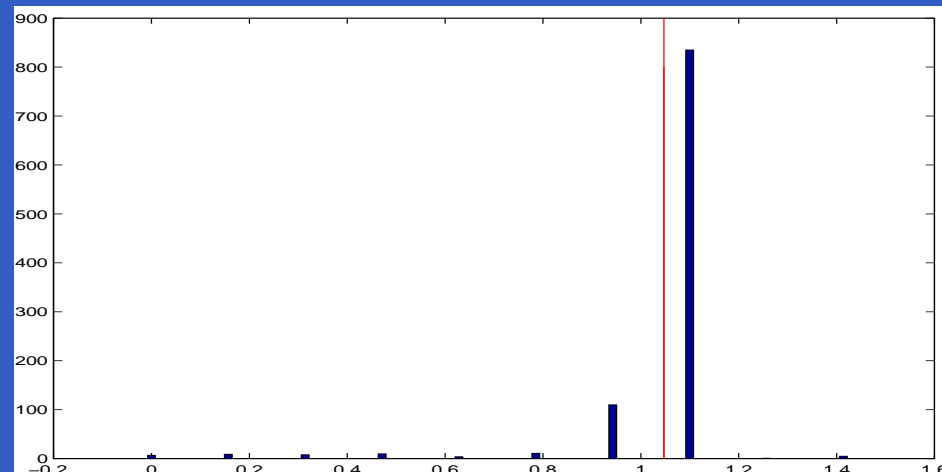
m	c	Puissance estimée:						
		T	$\bar{\omega}^2$	D_n	V_n	R_n	SV_n	SR_n
7	40	0.638	0.029	0.033	0.039	0.038	0.350	0.711
7	50	0.737	0.050	0.050	0.045	0.039	0.493	0.870
9	50	0.227	0.047	0.049	0.037	0.029	0.130	0.632
9	60	0.309	0.042	0.044	0.041	0.046	0.157	0.779

Application à des données simulées

Processus hétérogène (grille d'angle $\pi/3$):

m	c	Puissance estimée:						
		T	$\bar{\omega}^2$	D_n	V_n	R_n	SV_n	SR_n
7	40	0.638	0.029	0.033	0.039	0.038	0.350	0.711
7	50	0.737	0.050	0.050	0.045	0.039	0.493	0.870
9	50	0.227	0.047	0.049	0.037	0.029	0.130	0.632
9	60	0.309	0.042	0.044	0.041	0.046	0.157	0.779

p-valeurs minimales:



Conclusion

Conclusion

- Les méthodes basées sur les espacements sont utiles pour tester l'origine d'une forêt.

Conclusion

- Les méthodes basées sur les espacements sont utiles pour tester l'origine d'une forêt.
- Estimation des paramètres du processus.

Conclusion

- Les méthodes basées sur les espacements sont utiles pour tester l'origine d'une forêt.
- Estimation des paramètres du processus.
- Différentes alternatives à la CSR \Rightarrow différents tests pour les détecter.

Conclusion

- Les méthodes basées sur les espacements sont utiles pour tester l'origine d'une forêt.
- Estimation des paramètres du processus.
- Différentes alternatives à la CSR \Rightarrow différents tests pour les détecter.
- Généralisation à la 3D.

Conclusion

- Les méthodes basées sur les espacements sont utiles pour tester l'origine d'une forêt.
- Estimation des paramètres du processus.
- Différentes alternatives à la CSR \Rightarrow différents tests pour les détecter.
- Généralisation à la 3D.
- Généralisation aux espacements d'ordre supérieur.